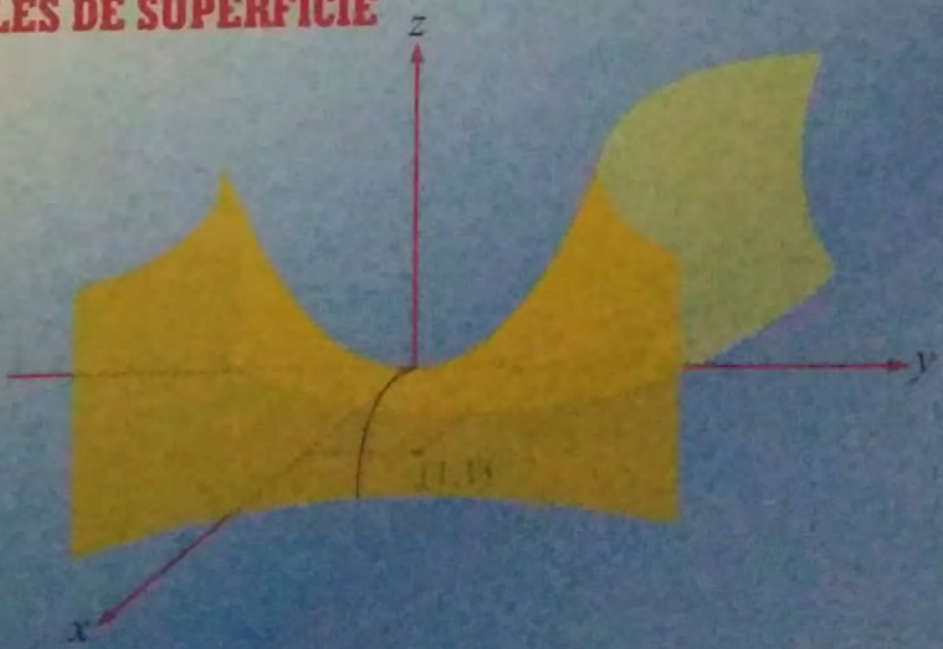
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

CÁLCULO VECTORIAL

- GEOMETRÍA DEL ESPACIO
- SUPERFICIES
- FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL
- FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES
- FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS
- EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
- FUNCIONES VECTORIALES DE UN VECTOR
- INTEGRALES DOBLES
- INTEGRALES TRIPLES
- INTEGRALES DE LÍNEA
- INTEGRALES DE SUPERFICIE



EDITORIAL MOSHERA

MOISÉS LÁZARO C.

CÁLCULO VECTORIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

- GEOMETRÍA DEL ESPACIO
- SUPERFICIES
- FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL
- FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES
- FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS
- EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
- FUNCIONES VECTORIALES DE UN VECTOR
- INTEGRALES DOBLES
- INTEGRALES TRIPLES
- INTEGRALES DE LÍNEA
- INTEGRALES DE SUPERFICIES

MOISÉS LÁZARO C.

EDITORIAL

Autor : Moisés Lázaro Carrión
Estudios : Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).

Experiencia Docente:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres

La presentación y disposición en conjunto de:

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

CÁLCULO VECTORIAL

Autor: Moisés Lázaro C.

Son propiedad de: Dist. Imp. Edit. Lib. MOSHERA S.R.L.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, sin la autorización escrita del autor. Dec. Leg. 822
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú . : 2009-10970
International Standard Book Number ISBN Nº ..... : 978-9972-813-60-3

Derechos Reservados ©
Tercera Edición: Agosto 2009
Primera Reimpresión: Octubre 2012
Segunda Reimpresión: Marzo 2015
Tercera Reimpresión: Junio 2017
Tiraje: 1000 ejemplares

Obra editada, impresa y distribuida por:

Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2969 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax: 567-9299

PEDIDOS AL POR MAYOR
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
Jr. Tacna 2969 - San Martín de Porres
Telefax: 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

IMPRESO EN PERÚ - PRINTED IN PERÚ

A Flor, mi
compañera y esposa

Prólogo

Este libro ha sido escrito para estudiantes de Ciencias e Ingeniería, pero también pueden leerlo los estudiantes de Economía, para ello, en los capítulos ocho y nueve se hacen algunas aplicaciones a la Economía.

Cada capítulo es tratado en forma ordenada, con definiciones claras y precisas, con algunos teoremas demostrados de manera formal y didáctica; tratando siempre de no ser tediosa ni difícil de entender.

El primer capítulo: GEOMETRÍA DEL ESPACIO, se refiere a un breve estudio del plano y de la recta, lo necesario para estar preparado cuando se llega al estudio de integrales de línea e integrales de superficie.

El segundo capítulo: SUPERFICIES, trata de las superficies en el espacio tridimensional. Una primera parte, se refiere a la discusión de la gráfica de las ecuaciones cartesianas de una superficie con el fin de poderlas graficar. Una segunda parte, quizás la más importante, es la referente a la parametrización de una superficie; tema que nos conduce de la mano, para estudios posteriores en la Geometría Diferencial.

En el tercer capítulo: FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL, se estudian las curvas, como gráfico de las funciones vectoriales de variable real. Las cualidades intrínsecas de una curva: la curvatura y la torsión, son las de mayor interés en este capítulo. En orden de importancia, le sigue el estudio de los caminos; que constituyen los elementos básicos para el estudio de las integrales de línea, muy aplicados en la física e integrales de funciones de variable compleja.

En el cuarto capítulo: FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES, se estudian las derivadas parciales de las funciones reales de varias variables, la derivada direccional y el gradiente de una función real de varias variables. Estos temas son de mucha importancia no solo para abordar temas teóricos acerca de las funciones reales de varias variables, sino también tienen una gran aplicación en la física y la economía.

El estudio de la gradiente de una función real de tres variables nos conduce, geométricamente, a obtener el VECTOR NORMAL a una superficie en un punto P de la superficie, y al mismo tiempo nos permite hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P. El plano tangente es una buena aproximación a una superficie en un entorno del punto P. Esta relación matemática se explica, aun mejor, con el polinomio de Taylor de una función real de dos variables, temas que no pueden dejarse de estudiar en este capítulo. El tema del vector normal y del plano tangente son el preámbulo de otros temas muy delicados que son tratados en la Geometría Diferencial.

El quinto capítulo: FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS, trata de la derivada de funciones compuestas; es aquí donde se puede apreciar la impresionante forma de aplicar la regla de la cadena cuando se derivan la composición de dos o más funciones. Es un tema que todo estudiante debe entrenar con el fin de convencerse que ya es diestro en derivar y sabe diferenciar las variables dependientes de las variables independientes.

El sexto capítulo: EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES, aborda el estudio de la existencia de los extremos de una función (máximos y mínimos) en forma local y global. Es importante tratar en este capítulo las condiciones necesarias y las condiciones suficientes de la existencia de los extremos locales de una función real de varias variables. La existencia

de los llamados puntos de silla y el análisis de los extremos de una función definida en una región cerrada son muy sugestivos y por ende deben ser estudiadas cuidadosamente.

El séptimo capítulo: FUNCIONES VECTORIALES DE UN VECTOR, trata de las funciones vectoriales de variable vectorial. En este caso, intervienen las matrices, que es el elemento básico para estudiar las derivadas. En este capítulo hay tres temas de suma importancia: el teorema de la función implícita, el teorema de la función inversa y el método de Lagrange para hallar extremos condicionados de una función. Temas que han sido tratados cuidadosamente y explicados muy didácticamente por ser de mucha importancia en el análisis matemático.

Sobre todo, el método de Lagrange para hallar extremos condicionados de una función tienen una gran aplicación en geometría y economía, por eso se deben estudiar con delicada y abnegada dedicación y hacer de ellas un poderoso instrumento de análisis e investigación matemática.

En el octavo capítulo: INTEGRALES DOBLES, se estudian las integraies dobles y sus aplicaciones. Para abordar este tema sólo se necesitan recordar las gráficas de regiones en el plano y las integrales elementales.

En el noveno capítulo: INTEGRALES TRIPLES, se estudian las integrales triples y sus aplicaciones. Este tema requiere del gráfico de regiones en el espacio $\mathbb{R}^3$, que fácilmente se puede discutir estudiando el cuarto capítulo.

El décimo capítulo: INTEGRALES DE LÍNEA, trata de las integrales de línea y sus aplicaciones. Es requisito ineludible saber paramatrizar curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, sin lo cual el estudiante no podrá progresar en otros temas afines.

El décimo primer capítulo: INTEGRALES DE SUPERFICIES, trata de las integrales de superficie; tema muy sugerente cuyas aplicaciones en la física son muy importantes. El requisito indispensable es saber parametrizar superficies.

Los temas aquí tratados, son expuestos de manera sutil y sobre todo didáctico, tratando de no perder la rigurosidad del análisis matemático. He tratado en lo posible de plantear los temas en forma intuitiva haciendo dibujos y diagramas de fácil y agradable visión del lector.

Agradezco a todos los estudiantes que siempre han acogido mis modestas obras y esto me ha motivado para ir mejorándolas y ampliándolas con el único fin de hacer de las matemáticas una distracción antes que un aburrimiento.

Hago patente mis agradecimientos a los profesores de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, de la Universidad Nacional del Callao y de la Pontificia Universidad Católica del Perú; por sus valiosas sugerencias.

Mi especial agradecimiento al señor José Luyando, quien es el artífice de la diagramación y dibujos.

El Autor.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1
GEOMETRÍA DEL ESPACIO

1.0 **Introducción** 1
1.1 **La ecuación del plano** 2
1.2 **Vector normal a un plano** 3
1.3 **Ecuación vectorial del plano** 4
1.4 **Ecuación paramétrica del plano** 4
1.5 **Ecuación general (o cartesiana) del plano** 5
1.6 **La recta** 6
1.6.1 Definición 6
1.7 **Ecuación vectorial de la recta** 6
1.8 **Ecuación paramétrica** 7
1.9 **Ecuación simétrica** 8
1.10 **Forma general de las ecuaciones de la recta** 8
1.10.1 Ecuación de la recta en función del producto vectorial 11
1.11 **Importancia de la parametrización de planos y rectas** 11
1.12 **Algunos temas complementarios sobre planos** 17
1.13 **Algunos temas complementarios sobre rectas** 18
1.14 **Gráficos de sólidos en el espacio R^3** 19
1.14.1 Introducción 19
1.15 **Gráfico de sólidos y su expresión en coordenadas esféricas o cilíndricas** 19

CAPÍTULO 2
SUPERFICIES

2.0 **Introducción** 24
2.1. **Definición de superficie** 25
2.2 **La ecuación $F(x,y,z) = 0$** 29
2.3 **Principales superficies** 38
2.3.1 La superficie esférica 38
2.3.2 Ecuación de la superficie cilíndrica 43
2.3.3 Conos en $\mathbb{R}^3$ 51
2.3.4 Superficie de revolución 56
2.3.5 Superficie cuádrica 59
Problemas propuestos 92
2.4 **Paremetrización de una supercicie** 62
2.4.0 Algunos conceptos de topología de conjuntos 62

2.4.1 Parametrización de una superficie 64
2.4.2 Técnicas para parametrizar una superficie 65
2.4.3 Importancia de la parametrización de superficies 91
Problemas propuestos 92

CAPÍTULO 3

FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

3.1 **Introducción** 109
3.2 **Funciones vectoriales de una variable real** 110
3.3 **Dominio y rango de una función vectorial de variable real** ... 112
3.4 **El límite de una función vectorial** 113
3.4.1 Definición 113
3.4.2 Propiedad de la norma de un vector que es necesario aplicar a la definición 3.4.1 cuando se quiere verificar la existencia de límites de funciones vectoriales 114
3.4.3 Teorema 1 119
3.4.4 Suma, diferencia, producto interno y producto vectorial de funciones vectoriales 121
3.4.5 Teorema 2 122
3.5 **Continuidad** 122
3.6 **Caminos en $\mathbb{R}^n$** 123
3.6.1 Definición 1 123
3.6.2 Punto inicial y punto final de un camino 125
3.6.3 Camino cerrado 125
3.6.4 Camino simple 125
3.6.5 Camino cerrado simple 126
3.6.6 Traza de un camino 127
3.7 **Diferenciabilidad, curvas regulares** 127
3.7.1 Definición 1 128
3.7.2 Teorema 4 129
3.7.3 Definición 2 129
3.7.4 Interpretación geométrica de la derivada 130
3.7.5 Vector velocidad (vector tangente). Rapidez. Recta tangente 131
3.7.6 Camino regular 131
3.7.7 Recta tangente y plano normal 133
3.7.8 Parametrización de curvas 135
3.8 **Diferencias entre camino y curva** 147
3.9 **Algunos teoremas sobre derivadas** 148
3.9.1 Teorema 5 148
3.9.2 Teorema 6 148

3.9.3 Composición de una función real con una función vectorial 150
3.10 **La diferencial** 153
3.10.1 Diferencial de algunos funciones 155
3.11 **Integración** 155
3.12 **Reparametrización de caminos** 157
3.12.1 Definición 158
3.12.2 Definición 158
3.13 **Homotopía de caminos** 161
3.13.1 Definición 161
3.13.2 Operaciones con caminos 162
3.13.3 Clase de equivalencia 162
3.13.4 Operaciones con clases de equivalencia de caminos cerrados 163
3.14 **Longitud de un camino** 164
3.14.1 Reparametrización por longitud de arco 167
3.15 **Tangente unitaria, normal principal y vectores binormales**.... 172
3.15.1 Definición 172
3.15.2 Proposición 174
3.16 **Curvatura y torsión** 177
3.16.1 Definición 178
3.16.2 Proposiciones 179
3.16.3 Radio de curvatura, Centro de curvatura, Círculo de curvatura (o Circulo Osculador) de C 184
3.16.4 Torsión 185
3.16.5 Proposiciones 187
3.16.6 Triedro móvil 192
3.16.7 Fórmula de Frenet - Serrel 193
3.17 **La teoría local de curvas, parametrizadas por la longitud de arco** 197
3.17.1 Ecuaciones intrínsecas 202
3.18 **Aplicaciones a la dinámica** 208
3.18.1 Movimiento de un cuerpo 208
3.18.2 Movimiento circular 210
3.18.3 Movimiento de un cuerpo sobre una curva cuyas ecuaciones paramétricas están expresadas en coordenadas polares 211
Problemas propuestos (Taller 1) 213
Problemas propuestos (Taller 2) 232

CAPÍTULO 4

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

4.0 **Introducción** 259
4.1 **Función real de dos variables** 260

4.1.1 Notación funcional 260
4.1.2 Dominio y rango de una función real de dos variables 261
4.1.3 Técnicas para hallar el dominio y rango de una función $z = f(x,y)$ ... 261
4.1.4 Importancia de conocer el dominio de una función real de dos variables 263
4.1.5 Significado geométrico de la función $z = f(x,y)$ 267
4.1.6 Operaciones con funciones reales con dos variables 268
4.1.7 Composición de dos funciones 268
4.2 **Bola abierta, bola reducida, bola cerrada, conjunto abierto, conjunto cerrado** 270
4.3 **Límite** 271
4.3.1 Propiedades de los límites 272
4.3.2 Regla de las dos trayectorias 273
4.3.3 Cálculo de límites aplicando coordenadas polares 275
4.4 **Continuidad** 292
4.4.1 Significado geométrico 293
4.4.2 Propiedades de las funciones de dos variables 299
4.5 **Derivadas parciales** 300
Definición de derivadas parciales de una función $z = f(x,y)$ en un punto $(x_0,y_0) \in U$ 304
Interpretación geométrica de las derivadas parciales 304
Plano tangente 306
4.6 **Derivada direccional de un campo escalar** 314
4.6.1 Interpretación geométrica de la derivada direccional para funciones escalares de dos variables 315
4.6.2 Proposición 316
4.7 **Gradiente de un campo escalar** 318
4.7.1 Interpretación geométrica del gradiente 318
4.8 **Plano tangente** 321
4.9 **Cálculo de la derivada direccional usando el gradiente** 322
4.10 **El gradiente como dirección de máxima variación** 323
4.11 **Problemas sobre derivada direccional** 325
4.12 **Incrementos y diferenciales** 349
4.13 **Diferenciabilidad** 356
4.13.1 Funciones de clase C^1 359
4.13.2 Problemas propuestos 370
4.13.3 Generalización de la diferencial de funciones escalares de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ 374
4.14 **Diferenciabilidad y derivadas direccionales** 377
4.15 **El teorema de Euler sobre funciones homogéneas** 378

Derivadas parciales de órdenes superiores 381
Problemas 392

CAPÍTULO 5

FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS

5.1 **Regla de la cadena para derivar funciones compuestas** 415
5.2 **Funciones implícitas** 438
5.2.1 Primera versión 438
5.2.2 Segunda versión 439
5.2.3 Tercera versión .....

CAPÍTULO 6

EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.0 **Introducción** 449
6.0.1 Definiciones preliminares 451
Matriz transpuesta 451
Matriz simétrica 452
Valores propios de una matriz simétrica 452
Formas cuádricas 453
Hessiana 454
Fórmula de Taylor de segundo orden 456
Forma cuádrica positiva y negativa 459
Submatriz angular 460
6.1 **Extremos de las funciones de varias variables** 461
6.1.1 Definiciones de máximo y mínimo local y global de una función escalar 461
6.1.2 Punto crítico 461
6.1.3 Punto silla 462
6.1.4 Extremos de una función 462
6.1.5 Condición necesaria de orden para la existencia de extremos de la función f 462
6.1.6 Condiciones suficientes para la existencia de extremos locales 463
Problemas 465
6.1.7 Criterio para hallar máximos y mínimos para funciones escalares de dos variables 474
6.2 **Aplicaciones a la economía** 480
6.2.1 La función beneficio 480
Problemas propuestos 482

CAPÍTULO 7

FUNCIONES VECTORIALES DE UN VECTOR

7.0 **Introducción** 489
7.1 **Funciones vectoriales de variable vectorial** 492
7.2 **Límite y continuidad** 494
7.3 **Matriz jacobiana, diferenciabilidad, diferencial** 498
7.4 **Regla de la cadena** 509
7.5 **Derivadas de orden superior. Matriz hessiana** 515
7.6 **Función implícita** 517
7.7 **Función inversa** 528
7.8 **Extremos condicionados** 532
Problemas resueltos 541
7.8.1 Condición suficiente de extremo condicionado 547
7.8.2 Aplicaciones a la economía 554
7.8.3 Multiplicadores de Lagrange con un parámetro para funciones de dos variables 561
Aplicación a la economía 566
Problemas propuestos 568

CAPÍTULO 8

INTEGRALES DOBLES

8.0 **Introducción** 583
8.1 **Integral doble sobre un rectángulo** 584
8.2 **Función acotada** 586
8.3 **Límite de la suma de Riemann sobre una región cerrada D** .. 587
8.4 **Integral doble de una función acotada definida sobre una región cerrada D** 587
8.5 **Interpretación de la integral doble como volumen** 588
8.6 **Integrales iteradas** 588
8.7 **Teorema** 589
8.8 **Regiones no rectangulares** 590
8.9 **Teorema de Fubine para regiones no rectangulares** 590
8.10 **Propiedades fundamentales de la integral doble** 591
8.11 **Inversión del orden de integración en una integral doble** 592
8.12 **Cálculo de volúmenes de sólidos y áreas de regiones planas por integración doble** 593
8.13 **Jacobianos: Cambio de variables para integrales dobles** 598
8.13.1 Jacobiano de una función de dos variables 598
8.13.2 Jacobiano de la inversa de T 600

8.13.3 Teorema del cambio de variables para integrales dobles 602
8.13.4 Integrales dobles en polares 606
8.13.5 Área mediante integral doble en polares 609
8.13.6 Coordenadas polares modificadas 610
Problemas propuestos 612
8.14 **Masa, densidad, momentos y funciones de densidad de probabilidad** 631
8.14.1 Masa 631
8.14.2 Densidad 631
8.14.3 Momento de masa y momento de inercia 631
8.14.4 Momentos y centro de masa de una lámina plana de densidad variable 632
8.14.5 Teorema de Pappus 633
Problemas propuestos 637
8.15 **Integrales impropias** 644
Problemas propuestos 647

CAPÍTULO 9
INTEGRALES TRIPLES

9.1 **Conjunto acotado en $\mathbb{R}^3$** 649
9.2 **Partición del paralelepípedo $\mathbb{R}$** 649
9.3 **Norma de la partición P** 650
9.4 **Suma de Riemann** 650
9.5 **Integral triple** 650
9.6 **Proposición 1** 651
9.7 **Cálculo de integrales triples mediante integrales iteradas** 651
9.8 **Propiedades de la integral triple** 655
Ejercicios propuestos 659
9.9 **Volumen mediante integrales triples** 664
9.10 **Cambio de variables para integrales triples** 666
9.11 **Integrales triples en coordenadas cilíndricas** 668
9.12 **Integrales triples en coordenadas esféricas** 674
Problemas propuestos 681
9.13 **Centro de masa y momento de inercia de un sólido** 686
9.14 **Planteamiento de un problema de triple integral** 687
Problemas propuestos 695
Miscelánea de problemas 700

CAPÍTULO 10

INTEGRALES DE LÍNEA

10.0 **Introducción** 701
10.1 **Integrales de línea de primera especie** 701
10.2 **Propiedades de la integral de línea** 705
10.2.1 Aplicaciones de la integral curvilínea de 1ª especia a la mecánica 709
Problemas propuestos 718
10.3 **Integrales de línea de segunda especie** 726
Problemas propuestos 732
10.4 **Independencia de trayectoria en integrales de línea** 734
Problemas propuestos 741
10.5 **Trabajo** 744
Problemas propuestos 748
10.6 **Teorema de Green** 753
Problemas propuestos 758
10.7 **Integral de línea para el cálculo del área de una región** 764
Problemas propuestos 767

CAPÍTULO 11

INTEGRALES DE SUPERFICIES

11.0 **Introducción** 769
11.1 **Integrales de campos escalares sobre superficies** 770
11.1.1 El diferencial de la función $\vec{r}(\mu,\upsilon)$ 775
Problemas propuestos 776
11.2 **Áreas de superficies** 782
Problemas propuestos 788
11.3 **Aplicaciones:** Masa, Momento, Centro de masa, Centro de gravedad (centroide), Momento de inercia de una superficie 791
Problemas propuestos 792
11.4 **Integrales de campos vectoriales sobre superficies** 797
11.4.1 Otra forma de expresar la integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 799
Problemas propuestos 809
11.5 **Divergencia y rotacional** 815
11.6 **Teorema de la divergencia y Teorema de Stokes** 817
Problemas propuestos 830

CAPÍTULO 1

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

1.0 INTRODUCCIÓN

Antes de deducir las diferentes ecuaciones del plano, daré algunas ideas fundamentales acerca del espacio IR^3.

1. El producto cartesiano $IR \times IR \times IR = IR^3 = \{ (x,y,z) / x, y, z \in IR \}$ es el conjunto de elementos de la forma (x,y,z) tal que cada componente x, y, z es un número real.

2. Los elementos (x,y,z) se llaman **VECTORES** de IR^3.

3. El conjunto IR^3 es un espacio vectorial.

4. Un espacio vectorial, es un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones:

   1° La suma de dos vectores es un vector: $(x,y,z)+(1,m,n) = (x+1, y+m, z+n)$

   2° El producto de un escalar por un vector es un vector:

   $\alpha (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

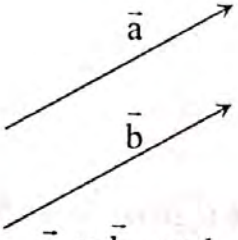
5. El conjunto IR^3 es el espacio tridimensional y se representa por la intersección de tres rectas perpendiculares que se llamarán **EJE X, EJE Y, EJE Z.**

6. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pertenecientes a IR^3 son linealmente dependientes sí, y sólo si existen dos escalares t y s que no son cero, tal que $t\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$, donde $\vec{0} = (0,0,0)$.

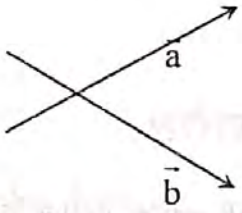
Geométricamente: $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son l.d. $\iff$ $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

7. ***Definición:*** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ***linealmente independiente***, si y solo si, la igualdad $t\vec{a}+s\vec{b}=\vec{0}$ implica $t=0 \wedge s=0$.

8. ***Definición:*** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente, si y sólo si, el producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{0}=(0,0,0)$.

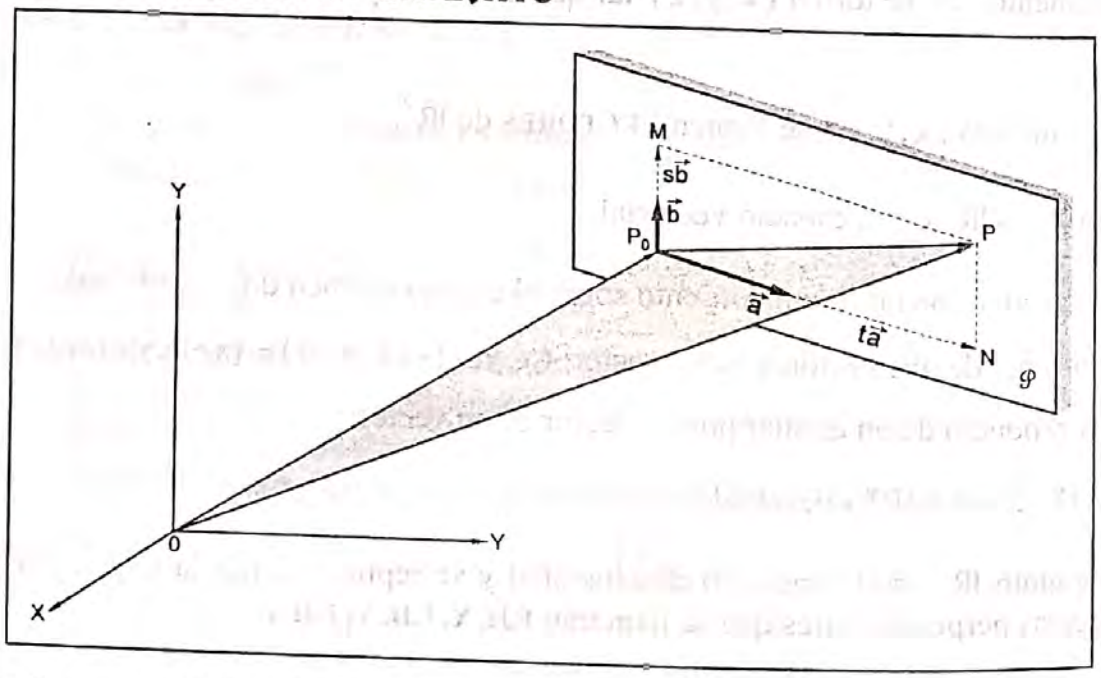


$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son l . d .



$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son l . i.

1.1 LA ECUACIÓN DEL PLANO



1) Sea P_0 un punto fijo del plano $\mathcal{P}$.

2) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores linealmente independientes contenidos en el plano $\mathcal{P}$ que tienen como punto de aplicación el punto P_0.

3) En el triángulo OP_0P, tenemos la siguiente suma de vectores: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}$.

4) En el paralelogramo P_0MPN contenido en el plano $\mathcal{P}$, tenemos la siguiente suma vectorial: $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0N} + \overrightarrow{NP}$.

5) Pero $\begin{cases} \overrightarrow{P_0N} = t\,\vec{a} \\ \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{P_0M} = s\,\vec{b} \end{cases}$

6) Sustituir (5) en (4):

$\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

7) Sustituir (6) en (3):

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$

8) Pero:

$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = P - \mathbf{0} = P \\ \overrightarrow{OP_0} = P_0 - \mathbf{0} = P_0 \end{cases}$, $\mathbf{0} = (0,0)$

9) Sustituir (8) en (7):

$$P = P_0 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b} \quad t, s \in \mathbb{R} \qquad (I)$$

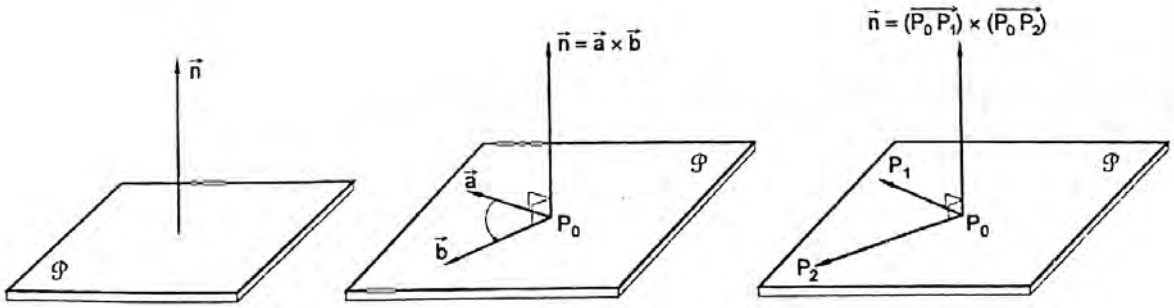
ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO QUE PASA POR P_0 Y GENERADO POR LOS VECTORES NO PARALELOS $\vec{a}$ Y $\vec{b}$.

Por tanto: $\mathcal{P} = \{ P_0 + t\,\vec{a} + s\,\vec{b} / t, s \in \mathbb{R} \}$

1.2 VECTOR NORMAL A UN PLANO

Definición

Vector normal a un plano $\mathcal{P}$ es cualquier vector perpendicular (ORTOGONAL) al plano $\mathcal{P}$.



En las tres figuras tenemos que el vector $\vec{n}$ es la **NORMAL** al plano $\mathcal{P}$.

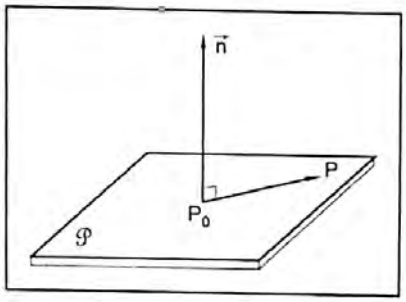
$\vec{n} = (\overrightarrow{P_0P_1}) \times (\overrightarrow{P_0P_2})$

$\vec{n} = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)$

1.3 ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Si P_0 es un punto fijo del plano $\mathcal{P}$ y $\vec{n}$ es su NORMAL, entonces la ecuación del plano es $\vec{n}.(P - P_0) = 0$

Demostración:



1) Sea $\vec{n}$ la normal del plano $\mathcal{P}$.

2) Como $\vec{n}$ es ortogonal al plano $\mathcal{P}$, entonces cualquier vector contenido en $\mathcal{P}$ será ortogonal a $\vec{n}$.

3) Sea P_0 un punto fijo de $\mathcal{P}$ y P un punto variable de $\mathcal{P}$, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ está contenido en $\mathcal{P}$.

4) Como $\overrightarrow{P_0P}$ está contenido en $\mathcal{P}$, entonces $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal a $\vec{n}$, por tanto, se cumplirá: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0$ ..... (4*)

5) Pero $\overrightarrow{P_0 P} = P - P_0$

6) Sustituir (5) en (4*)

$\vec{n}.(P - P_0) = 0$
Ecuación Vectorial del plano que pasa por P_0 y cuya normal es $\vec{n}$

(II)

1.4 ECUACIÓN PARAMÉTRICA DEL PLANO

Si en la ecuación (I), hacemos

$$\begin{cases} P = (x, y, z) \\ P_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

obtenemos:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3)$$
$$= (x_0 + ta_1 + sb_1, y_0 + ta_2 + sb_2, z_0 + ta_3 + sb_3)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ta_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ta_3 + sb_3 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

ECUACÓN PARAMÉTRICA DEL PLANO, QUE PASA POR P_0 y cuyos vectores generadores son $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

1.5 Ecuación General (o cartesiana) del Plano

Si en la ecuación II aplicamos la propiedad distributiva del producto ESCALAR, obtenemos:

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot p - \vec{n} P_0 = 0$$

haciendo:

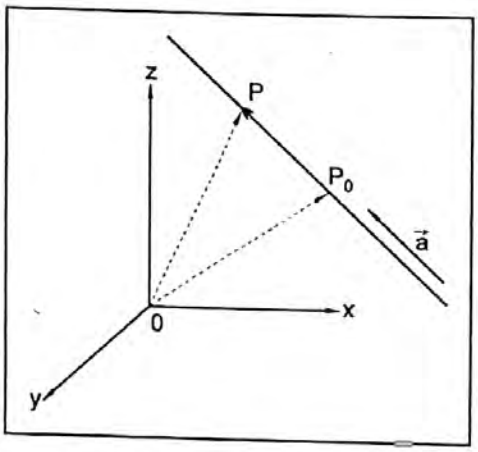
$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \\ P = (x, y, z) \\ P_0 = (x_0, y_0, z_0) \end{array}\right\} \Rightarrow (n_1, n_2, n_3)\cdot(x, y, z) - (n_1, n_2, n_3)\cdot(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$n_1x + n_2y + n_3z - (n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0) = 0$$

haciendo $\begin{cases} n_1 = A \\ n_2 = B \\ n_3 = C \\ -(n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0) = D \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{(IV)}$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO CUYA NORMAL es $\vec{n} = (A, B, C)$

1.6 LA RECTA



1.6.1 Definición

Se llama vector director de una recta a todo VECTOR diferente de cero, tal que ***sea paralelo a la recta.***

En la figura, tenemos que $\vec{a}$ es paralelo a la recta $\mathfrak{L}$, por tanto, $\vec{a}$ es un vector director de $\mathfrak{L}$.

Nota: Decir que $\vec{a}$ es paralelo a $\mathfrak{L}$, indica cualesquiera de las dos cosas: $\vec{a} \subset \mathfrak{L}$ o que $\vec{a} // \mathfrak{L}$, siendo que $\vec{a}$ está contenido en otra recta.

1.7 ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Proposición 1. La ecuación vectorial de una recta $\mathfrak{L}$, que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y con un vector director $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, es $P = P_0 + t\vec{a}$, $t \in IR$

Demostración:

1) Sea P un punto variable de $\mathfrak{L}$.

2) Como P_0 es un punto fijo de $\mathfrak{L}$ y $\vec{a}$ el vector director de $\mathfrak{L}$; en el triángulo OP_0P se tiene la siguiente suma vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2*)$$

3) Pero: $\overrightarrow{OP} = P - O$

$= (x , y , z) - (0 , 0 , 0)$

$= (x - 0 , y - 0 , z - 0) = (x , y , z) = P$

$0P_0 = P_0 - 0$

$= (x_0 , y_0 , z_0) - (0 , 0 , 0) = (x_0 - 0 , y_0 - 0 , z_0 - 0)$

$= (x_0 , y_0 , z_0) = P_0$

El vector $\overrightarrow{P_0 P}$ es paralelo al vector $\vec{a}$, por tanto, $\exists\, t \in IR$, tal que, $\overrightarrow{P_0 P} = t\vec{a}$

4) Sustituir (3) en (2*) , obtenemos la Ecuación vectorial :

(I) $\boxed{P = P_0 + t\vec{a}}$, $t \in IR$.

Proposición 2. la ecuación de una recta queda bien definida (bien determinado), si:

a) Se conocen un punto P_0 y su vector director $\vec{a}$.

b) Se conocen dos puntos P_0 y P_1 . En este caso el vector director se halla por la diferencia entre P_1 y P_0 : $\vec{a} = P_1 - P_0$

1.8 ECUACIÓN PARAMÉTRICA

Si en la ecuación (I) : $P = P_0 + t\vec{a}$, reemplazamos los puntos P, P_0 y el vector $\vec{a}$ por sus componentes:

$$\begin{cases} P = (x , y , z) \\ P_0 = (x_0 , y_0 , z_0) \\ \vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3) \end{cases}$$

obtenemos: $(x , y , z) = (x_0 , y_0 , z_0) + t\,(a_1 , a_2 , a_3)$

$= (x_0 , y_0 , z_0) + (ta_1 , ta_2 , ta_3)$

$= (x_0 + ta_1 , y_0 + ta_2 , z_0 + ta_3)$

Igualando las componentes:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

Se llama así, porque los puntos (x,y,z) dependen de los valores del parámetro "t", $t \in \mathbb{R}$

1.9 ECUACIÓN SIMÉTRICA

Si de las ecuaciones en (II), despejamos el parámetro "t" de cada ecuación obtenemos:

De $x = x_0 + ta_1$, $\Rightarrow$ $t = \dfrac{x - x_0}{a_1}$ ..... (1)

De $y = y_0 + ta_2$, $\Rightarrow$ $t = \dfrac{y - y_0}{a_2}$ ..... (2)

De $z = z_0 + ta_3$, $\Rightarrow$ $t = \dfrac{z - z_0}{a_3}$ ..... (3)

Ahora igualamos (1) con (2) y con (3):

$$\text{(III)} \quad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

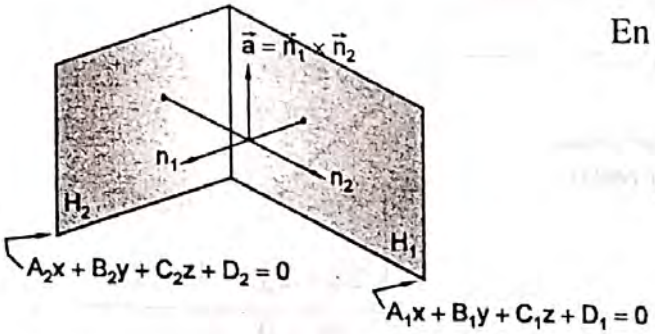
ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA

1.10 FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA

En este caso afirmamos que "una recta $\mathcal{L}$ queda bien definida si se intersectan dos planos diferentes cualesquiera, cuyas ecuaciones en forma general son:

(IV) $\mathfrak{L}: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$

FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA



En este caso, el vector director de $\mathfrak{L}$ es :

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq (0,0,0)$$

Ejemplo

1. Las ecuaciones de una recta son:

$$\mathfrak{L}: \begin{cases} 3x - 2y + 4z - 9 = 0 \\ x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Hallar su vector director

b) ¿Cómo se convierte las dos ecuaciones que definen a la recta $\mathfrak{L}$ en ecuación paramétrica?

Solución:

a) El vector director de $\mathfrak{L}$ es:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(4-4) - \vec{j}(-6-4) + \vec{k}(3+2) = 0\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{a} = 0\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k} = (0,10,5) = 5(0,2,1)$$

b) Las ecuaciones $\begin{cases} 3x-2y+4z-9=0 \\ x+y-2z+y=0 \end{cases}$ se convierte en paramétrica resolviendo el sistema con respecto a z:

Así:

$$\begin{cases} 3x-2y=-4z+9 \\ x+y=2z-5 \end{cases}$$

Por –3 ↙ ↘ *Por 2*

Por sumas y restas

$$\begin{cases} 3x-2y=-4z+9 \\ -3x-3y=-6z+15 \end{cases}$$

$$0-5y=-10z+24$$

$$5y=10z-24$$

$$y=\frac{10z-24}{5}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=-4z+9 \\ 2x+2y=4z-10 \end{cases}$$

$$5x+0=0-1$$

$$5x=-1$$

$$x=-1/5$$

Estos valores indican que el punto que genera a la recta $\mathfrak{L}$ es: $P\left(-1/5, \frac{10z-24}{5}, z\right)$

Luego:

$$P=\left(-\frac{1}{5}, \frac{10z-24}{5}, z\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{5}+0z, \frac{-24}{5}+\frac{10}{5}z, 0+z\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{5}, \frac{-24}{5}, 0\right)+(0, \frac{10}{5}, 1)\,z \;,\; z\in \mathbb{R}$$

hacer $z=t \Rightarrow$ $\boxed{P=\left(-\frac{1}{5}, \frac{-24}{5}, 0\right)+t\,(0, 2, 1)}$ $t\in \mathbb{R}$

ECUACIÓN VECTORIAL DE $\mathfrak{L}$

La ecuación paramétrica será:

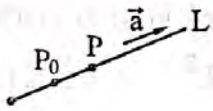
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{5}+0t \\ y=-\frac{24}{5}+2t \\ z=0+t \end{cases}$$

La ecuación simétrica será: $\frac{y+\frac{24}{5}}{2}=\frac{z}{1}$, $x=-\frac{1}{5}$

Nota: Una recta tiene una infinidad de ecuaciones paramétricas y vectoriales y también infinidad de parejas de ecuaciones cartesianas. Pero todas ellas definen a la misma recta.
Los diversos vectores directores siempre son paralelos.

1.1.0.1 ECUACIÓN DE LA RECTA EN FUNCIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL.

Es de la forma $L:(P-P_0)\times\vec{a}=\vec{O}$



donde $\vec{0}=(0,0,0)$

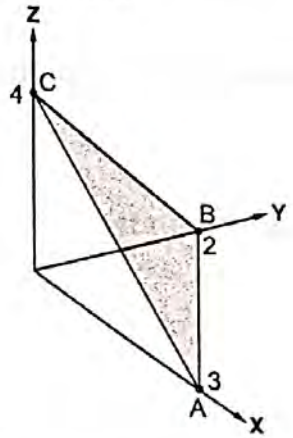
1.11 IMPORTANCIA DE LA PARAMETRIZACIÓN DE PLANOS Y RECTAS

Para el estudio de las superficies y de las curvas en $\mathbb{R}^3$ y para el estudio de las integrales sobre superficies y las integrales de línea es muy importante saber parametrizar las superficies en $\mathbb{R}^3$, entre estas, el plano en particular. También, es importante saber, la parametrización de las curvas que se obtienen al intersectar dos superficies, entre éstas, la recta en particular.

En este capítulo, trataré de dar las pautas y las técnicas para parametrizar planos limitados y segmentos dirigidos.

EJEMPLO 1 Viendo el gráfico adjunto, se pide : a) hallar la ecuación rectangular de plano que pasa por los puntos A, B y C; b) parametrizar el plano triangular ABC. c) Parametrizar los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

Solución:



a) Cuando un plano $\mathcal{P}$ intersecta a los ejes coordenados X, Y, Z en los puntos A(a,0,0) y B(0,b,0) y C(0,0,c); respectivamente la ecuación cartesiana del plano es de la forma: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

En el problema, la ecuación rectangular del plano que pasa por los puntos A, B y C es: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

b) Hay dos formas de parametrizar el plano triangular ABC.

FORMA 1: Parametrización natural

La parametrización natural consiste en despejar una de las variables de la ecuación rectangular: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ y luego proyectarla sobre uno de los planos coordenados.

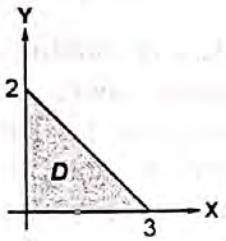
- Al despejar z obtenemos: $z = 4\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)$
$= 4-\frac{4}{3}x-2y$
- Si se despeja $z=f(x,y)$ en función de (x,y), el plano triangular ABC se proyecta sobre el PLANO COORDENADO XY . Dicha proyección es el conjunto $D=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\le 1\right\}$.

Las dos operaciones hechas, definen la función vectorial:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}(x,y)=\left(x, y, 4-\frac{4}{3}x-2y\right)$$

donde $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \le 6 \}$

Dominio de la función vectorial $\vec{r}$



En este caso los parámetros son las variables (x,y).

c) **FORMA 2:** Parametrización vectorial

Esta parametrización consiste en hallar la ecuación vectorial del plano triangular ABC, del siguiente modo:

$$\vec{r}(\mu,\nu) = P_0 + \mu\vec{a} + \upsilon\vec{b} \quad , \quad 0\le\mu\le 1 \quad , \quad 0\le\upsilon\le 1-\mu$$

donde P_0 es un punto que pertenece al plano y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los generadores del plano.

En el problema, si elegimos $P_0 = A$, entonces $\vec{a} = B - A$ y $\vec{b} = C - A$.

Como $A = (3,0,0)$ y $\vec{a} = (0,2,0)-(3,0,0) = (-3,2,0)$

$$\vec{b} = (0,0,4)-(3,0,0) = (-3,0,4)$$

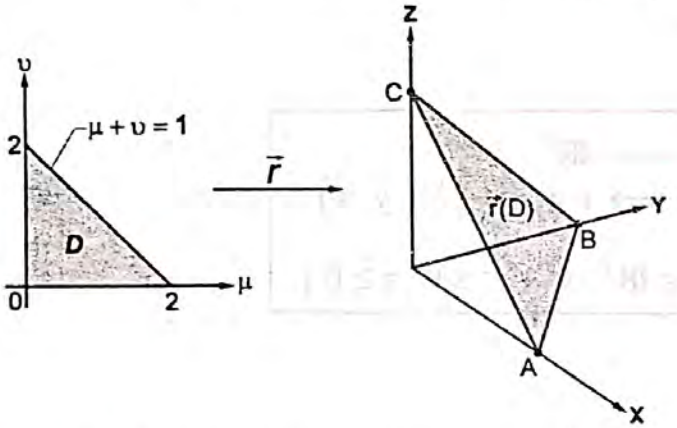
La ecuación vectorial del plano triangular ABC, es :

$$\vec{r}(\mu,\upsilon) = (3,0,0) + \mu(-3,2,0) + \upsilon(-3,0,4) \ , \ 0 \le \mu \le 1 \ , \ 0 \le \upsilon \le 1-\mu$$

Esto es $\boxed{\vec{r}(\mu,\upsilon) = (3-3\mu-3\upsilon\ ,\ 2\mu\ ,\ 4\upsilon) \quad | \quad 0 \le \mu \le 1\ ,\ 0 \le \upsilon \le 1-\mu}$

También se puede escribir, del siguiente modo:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\mu,\upsilon) \longmapsto \vec{r}(\mu,\upsilon) = (3-3\mu-3\upsilon\ ,\ 2\mu\ ,\ 4\upsilon)$$
$$D = \{(\mu,\upsilon) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \mu \le 1 \ , \ 0 \le \upsilon \le 1-\mu \}$$



donde :

$\vec{r}(D)$ = plano triangular

$\vec{r}(D) \subset \mathbb{R}^3$

La función vectorial $\vec{r}$ nos indica que a cada punto $(\mu,\upsilon) \in D$ le corresponde el punto $\vec{r}(\mu,\upsilon)$ perteneciente al plano.

d) La parametrización del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, donde $A = (3,0,0)$ y $B = (0,2,0)$, es:

$$\vec{\alpha}(t) = A + t(B-A) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

esto es, $\vec{\alpha}(t) = (3,0,0) + t(-3,2,0)$

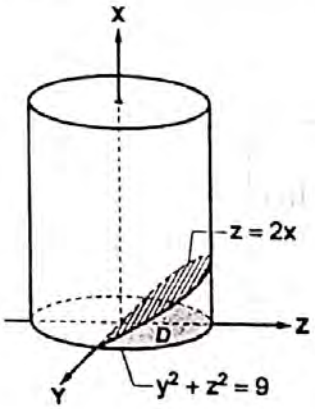
$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = (3-3t\ ,\ 2t\ ,\ 0) \quad , \quad 0 \le t \le 1}$$

Una forma elegante de expresar la función vectorial $\vec{\alpha}$, es:

$$\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (3-3t\ ,\ 2t\ ,\ 0)$$

EJEMPLO 2 En el gráfico se tiene la intersección del plano $\mathcal{P} : z = 2x$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 9$. Parametrizar la parte del plano que está sombreado.

Solución:



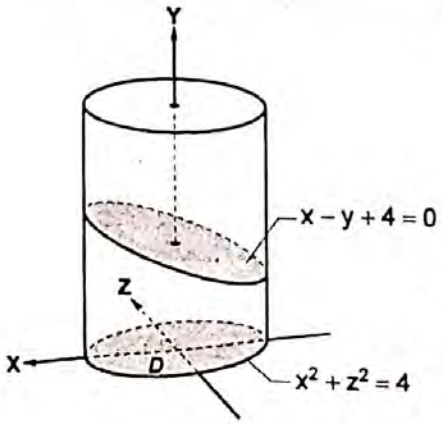
- Como el plano $\mathcal{P}$ se está proyectando sobre el plano YZ, entonces de la ecuación $z = 2x$, se debe despejar la variable "x" en función de (y,z).
  Así tendremos: $x = \frac{1}{2}z$

- Entonces la función vectorial que parametriza el plano $\mathcal{P}$ es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(y,z) \longmapsto \vec{r}(y,z) = \left(\tfrac{1}{2}z, y, z\right)$$
$$D = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 / y^2 + z^2 \leq 9 , z \geq 0 \}$$

EJEMPLO 3 Un sólido está limitado por el plano $\mathcal{P} : x - y + 4 = 0$, por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y el plano XZ. Parametrizar la parte del plano intersectado por el cilindro.

Solución:



- En el gráfico adjunto, el plano $\mathcal{P}$ se proyecta sobre el plano ZX. En este caso conviene despejar "y" de la ecuación $x - y + 4 = 0$, obteniéndose :

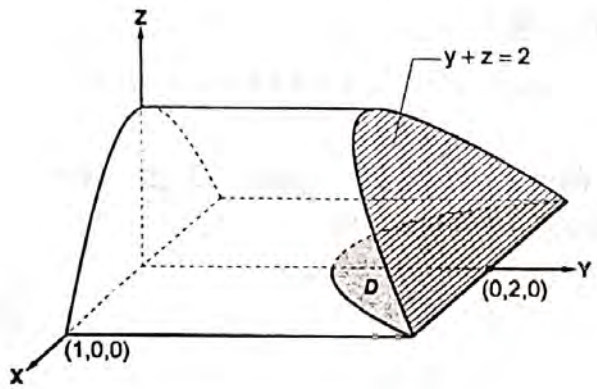
$$y = x + 4$$

- La función vectorial que parametriza el plano $\mathcal{P}$ es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(z,x) \longrightarrow \vec{r}(z,x) = (x , x + 4 , z)$$
$$D = \{ (z,x) \in \mathbb{R}^2 / z^2 + x^2 \leq 4 \}$$

EJEMPLO 4 Sea K un sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones : $z = 1 - x^2$ (cilindro parabólica) , $y + z = 2$ (plano) , $y = 0$ (plano XZ), $z = 0$ (plano XY).

Solución:



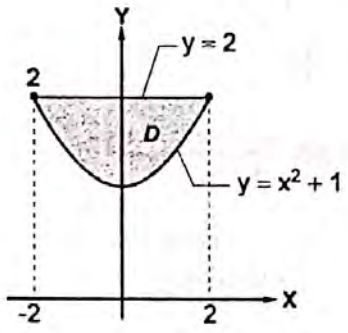
1) Conviene proyectar el plano $y + z = 2$ sobre el plano coordenado XY. Siendo así, conviene despejar "z" de la ecuación $y + z = 2$, obteniéndose $z = 2 - y$.

2) Entonces, la función vectorial que parametriza el plano $z = 2 - y$, es :

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}\,(x,y) = (x\ ,\ y\ ,\ 2 - y)$$

3) El dominio D de la función $\vec{r}$ es la PROYECCIÓN sobre el plano XY. Esta región se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} z = 2 - y \\ z = 1 - x^2 \end{cases}$$



Al igualar ambas ecuaciones se tiene :

$$2 - y = 1 - x^2 \iff x^2 = y - 1$$

Es una parábola en el plano XY.

4) La región D en $\mathbb{R}^2$ es :

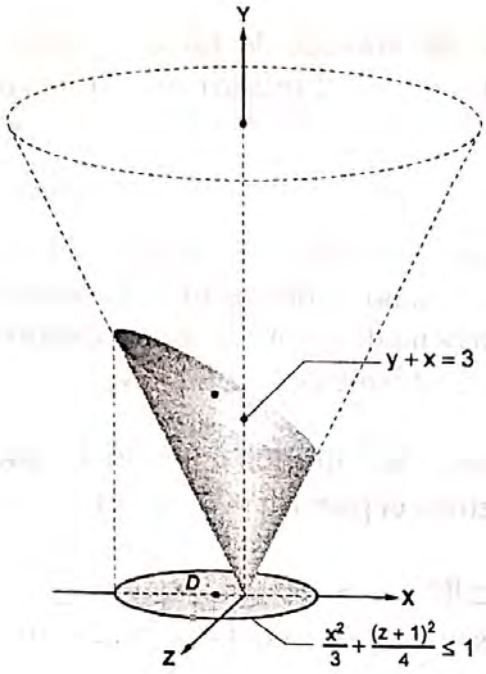
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 1 \le y \le 2\ ,\ -2 \le x \le 2\}$$

EJEMPLO 5 Un sólido K está limitado por el cono $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$ y por el plano $y + x = 3$.

Se pide parametrizar el plano limitado por el cono.

Solución:

- Por la forma del gráfico del sólido K, el plano $y + z = 3$ se proyecta sobre el plano cartesiano XZ.



En este caso despejar "y" en función de (x,z):

De $y+z=3 \Rightarrow y=3-z$

- La función vectorial que parametriza al plano $y=3-z$ es:

$$\vec{r}: D\subset IR^2 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,z) \longmapsto \vec{r}(x,z)=(x\,,\,3-z\,,\,z)$$

- La frontera de la región D se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y=2\sqrt{x^2+z^2} & .....(1) \\ y=3-z & .....(2) \end{cases}$$

Igualar (1) con (2) : $3-z=2\sqrt{x^2+z^2}$

Elevar al cuadrado : $9-6z+z^2 = 4\,(x^2+z^2)$

$$9 = 4x^2+3z^2+6z$$
$$9 = 4x^2+3\,(z^2+2z+\ldots)$$
$$3+9 = 4x^2+3\,(z^2+2z+1)$$
$$12 = 4x^2+3\,(z+1)^2 \iff \frac{x^2}{3}+\frac{(z+1)^2}{4}=1$$

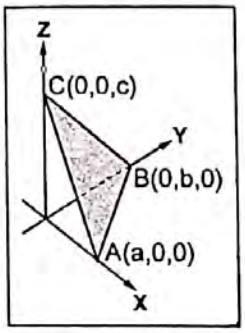
ELIPSE en el plano XZ

- **CONCLUSIÓN :**

$$\vec{r}: D\subset IR^2 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,z) \longmapsto \vec{r}\,(x,z)=(x\,,\,3-z\,,\,z)$$
$$D=\left\{ (x,z)\in IR^2 : \frac{x^2}{3}+\frac{(z+1)^2}{4}\le 1 \right\}$$

1.12 ALGUNOS TEMAS COMPLEMENTARIOS SOBRE PLANOS

1 Ecuación segmentaria del plano.

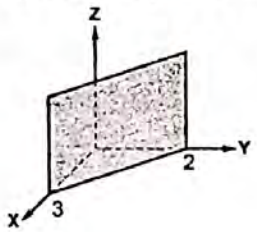


Si un plano $\mathcal{P}$ intersecta a los ejes coordenados X, Y, Z en los puntos A(a,0,0), B(0,b,0) y C(00,c), respectivamente, entonces la ecuación segmentaria del plano $\mathcal{P}$, es: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

2 Las ecuaciones incompletas del plano son:

a) $Ax + By + Cz = 0$, es un plano que pasa por el origen.

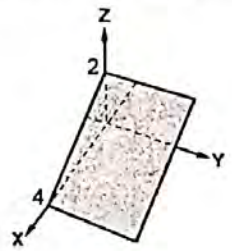
b) $Ax + By + D = 0$, es un plano perpendicular al plano XY.



Ejemplo:

$2x + 3y - 6 = 0$

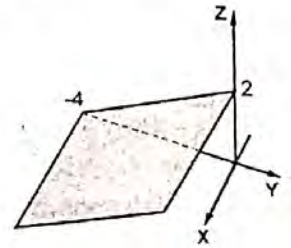
c) $Ax + Cz + D = 0$, es un plano perpendicular al plano XZ.



Ejemplo:

$x + 2z - 4 = 0$

d) $By + Cz + D = 0$, es un plano perpendicular al plano YZ.



Ejemplo:

$y - 2z + 4 = 0$

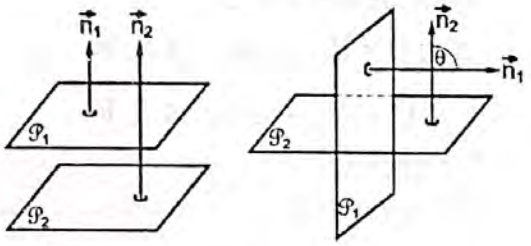
3 Relación entre dos planos: paralelismo y perpendicularidad.
Dados los planos:

$\mathcal{P}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

$\mathcal{P}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

a) Diremos que el plano $\mathcal{P}_1$ es paralelo al plano $\mathcal{P}_2$, si y sólo si, la normal $\vec{n}_1$ es paralelo a la normal $\vec{n}_2$. Esto es, $\vec{n}_1 = t\,\vec{n}_2$.

b) Diremos que el plano $\mathcal{P}_1$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}_2$, si y sólo si, la normal $\vec{n}_1$ es perpendicular a la normal $\vec{n}_2$. Esto es, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



4 Ángulo entre dos planos:
El ángulo entre dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ es el mismo que forman sus vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, respectivamente.
Si θ es el ángulo entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, se halla mediante la fórmula:

$$\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

5 Familia de Planos:
Una familia de planos $\mathcal{P}_\lambda$ que pasa por la intersección de los planos:

$\mathcal{P}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\mathcal{P}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

está dado por:

$\mathcal{P}_\lambda : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

para todo $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6 Distancia mínima de un punto a un plano.

- La distancia mínima de un punto exterior $Q_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$ a un plano $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$, está dado por la fórmula:

$$d(Q_0 , \mathcal{P}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.13 ALGUNOS TEMAS COMPLEMENTARIOS SOBRE RECTAS

1 Paralelismo y perpendicularidad de rectas. Dadas las ecuaciones vectoriales de dos rectas:

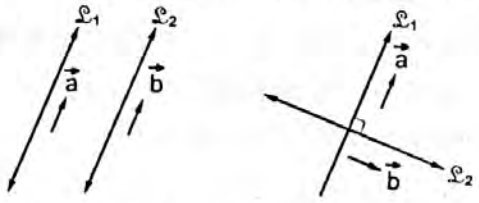
$\mathcal{L}_1 : P = P_0 + t\vec{a}$, $t \in IR$

$\mathcal{L}_2 : Q = Q_0 + s\vec{b}$, $s \in IR$

Diremos que:

a) $\mathcal{L}_1$ es paralelo a $\mathcal{L}_2$, si y sólo si, $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$; esto es $\vec{a} = k\vec{b}$ para un $k \in IR$.

b) $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a $\mathcal{L}_2$, si y sólo si, $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$; esto es, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



Nota: Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares, no necesariamente se cortan. Si no se ***cortan*** sólo se están cruzando (rectas alabeadas).

2 Ángulo entre dos rectas:

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores direcciones de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, que se cortan en un punto común, entonces el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, está dado por:

$$\theta = \arccos\left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$$

3 Números Directores y Ángulos Directores de una Recta.

Si: $\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ es un vector paralelo a la recta $\mathcal{L}$. y

α es el ángulo entre $\vec{a}$ y el eje X,

β es el ángulo entre $\vec{a}$ y el eje Y,

γ es el ángulo entre $\vec{a}$ y el eje Z,

Entonces:

i) Los números reales: a_1 , a_2 , a_3 se llaman ***números directores*** de $\mathcal{L}$.

ii) Los números reales: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se llaman ***cosenos directores*** de $\mathcal{L}$.

iii) α, β y γ se llaman ángulos directores de la recta $\mathcal{L}$.

iv) α, β y γ son los ángulos directores de una recta $\mathcal{L}$, si y sólo si, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4 Distancia mínima entre dos rectas alabeadas (rectas que se cruzan sin cortarse).

Si las rectas $\mathcal{L}_1 : P = P_0 + t\vec{a}$ y $\mathcal{L}_2 : Q = Q_0 + s\vec{b}$ no se cortan ni son paralelas, entonces la distancia mínima entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ está dada por:

$$d(\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2) = \frac{|(P_0 - Q_0) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

5 Distancia de un punto a una recta.

Sea Q_0 un punto exterior a la recta $\mathcal{L} : P = P_0 + t\vec{a}$. La distancia de Q_0 a $\mathcal{L}$ es el segmento perpendicular trazado del punto Q_0 a la recta $\mathcal{L}$ y se halla por la fórmula.

$$d(Q_0 , \mathcal{L}) = \|\overrightarrow{P_0 Q_0} - \text{Proy}_{\vec{a}} \overrightarrow{P_0 Q_0}\|$$

$$= \frac{|\vec{a} \times (P - P_0)|}{|\vec{a}|}$$

1.14 GRÁFICO DE SÓLIDOS EN EL ESPACIO R^3

1.14.1 Introducción

En el capítulo referente a las integrales triples, se necesita saber graficar los sólidos en IR^3, que son subconjuntos de IR^3 acotados (limitados) por las gráficas de las superficies en IR^3.

Algunas superficies conocidas son:

a) La esfera: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$, de centro (x_0, y_0, z_0) y radio a.

b) El cilindro circular de eje paralelo al eje z: $(x - z_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, centro (x_0, y_0), a = radio.

c) Las cuadráticas con centro son:

1. La elipsoide: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$
2. La hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
3. La hiperboloide de dos hojas: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
4. El cono: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

d) Las cuadráticas sin centro son:

1. El paraboloide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$
2. El paraboloide hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$

Algunas gráficas de sólidos y su representación en coordenadas cartesianas, coordenadas esféricas o coordenadas cilíndricas, se dan a continuación.

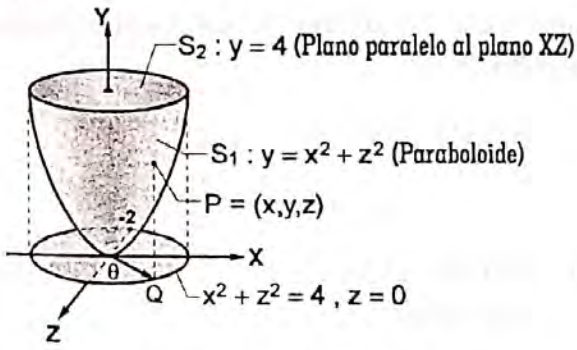
1.15 GRÁFICO DE SÓLIDOS Y SU EXPRESIÓN EN COORDENADAS ESFÉRICAS O CILÍNDRICAS

① Graficar el sólido K limitado por las superficies: $S_1 : y = x^2 + z^2$

$S_2 : y = 4$

Expresar el sólido K en coordenadas cilíndricas.

Solución:



Si el sólido K se proyecta sobre el PLANO XZ, en coordenadas cartesianas, es:

$$K = \{(x,y,z) \in IR^3 / x^2 + z^2 \le y \le 4,\ -\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2},\ -2 \le x \le 2\}$$

Si aplicamos las coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\,\text{sen}\,\theta \\ y = y \end{cases}, \quad x^2 + z^2 = r^2$$

a) $S_2 : y = 4$ se convierte en $y = 4$

b) $S_1 : y = x^2 + z^2$ se convierte en $y = r^2$
donde : $0 \le r \le 2$ (ver proyección sobre el plano xz)
$0 \le \theta \le 2\pi$

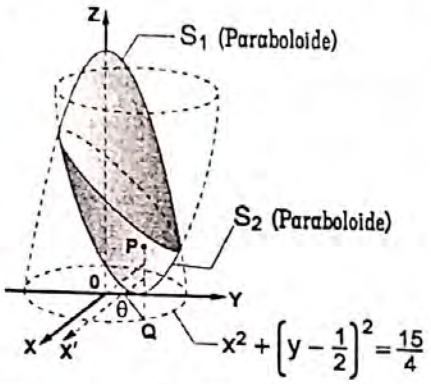
Entonces cada punto $P = (r,\theta,y)$ en coordenadas cilíndricas del sólido K, es:

$$K = \{ (r,\theta,y) / r^2 \le y \le 4,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

② Graficar el sólido K, limitado por las superficies: $S_1 : z = 8 - x^2 - y^2$
$S_2 : z = x^2 + (y-1)^2$

Expresar K en coordenadas cilíndricas :

Solución:



Conviene proyectar el sólido K sobre el plano XY. Necesitamos:

$$S_1 \cap S_2 : \; 8 - x^2 - y^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$\Longleftrightarrow \qquad x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{15}{4}$$

El sólido K en coordenadas rectangulares es:

$$K = \left\{ (x,y,z) : 8 - x^2 - y^2 \le z \le x^2 + (y-1)^2 \,, \; x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \le \tfrac{15}{4} \right\}$$

- Las coordenadas cilíndricas de un punto P son (r, θ, z).
- Si $\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$ es el polo, la transformación cilíndrica es: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y - \tfrac{1}{2} = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$
- Con esta transformación:

  S_1 se convierte en: $z = \tfrac{33}{4} - r^2 - r\,\text{sen}\,\theta$

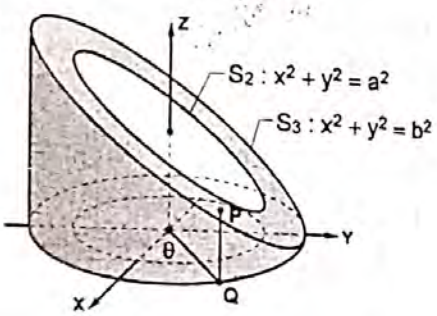
  S_2 se convierte en: $z = r^2 - r\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{3}{4}$

Luego, K en coordenadas cilíndricas es:

$$K = \left\{ (r,\theta,z) / r^2 - r\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{3}{4} \le z \le \tfrac{33}{4} - r^2 - r\,\text{sen}\,\theta \,, \; 0 \le r \le \tfrac{\sqrt{15}}{2} \,, 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

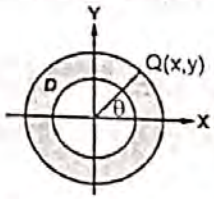
③ Graficar el sólido limitado por:
$S_1 : z = 0$, $S_2 : x^2 + y^2 = a^2$
$S_3 : x^2 + y^2 = b^2$, $S_4 : y + 2bz = b$;
donde: $0 < a < b$

Solución:



El sólido K es un tubo con hueco. Si el sólido K lo proyectamos cobre el plano XY obtenemos la región D.

- En este caso conviene aplicar las coordenadas cilíndricas.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

para transformar la ecuación:

$x^2 + y^2 = b^2$ en $r^2 = b^2 \Rightarrow r = b$
y $x^2 + y^2 = a^2$ en $r^2 = a^2 \Rightarrow r = b$

$S_4 : y + 2bz = b$ se convierte en:

$r\,\text{sen}\,\theta + 2bz = b \Rightarrow z = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2b} r\,\text{sen}\,\theta$

Entonces, el sólido K en coordenadas cilíndricas es:

$$K = \left\{ (r,\theta,z) / 0 \le z \le \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2b} r\,\text{sen}\,\theta \,, \; a \le r \le b \,, 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

④ Graficar el sólido K limitado por las superficies:

$S_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$S_2 : x^2 + y^2 + 2z - 8 = 0$
$S_3 : z = 0$ (Plano XY), que es interior a S_1.

Expresar el sólido K en coordenadas cilíndricas.

Solución:

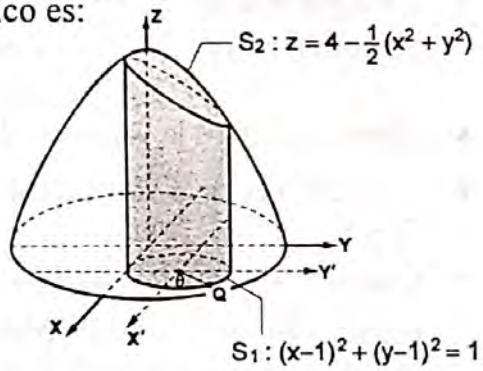
S_1 es un cilindro:

$$x^2 - 2x + \ldots + y^2 - 2y + \ldots = -1$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -1 + 1 + 1$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

S_2 es el paraboloide : $x^2 + y^2 = 8 - 2z$

donde $8 - 2z \geq 0 \iff z \leq 4$

El gráfico es:



En este sólido: el techo es S_2, el piso es el plano XY ($z = 0$) y la pared el cilindro S_1.

El sólido K en coordenadas cartesianas es:

$$K = \left\{(x,y,z)/0 \leq z \leq 4 - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2),\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

Si el polo es (1,1), la transformación cilíndrica es :

$$\begin{aligned} x - 1 &= r\cos\theta \\ y - 1 &= r\,\text{sen}\,\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

La ecuación de S_2 se convierte en :

$$z = 4 - \tfrac{1}{2}[(1 + r\cos\theta)^2 + (1 + r\,\text{sen}\,\theta)^2]$$

$$z = 3 - r(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) - \tfrac{r^2}{2}$$

Luego, K en coordenadas cilíndricas, es:

$$K = \left\{(r,\theta,z)/0 \leq z \leq 3 - r(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) - \tfrac{r^2}{2},\ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

⑤ Graficar el sólido limitado por las superficies:

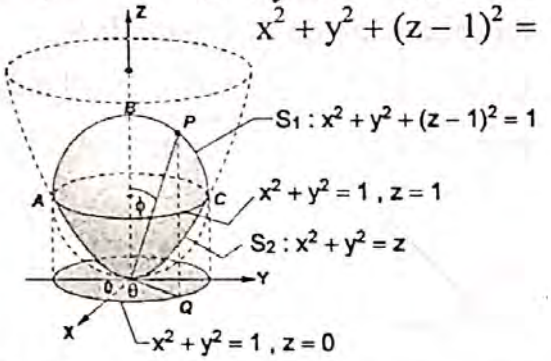
$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (esfera)

$S_2 : x^2 + y^2 = z$ (paraboloide)

tal que el sólido esté arriba de S_2. Expresar el sólido en coordenadas esféricas.

Solución:

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2z + \ldots = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1$$
$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$



- Las coordenadas esféricas de un punto P son (ρ,θ,ϕ) donde $\rho = \overrightarrow{OP}$, ϕ = ángulo entre eje Z y $\overrightarrow{OP}$, θ = ángulo entre el eje X y $\overrightarrow{OQ}$.

  La transformación en coordenadas esféricas es:

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Con esta transformación, la superficie

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ se convierte en:

$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$
$$\Rightarrow \quad \rho = 2\cos\phi$$

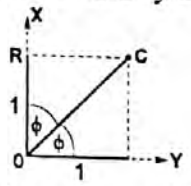
$S_2 : x^2 + y^2 = z$ se convierte en:

$$\rho^2\,\text{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}^2\theta = \rho\cos\phi$$
$$\Rightarrow \rho = \frac{\cos\phi}{\text{sen}^2\phi}$$

- Necesitamos intersectar S_1 con S_2: reemplazar S_2 en S_1:

$$z + z^2 = 2z \Rightarrow z^2 - z = 0$$
$$\Rightarrow z(z-1) = 0 \Rightarrow z = 1$$

- Para $z = 1$ se obtiene: $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$
- En la región: $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ contenido en el plano XY se observa la variación de θ: $0 \le \theta \le 2\pi$.
- El radio vector $\overrightarrow{OP}$ se mueve tocando parte de S_1 y parte de S_2.
- El ángulo ϕ varía de $\overrightarrow{OB}$ hasta el radio vector $\overrightarrow{OC}$ y desde $\overrightarrow{OC}$ hasta el eje Y.



$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces el sólido K expresado en coordenadas esféricas es la unión de dos regiones:

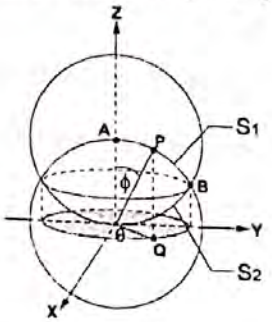
$$K = \left\{(\rho,\theta,\phi)/0 \le \rho \le 2\cos\phi, 0 \le \phi \le \tfrac{\pi}{4}, 0 \le 0 \le 2\pi\right\}$$
$$\cup \left\{(\rho,\theta,\phi)/0 \le \rho \le \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi}, \tfrac{\pi}{4} \le \phi \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le 0 \le 2\pi\right\}$$

⑥ Graficar el sólido K limitado por las esferas: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$,
$S_2 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.
Expresar K en coordenadas esféricas:

$|\overrightarrow{OP}| = \rho$

ϕ = ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OP}$

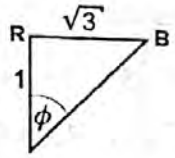
θ = ángulo entre el eje X y $\overrightarrow{OQ}$



- Las coordenadas esféricas de un punto P son (ρ,θ,ϕ) y la transformación esférica, tomando como polo el origen (0,0,0) es:

$$\begin{cases} x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \quad \text{Donde: } x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

- Con esta transformación, la superficie S_1 se convierte en: $\rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$.
- La superficie $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$
Se convierte en: $\rho^2 - 4\rho\cos\phi = 0$
$\rho = 4\cos\phi$
- Ahora, hallemos la variación de ϕ y θ.
- El radio vector $\overrightarrow{OP}$ recorre tocando S_1 y S_2.
- Cuando toca S_1, el ángulo ϕ varía desde $\overrightarrow{OA}$ hasta $\overrightarrow{OB}$, hallemos el punto B: sustituyendo la ecuación de S_1 en S_2. $4 - 4z = 0 \Rightarrow z = 1$
Si $z = 1$, en S_1 se obtiene: $x^2 + y^2 = 3$



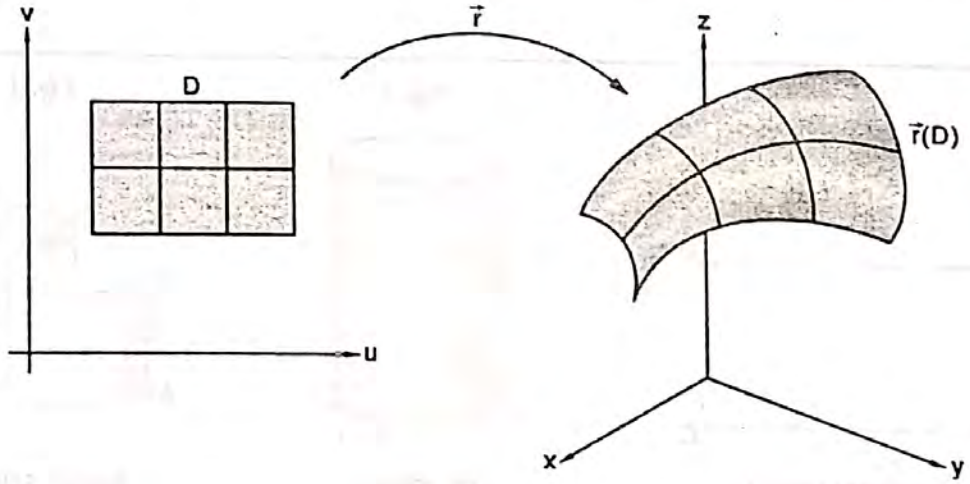
Entonces:
$$\operatorname{tg}\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$
Entonces: $0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}$

- Cuando $\overrightarrow{OP}$ toca S_2, el ángulo ϕ varía desde $\overrightarrow{OB}$ hasta el eje Y, esto es $\frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.
- Cuando $\overrightarrow{OP}$ barre todo S_1, entonces $0 \le \theta \le 2\pi$.
- Cuando $\overrightarrow{OP}$ barre todo S_2, entonces $0 \le \theta \le 2\pi$.
- ***Conclusión:*** el sólido K en coordenadas esféricas está dado por la unión de dos regiones.

$$K = \left\{(\rho,0,\phi)/0 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le \tfrac{\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$
$$\cup \left\{(\rho,0,\phi)/0 \le \rho \le 4\cos\phi, \tfrac{\pi}{3} \le \phi \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le 0 \le 2\pi\right\}$$

CAPÍTULO 2

SUPERFICIES



El estudio de una superficie S ($S \subset \mathbb{R}^3$) es muy importante porque en ella se puede construir una "geometría intrínseca" de S que será más rica e igual de interesante que la geometría euclideana del plano $\mathbb{R}^2$, con lo cual estamos familiarizados. Para hacer geometría en una superficie S, es necesario definir una función vectorial $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

La función $\vec{r}(u, v)$ se llama ***parametrización*** de la región $\vec{r}(D)$ en S.

Un amplio y delicado estudio de las superficies corresponde al curso de Geometría Diferencial.

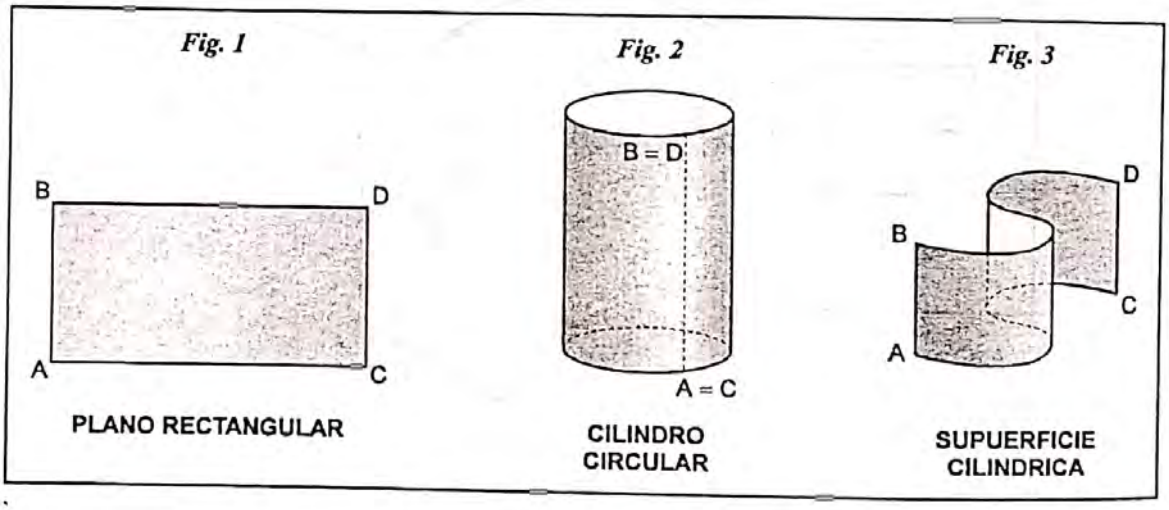
En este capítulo sólo desarrolláremos temas relativos a la discusión de la Gráfica de una ecuación $F(x, y, z) = 0$ y a las técnicas de parametrizar una superficie.

2.0 INTRODUCCIÓN

En el mundo que nos circunda hay muchos objetos que nos dan la idea de superficie.

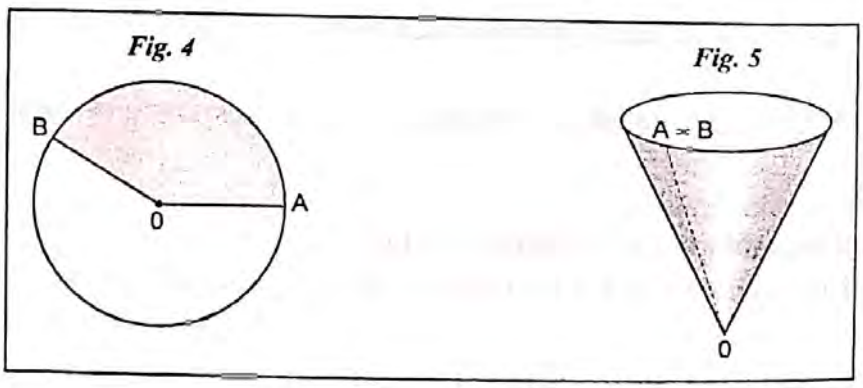
Ejemplos:

1) La hoja rectangular de un cuaderno, puesto en una mesa nos da la idea de una superficie plana o simplemente un plano rectangular. Si el plano rectangular ABDC de la fig. 1, la doblamos pegando el borde AB con el borde CD, obtenemos la fig.2, que es un cilindro circular. Si la superficie rectangular ABDC la deformamos como la fig. 3, obtenemos otra superficie cilíndrica.



2) Una pelota, nos da la idea de una superficie esférica.

3) Supongamos que en la superficie circular que aparece en la fig. 4, hacemos un corte por AOB, luego pegamos OA con OB, obtenemos otra superficie, llamado superficie cónica circular, que se puede ver en la fig. 5



4. El cascarón del huevo de una gallina nos da la idea de una superficie, llamado elipsoide.

Como estas superficies, hay otras más complicadas que para poder dibujarlas es necesario usar algún SOFTWARE MATEMÁTICO.

En este capítulo estudiaremos dos formas de expresar una superficie :

La primera, es la ecuación rectangular de una superficie S, que se expresa mediante una sola ecuación en tres variables, de la forma $F(x,y,z) = 0$.

Ejemplos: a) $x^2 + y^2 = z$
b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

La segunda, es la ecuación vectorial de una superficie S, que viene a ser la representación paramétrica de la superficie .

El orden de estudio que haremos, en esta primera parte, es el siguiente:

1. Definición de superficie y ecuación rectangular de tres variables: $F(x, y, z) = 0$
2. Discusión de la ecuación de una superficie.
3. Principales superficies.
   - 3.1 La superficie esférica. Coordenadas esféricas
   - 3.1 Ecuación de una superficie cilíndrica. Coordenadas cilíndricas.
   - 3.3 Ecuación de una superficie cónica.
   - 3.4 Superficies de revolución
   - 3.5 Superficie cuádrica.
     (Ecuación general de segundo grado con tres variables)
     A) Cuádricas con centro.
     B) Cuádricas sin centro

2.1 DEFINICIÓN DE SUPERFICIE

Haremos tres definiciones de superficie, de las cuales discutiremos la tercera definición.

Definición 1

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región conexa y

$$\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\mu, v) \longrightarrow \vec{r}(\mu, v) = \big(x(\mu, v), y(\mu, v), z(\mu, v)\big)$$

$$= x(\mu, v)\,\vec{i} + y(\mu, v)\,\vec{j} + z(\mu, v)\,\vec{k}$$

una aplicación continua. La imagen de la función $\vec{r}$ constituye una superficie. Es decir, el conjunto $S = \vec{r}(D)$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

La superficie S puede ser descrita, también, por medio de sus ecuaciones paramétricas.

$$S: \begin{cases} x = x(\mu, v) \\ y = y(\mu, v) \\ z = z(\mu, v) \end{cases} \qquad (\mu, v) \in D$$

Ejemplo 1 El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = a^2 \quad , a > 0\}$ es un cilindro circular recto, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$S: \begin{cases} x = a\cos\mu \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\mu \\ z = v \end{cases} \qquad (\mu, v) \in D$$

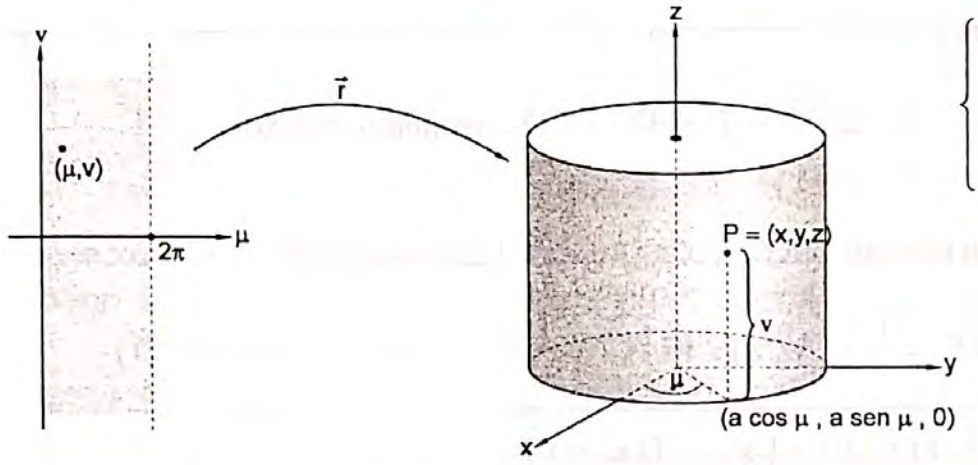
$$D = \{(\mu, v) / 0 \le \mu \le 2\pi, -\infty < v < +\infty\}$$

La aplicación vectorial de esta superficie, es:

$$\vec{r}(\mu, v) = (a\cos\mu, a\,\mathrm{sen}\,\mu, v)$$

$$(\mu, v) \in D = \{(\mu, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \mu < 2\pi \ , \ -\infty < v < +\infty\}$$

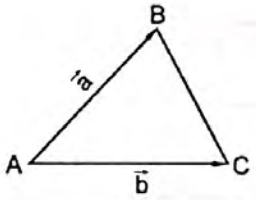
donde $S = \vec{r}(D) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = a^2\}$ es la superficie cilíndricamente circular de radio a.



$$\begin{cases} x = a\cos\mu \\ y = a\,\text{sen}\,\mu \\ z = v \end{cases}$$

Ejemplo 2 Dado tres puntos A = (−1 , 2 , 3), B = (4 , 5 , −1) y C = (2 , −3 , 1) hallar la representación paramétrica del triángulo ABC (PLANO TRIANGULAR).

Solución:



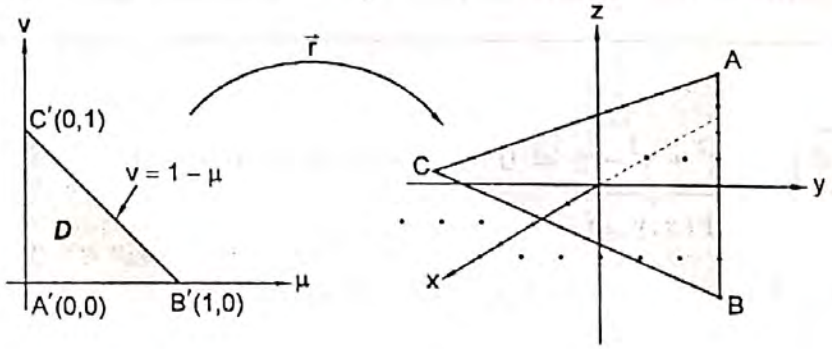
$$\vec{r}\,(\mu , v) = A + \mu\,\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$$

$$= (-1, 2, 3) + \mu\,(B - A) + v\,(C - A)$$

$$= (-1, 2, 3) + \mu\,(5, 3, -4) + v\,(3, -5, -2)$$

$$\vec{r}\,(\mu , v) = (-1 + 5\mu + 3v \;,\; 2 + 3\mu - 5v \;,\; 3 - 4\mu - 2v)$$

$$D = \{\, (\mu , v) \,/\, 0 \le \mu \le 1 \;,\; 0 \le v \le 1 - \mu \,\}$$



$\vec{r}\,(D)$ = es el plano triangular

Definición 2

Si $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, D = conjunto conexo
$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$

es una función continua en D, la **GRÁFICA** de f es una superficie, puesto que :

$$\text{Graf}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / z = f(x,y), (x,y) \in D \right\} = \vec{r}(D)$$

donde:

$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$	$(x,y) \in D$

Ejemplo 3 La ecuación $z = x^2 + y^2$ (paraboloide) se puede definir así

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2) \quad , \quad (x,y) \in D = \mathbb{R}^2$$

Definición 3

Si $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longrightarrow W = F(x,y,z)$

es una función continua entonces, el conjunto de nivel de la función F correspondiente al valor c, esto es $F(x,y,z) = c$, ***es una superficie.***

Ejemplo 4 $\underbrace{x^2 + y^2 - z}_{F(x,y,z)} = 0$, en este caso $c = 0$

La función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, es continua en todo $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 5 $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}_{F(x,y,z)} = 0$, es una esfera

Ejemplo 6

a) $x^2 + y^2 = a^2$ ..... *es un cilindro circular recto.*

b) $z = x^2 + y^2$ ..... *es un paraboloide.*

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ..... *es un cono.*

Nota: Las definiciones 1 y 2 de superficie es muy útil para el cálculo de integrales sobre superficies, para el cálculo de áreas de superficies y fundamentalmente para el estudio de superficies en el curso de **GEOMETRIA DIFERENCIAL.**

Para hacer un estudio ordenado, seguro y paulatino conviene empezar por el estudio de las superficies que están definidas por la función continua $F(x,y,z)$ tal que $F(x,y,z) = 0$

2.2 LA ECUACIÓN F(X,Y,Z) = 0

Discusión de la **GRAFICA DE LA ECUACIÓN** $F(x,y,z) = 0$

Para construir la gráfica de una superficie nos limitaremos a discutir 5 pasos :

1) Intersección con los ejes coordenados
2) Trazas sobre los planos coordenados.
3) Simetrías con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
4) Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.
5) Extensión de la superficie.

Ejemplo 1 Discutir y hacer la gráfica de la superficie cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$.

Solución:

1) **Intersección con los ejes coordenados :**

a) Con el eje X: se hace $y = z = 0$, obteniéndose $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
Entonces los puntos de intersección son : $(3, 0, 0)$, $(-3, 0, 0)$.

b) Con el eje Y: se hace $x = z = 0$, obteniéndose $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$.
Entonces los puntos de intersección son : $(0, 3, 0)$, $(0, -3, 0)$.

c) Con el eje Z: se hace $x = y = 0$, obteniéndose $-9z^2 = 9$.
Esta ecuación no tiene solución real, entonces la superficie no se intercepta con el eje Z.

2) **Trazas sobre los planos coordenados.** Son las curvas que se obtienen cuando se intersectan cada plano coordenado con la ecuación de la superficie $F(x,y,z) = 0$

ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$		
TRAZA CON EL PLANO:	**ECUACIÓN DE LA TRAZA**	**GRAFICA**
XY se hace : $z = 0$	$x^2 + y^2 = 9$	circunferencia **EN EL PLANO XY**
XZ se hace : $y = 0$	$x^2 - 9z^2 = 9$ $\frac{x^2}{9} - z^2 = 1$	hipérbola **EN EL PLANO XZ**
YZ se hace : $x = 0$	$y^2 - 9z^2 = 9$ $\frac{y^2}{9} - z^2 = 1$	hipérbola **EN EL PLANO YZ**

3) **Simetrías respecto a los planos coordenados, Ejes coordenados y el origen.**

a) Respecto a los planos coordenados

a_1) Con plano XY, se cambia z por $-z$: $x^2 + y^2 - 9(-z)^2 = 9$
$x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$

Como la ecuación no varía, afirmamos que existe simetría con el plano XY

a_2) Con plano XZ , se cambia y por $-y$: $x^2 + (-y)^2 - 9z^2 = 9$
$x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$

Como la ecuación no varía, afirmamos que existe simetría con el plano XZ

a_3) Con el plano YZ, se cambia x por $-x$: $(-x)^2 + y^2 - 9z^2 = 9$

Como la ecuación no cambia, afirmamos que existe simetría con el plano YZ

b) Respecto a los ejes. A partir de : $\underbrace{x^2 + y^2 - 9z^2 - 9}_{F(x,y,z)} = 0$, hacemos :

b_1) Con el eje X, se cumple : $F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$
Entonces, existe simetría con el eje X.

b_2) Con el eje Y, se cumple : $F(-x, y, -z) = F(x, y, z)$
Entonces, existe simetría con el eje Y

b_3) Con el eje Z, se cumple : $F(-x, -y, z) = F(x, y, z)$.
Entonces, existe simetría con el eje Z.

c) Respecto al origen, se cumple : $F(-x, -y, -z) = F(x, y, z)$.
Entonces, existe simetría respecto al origen.

4) **Secciones por planos paralelos a los planos coordenados** : son curvas que se obtienen al intersectar la superficie $F(x,y,z) = 0$ con planos paralelos a los planos coordenados. Se procede del siguiente modo :

SUPERFICIE : $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$

SOBRE EL PLANO	ECUACIÓN DE LA CURVA	GRAFICA
XY Se hace : $z = k$	$x^2 + y^2 - 9k^2 = 9$ $x^2 + y^2 = 9k^2 + 9$ $k \in IR$	Familia de circunferencias de radio $\sqrt{9k^2+9}$ **CONTENIDA EN EL PLANO** $z = k$
XZ Se hace : $y = k$	$x^2 + k^2 - 9z^2 = 9$ $x^2 - 9z^2 = 9 - k^2$ $k \in IR$	Familia de hipérbolas **CONTENIDA EN EL PLANO** $y = k$
YZ Se hace : $x = k$	$k^2 + y^2 - 9z^2 = 9$ $y^2 - 9z^2 = 9 - k^2$	Familia de hipérbolas **CONTENIDA EN EL PLANO** $x = k$

5) **Extensión de la superficie.**

Consiste en hallar los valores de las variables : x , y , z.
De la ecuación : $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$

a) Al despejar x, se obtiene : $x = \pm\sqrt{9 - y^2 + 9z^2}$

Donde : $x \in IR$, si y sólo si $9 - y^2 + 9z^2 \geq 0$

$$\boxed{y^2 - 9z^2 \leq 9}$$

es una región en el plano YZ encerrada por la hipérbola $y^2 - 9z^2 = 9$

b) Al despejar y, se obtiene : $y = \pm\sqrt{9 - x^2 + 9z^2}$

Donde : $y \in IR$, si y sólo si $9 - x^2 + 9z^2 \geq 0$

$$\boxed{x^2 - 9z^2 \leq 9}$$

es una región en el plano XZ encerrada por la hipérbola $x^2 - 9z^2 = 9$

c) Al despegar z, se obtiene : $Z = \pm\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

Donde : $z \in IR$, si y sólo si $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$

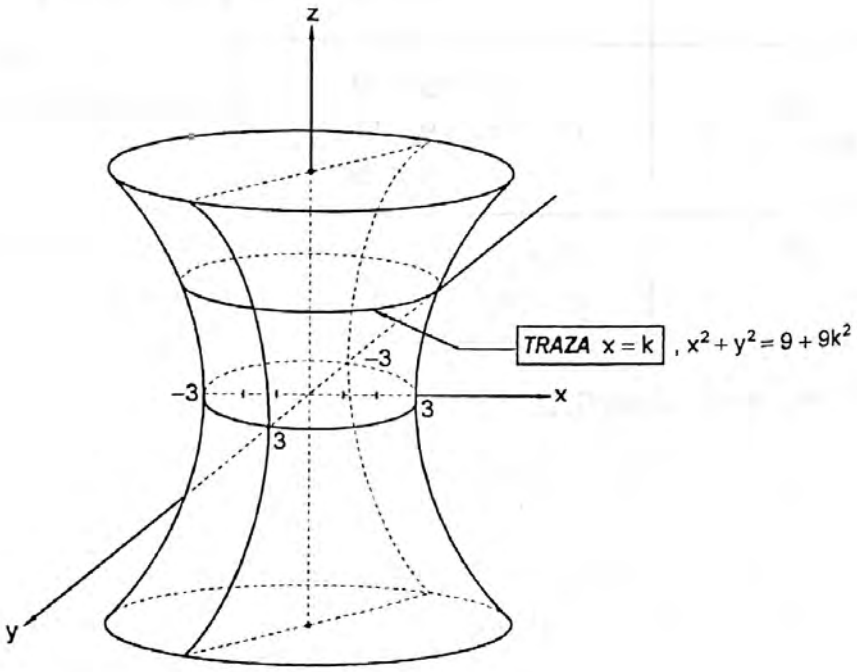
$$\boxed{x^2 + y^2 \geq 9}$$

es una región en el plano XY hacia afuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

A continuación graficar la superficie $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$ con la ayuda de la discusión hecha :

1° graficar los puntos de intersección con los ejes coordenados

2° graficar las trazas en cada plano



Ejemplo 2 Discutir y graficar la superficie $z = \frac{4x}{x^2+y^2}$

Solución:

1) Porque Z está expresada como función de (x,y), analicemos qué valores toman las variables (x,y) para que z sea real.

$Z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $(x,y) \neq (0,0)$

Esto es: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{4x}{x^2+m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4}{x(1+m^2)} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4}{x(Hm^2)} = -\infty$

2) Trazas sobre los planos coordenados :

a) Sobre el plano XY

Se hace $z = 0$, obteniéndose $0 = \frac{4x}{x^2+y^2}$

Del cual se obtiene $x = 0$, si $y \neq 0$

b) Sobre el plano XZ :

Se hace $y = 0$, obteniéndose $z = \frac{4x}{x^2}$

$\boxed{z = \frac{4}{x}}$ *hipérbola en el plano XZ*

c) Sobre el plano YZ :

Se hace $x = 0$, obteniéndose $z = \frac{0}{y^2}$

del cual se obtiene $z = 0$, si $y \neq 0$

3) Simetrías : analizar en la ecuación $\boxed{z = \frac{4x}{x^2+y^2}}$ —— (1)

a) Respecto al plano XY

Hacer el cambio $(x,y,-z)$: $-z = \frac{4x}{x^2+y^2}$ no es idéntico a (1). No existe

b) Respecto al plano XZ

Hacer el cambio $(x, -y, z)$: $z = \frac{4x}{x^2+(-y)^2}$ es idéntica a (1) . Existe.

c) Respecto al plano YZ

Hacer el cambio $(-x, y, z)$: $z = \frac{4(-x)}{(-x)^2+y^2}$ no es idéntico a (1). No existe

d) Respecto al eje X

Hacer el cambio : $(x,-y,-z)$: $-z=\frac{4x}{(-y)^2+x^2}$ No es idéntico a ①. No existe

e) Respecto al eje Y :

Hacer el cambio $(-x, y, -z)$: $-z=\frac{-4x}{(-x)^2+y^2} \iff z=\frac{4x}{x2+y2}$ es idéntico a ①. Existe.

f) Respecto al eje Z

Hacer el cambio $(-x, -y, z)$: $z=\frac{-4x}{(-x)^2+y^2}$ No es idéntico a ①. No existe.

g) Respecto al origen.

Hacer el cambio $(-x, -y, -z)$: $-z=\frac{-4x}{(-x)^2+(-y^2)} \iff z=\frac{4x}{x^2+y^2}$ es idéntico a ①. Existe.

4) Secciones por planos paralelos a los planos coordenados

a) Sobre el plano XY

Los planos $z=k$ cortan a la superficie en las curvas : $k=\frac{4x}{x^2+y^2}$

$\iff k(x^2+y^2)=4x \quad \longleftrightarrow \quad x^2-\frac{4}{k}x+y^2=0$

$\longleftrightarrow \quad x^2-\frac{4}{k}x+\frac{4}{k^2}+y^2=\frac{4}{k^2}$

$\longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{2}{k}\right)^2+y^2=\frac{4}{k^2}, \quad k\neq 0$

es una familia de circunferencias de centro en $(\frac{2}{k}, 0)$ y radio $\frac{2}{k}$.

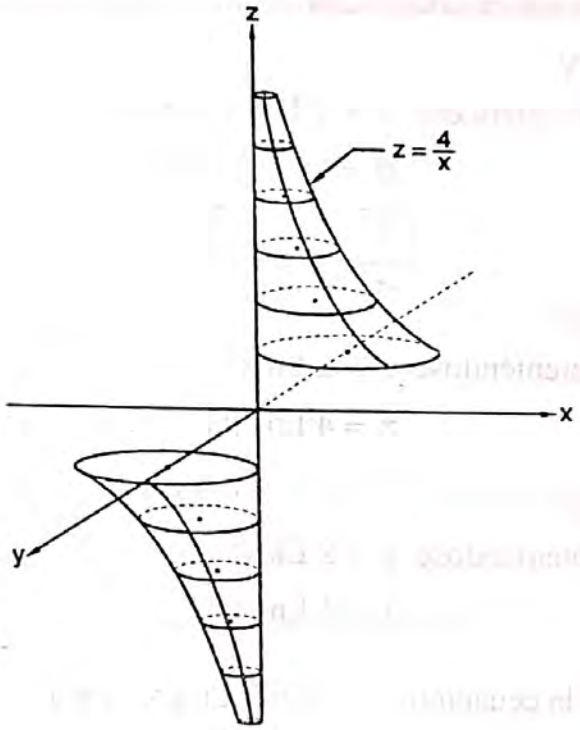
b) Sobre el plano XZ.

Los planos $y=k$ cortan a la superficie en las curvas $z=\frac{4x}{x^2+k^2}$

c) Sobre el plano YZ.

Los planos $x=k$ cortan a la superficie en las curvas $z=\frac{4k}{k^2+y^2}$

El gráfico es :



Ejemplo 3 Discutir y graficar $z = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + y^2)$

Solución :

Como z está expresado en función de (x,y) analicemos qué valores reales toman las variables x, y para que z sea real :

$$z \in \mathbb{R} \quad \text{si y sólo si} \quad x^2 + y^2 > 0 \iff (x,y) \in \mathbb{R} - \{(0,0)\}$$

1) **Intersección con los EJES coordenados de** $z = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + y^2)$

a) Con el eje X : Hacer $y = z = 0 \Rightarrow 0 = 2\,\text{Ln}\,(x^2)$

$x = 1 \;,\; x = -1$

b) Con el eje Y : Hacer $x = z = 0 \Rightarrow 0 = 2\,\text{Ln}\,y^2$

$y = 1 \;,\; y = -1$

c) Con el eje Z : Hacer $x = y = 0 \Rightarrow z = \text{Ln}\,(0)$. No existe.

2) **Trazas sobre los planos coordenados**

a) Sobre el plano XY

Hacer $z = 0$, obteniéndose $0 = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + y^2)$

$$0 = \text{Ln}\,(x^2 + y^2)$$

$$\boxed{1 = x^2 + y^2}$$

circunferencia.

b) Sobre el plano XZ

Hacer $y = 0$, obteniéndose $z = 2\,\text{Ln}\,x^2$

$$z = 4\,\text{Ln}\,|x|$$

c) Sobre el plano YZ

Hacer $x = 0$, obteniéndose $z = 2\,\text{Ln}\,y^2$

$$z = 4\,\text{Ln}\,|y|$$

3) **Simetrías** : Analizar la ecuación $z = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + y^2)$

a) Respecto al plano XY

Hacer el cambio $(x, y, -z)$: $-z = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + y^2)$. No existe

b) Respecto al plano XZ

Hacer el cambio $(x, -y, z)$: $z = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + (-y)^2)$. Existe

c) Respecto al plano YZ

Hacer el cambio $(-x, y, z)$: $z = 2\,\text{Ln}\,((-x)^2 + y^2)$. Existe.

d) Respecto al eje X

Hacer el cambio $(x, -y, -z)$: $-z = 2\,\text{Ln}\,(x^2 + (-y)^2)$. No Existe

e) Respecto al eje Y

Hacer el cambio $(-x, y, -z)$: $-z = 2\,\text{Ln}\,((-x)^2 + y^2)$. No Existe

f) Respecto al eje Z

Hacer el cambio $(-x, -y, z)$: $z = 2\,\text{Ln}\,((-x)^2 + (-y)^2)$. Existe

g) Respecto al origen

Hacer el cambio $(-x, -y, -z)$: $-z = 2\,\text{Ln}\,((-x)^2 + (-y)^2)$. No Existe

4) **Secciones por planos paralelos a los planos coordenados :**

a) Sobre el plano XY

Los planos $z = k$ cortan a la superficie en las curvas $k = 2 \operatorname{Ln}(x^2 + y^2)$

$$\boxed{e^{\frac{k}{2}} = x^2 + y^2}$$

familia de circunferencias de centro en (0,0) y radio $e^{k/4}$, $k \in \mathbb{R}$

Observación :

Cuando $k \geq 0$ el radio crece; pero si $k < 0$, el radio decrece.

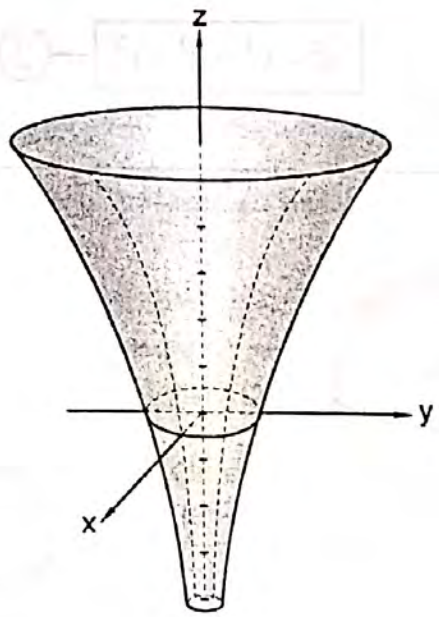
b) sobre el plano XZ

Los planos $y = k$ cortan a la superficie en las curvas $z = 2 \operatorname{Ln}(x^2 + k^2)$

c) Sobre el plano YZ

Los planos $x = k$ cortan a la superficie en las curvas $z = 2 \operatorname{Ln}(k^2 + y^2)$

El gráfico es :



2.3 PRINCIPALES SUPERFICIES

2.3.1 La Superficie Esférica

Definición.

La superficie esférica, es el lugar geométrico de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que equidistan de un punto fijo (h,k,ℓ). La distancia constante se llama **radio** y el punto fijo **centro**.

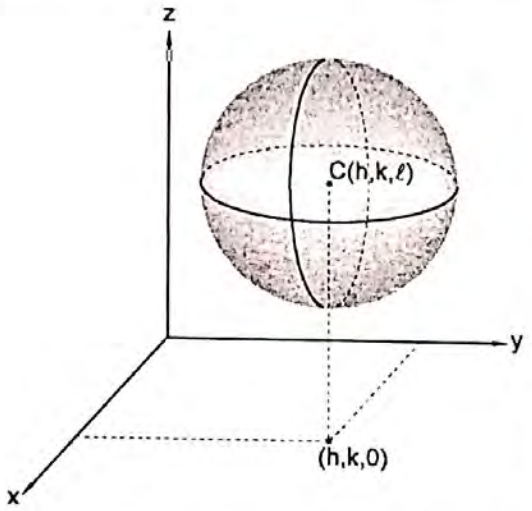
TEOREMA La ecuación de la superficie esférica cuyo centro es el punto (h,k,ℓ). y cuyo radio es la constante r es :

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2=r^2 \qquad (1)$$

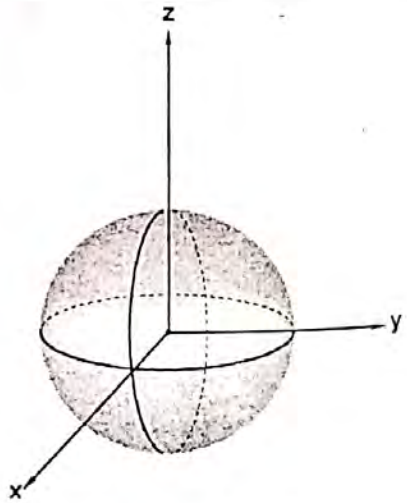
Forma ordinaria de la ecuación de la esfera.

COROLARIO La superficie esférica cuyo centro es el origen $(0,0,0)$ y cuyo radio es la constante r tiene por ecuación.

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (2)$$



$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2=r^2$



$x^2+y^2+z^2=r^2$

Si desarrollamos la ecuación 1 obtenemos :

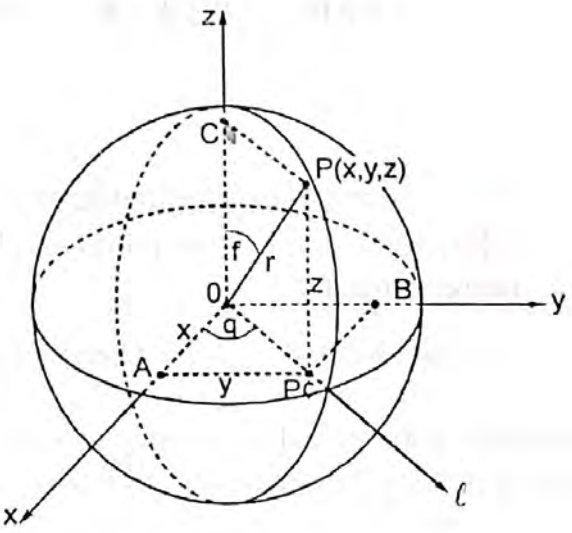
$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0 \quad (3)$$

Forma general de la ecuación de la esfera.

OBSERVACIÓN : La ecuación 3 se convierte en ecuación 1 completando cuadrados

Coordenadas Esféricas: (r, ϕ, θ)

A partir de un punto $P(x,y,z)$ de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ vamos a obtener un nuevo sistema de coordenadas llamado **"COORDENADAS ESFÉRICAS"**.



Proceder del siguiente modo :

Proyectar el punto P sobre el plano XY obteniéndose el punto $P'(x,y,0)$. Debemos hallar una relación trigonométrica entre las coordenadas (x,y,z) de P con los ángulos θ y ϕ . Se tiene :

$|\overline{BP'}| = |\overline{OA}| = x$

$|\overline{AP'}| = |\overline{0B}| = y$

$|\overline{P'P}| = |\overline{OC}| = z \quad , \quad |\overline{OP'}| = |\overline{CP}|, |\overline{OP}| = r$

En el triángulo rectángulo OAP', recto en A, se tiene :

$x = |\overline{OP'}| \cos\theta$ ..... (1)

$y = |\overline{OP'}| \operatorname{sen}\theta$ ..... (2)

En el triángulo rectángulo OCP, recto en C, se tiene :

$|\overline{CP}| = |\overline{OP'}| = r \operatorname{sen}\phi$ ..... (3)

$|\overline{OC}| = z = r\cos\phi$ ..... (4)

Reemplazando (3) en (1) y (2) obtenemos :

$$\begin{cases} x = r\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad r \geq 0 \ , \ 0 \leq \phi < \pi \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi$$

TEOREMA Las coordenadas rectangulares (x,y,z) y las coordenadas esféricas (r,ϕ,θ) de un punto en el espacio IR^3 están ligadas por las relaciones.

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \ , \ y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \ , \ z = r\cos\phi$$

Las transformaciones entre los dos sistemas coordenados pueden efectuarse por medio de estas ecuaciones y las siguientes relaciones obtenidas de ellas :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \ \phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ , \ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Las variaciones para r, ϕ y θ están dadas por los intervalos $r > 0$, $0 \leq \phi < \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

COROLARIO La ecuación vectorial de una esfera de radio ρ y centro en el origen $(0,0,0)$, es :

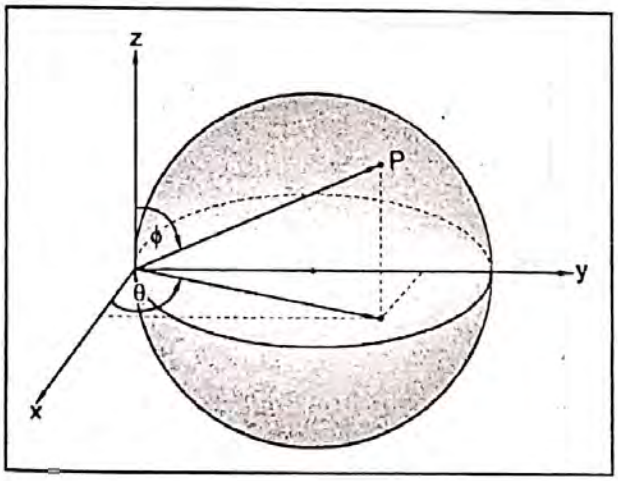
$$\vec{r}(\mu, v) = (\rho \operatorname{sen} v \cos\mu, \rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen}\mu, \rho \cos v)$$
$$0 \le v < \pi \quad , \quad 0 \le \mu < 2\pi$$

Las variables μ, v se llaman parámetros.

OBSERVACIÓN: La ecuación vectorial de una esfera es muy útil para aplicar en las integrales de superficie y para hacer estudios en la Geometría Diferencial.

Ejemplo 1 La ecuación rectangular de una superficie esférica es $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$. Hallar la ecuación en coordenadas esféricas.

Solución:



$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2} = 4y$$
$$= 4 r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

$$r = 4 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \phi \le \pi$$

Ejemplo 2 Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares de superficies a coordenadas esféricas :

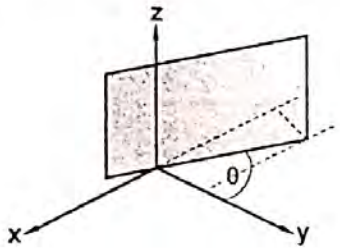
a) $x + 4y = 0$
b) $y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 4$
d) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$
e) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Solución:

a) $x + 4y = 0$

Aplicar : $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$



$x + 4y = 0$ es un plano perpendicular al plano XY

De $x + 4y = 0$

$$4y = -x$$

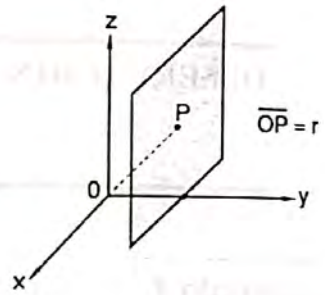
$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

b) $y - 2 = 0$

$r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta - 2 = 0$

$$\boxed{r = 2 \csc\phi \csc\theta \quad | \quad 0 < \phi < \pi \ , \ 0 < \theta < \pi}$$



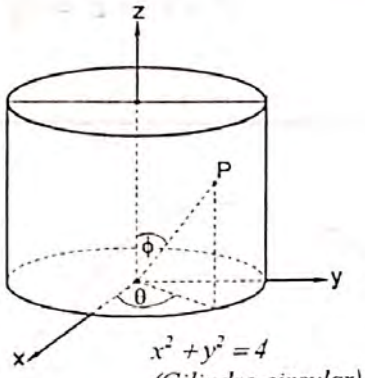
c) $x^2 + y^2 = 4$

$r^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta = 4$

$r^2 \operatorname{sen}^2\phi (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 4$

$r^2 \operatorname{sen}^2\phi = 4 \iff r \operatorname{sen}\phi = 2$

$$\therefore \quad \boxed{r = 2 \csc\phi \quad | \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 < \phi < \pi \end{matrix}}$$



$x^2 + y^2 = 4$
(Cilindro circular)

d) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$

$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2} + z^2 = 4$

$r^2 + r^2 \cos^2\phi = 4$

$r^2 (1 + \cos^2\phi) = 4$

$$r = \frac{2}{\sqrt{1 + \cos^2\phi}} \ , \quad 0 \le \phi < \pi \ , \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

e) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

sumar z^2 : $x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = z^2$

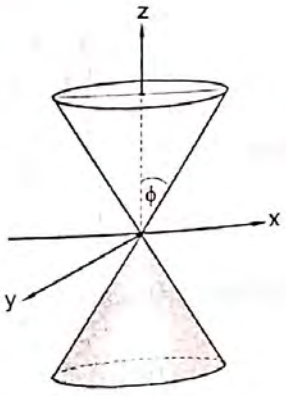
$r^2 = 2z^2$

$r^2 = 2r^2 \cos^2\phi$

$\frac{1}{2} = \cos^2\phi$

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{4}}$$ *es un cono*

y $$\boxed{\phi = \frac{3\pi}{4}}$$



2.3.2 Ecuación de una Superficie Cilíndrica

Introducción. Antes de deducir la ecuación de una superficie cilíndrica, veamos algunos ejemplos prácticos y fáciles de graficar en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Hay dos tipos de cilindros :

a) Cilindros rectos (de generatriz perpendicular al plano coordenado que contiene a la directriz)

b) Cilindros inclinados (de generatriz que no es paralelo a los ejes cordenados)

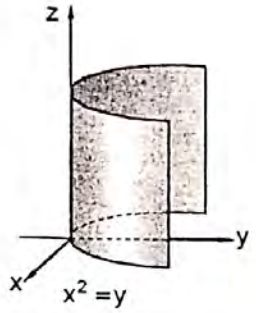
a) EJEMPLOS GRAFICOS DE SUPERFICIES CILINDRICOS RECTOS.

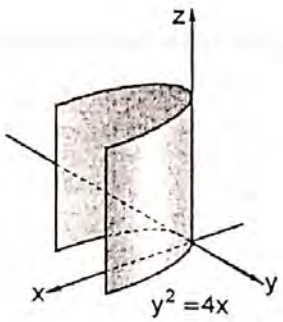
El gráfico de toda ecuación con dos variables contenidas en cada plano coordenado, es una superficie cilíndrica recto.

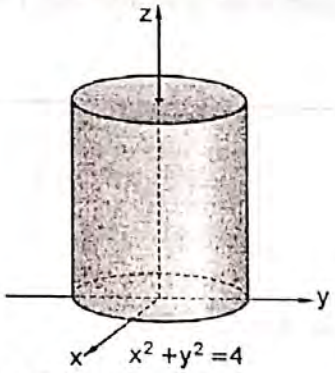
a_1) En el plano XY, las ecuaciones :

1) $x^2 = y$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $x^2 + y^2 = 4$; 4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

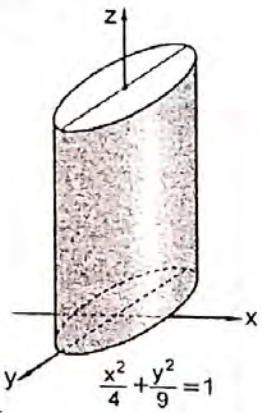
5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 6) $y = \text{sen } x$, ... etc. son superficies cilíndricas perpendiculares al plano XY (de generatriz paralelo al eje z)



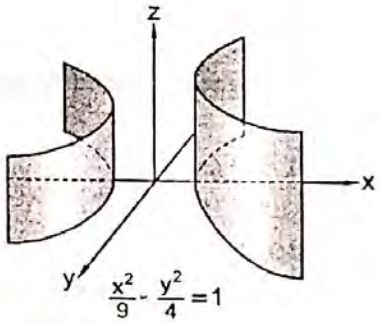




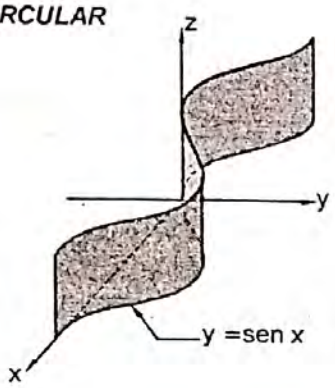
CILÍNDRO CIRCULAR



CILÍNDRO ELÍPTICO



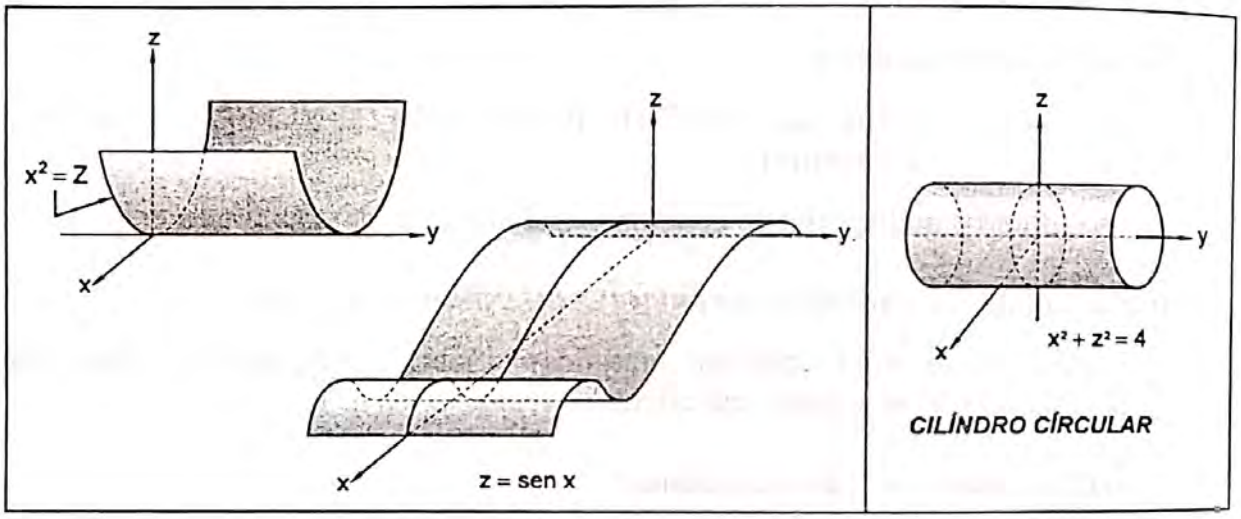
CILÍNDRO HIPERBÓLICO



a_2) En el plano XZ, las ecuaciones :

1) $x^2 = z$; 2) $z = \text{sen } x$; 3) $x^2 + z^2 = 4$

también son superficies cilíndricas rectos de generatriz perpendicular al plano XZ

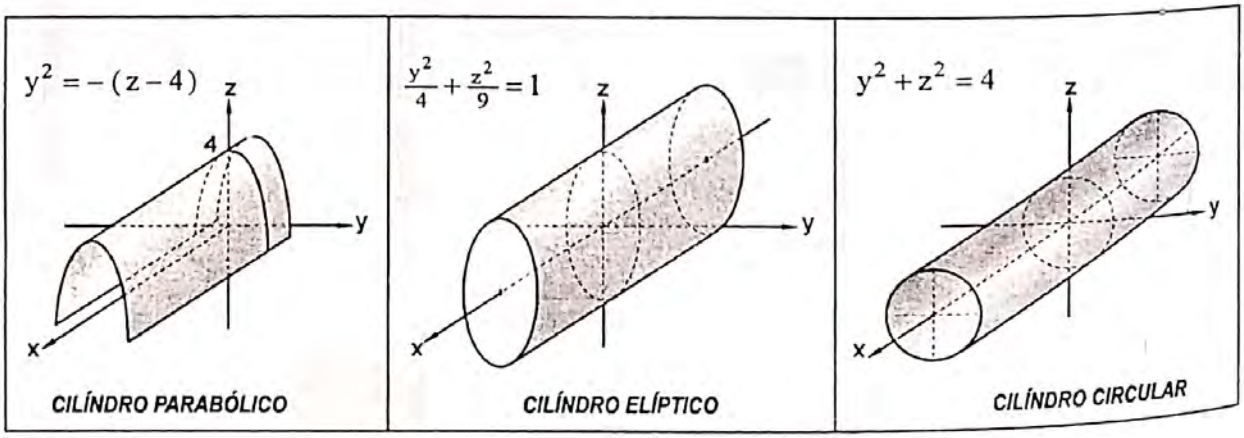


CILÍNDRO CÍRCULAR

a_3) En el plano YZ, las ecuaciones:

1) $y^2 = 4 - z$; 2) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; 3) $y^2 + z^2 = 4$

Son superficies cilíndricas rectos de generatriz perpendicular al plano YZ.



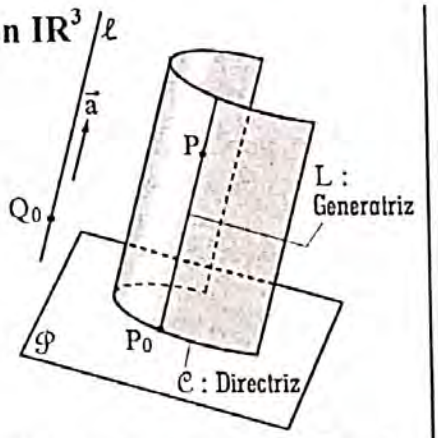
CILÍNDRO PARABÓLICO

CILÍNDRO ELÍPTICO

CILÍNDRO CIRCULAR

TEOREMA Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y solamente si carece de la variable no medida en ese plano. El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.

b) Cilindros en $\mathbb{R}^3$



Sea $\mathcal{C}$ una curva contenida en el plano $\mathcal{P}$ y ℓ una recta no paralela al plano $\mathcal{P}$.

Definición : Un ***cilindro*** de ***directriz*** $\mathcal{C}$ y ***eje*** ℓ, es el conjunto de todas las rectas L que pasan por la curva $\mathcal{C}$ y son paralelas al eje ℓ.

ECUACIÓN DEL CILINDRO :

Sea $\ell : Q = Q_0 + s\,\vec{a}$, $s \in \mathbb{R}$ el **EJE** del cilindro. Un punto P(x,y,z) pertenece al cilindro, si cumple :

1) $P = P_0 + t\,\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ **2)** $P_0 \in \mathcal{C}$

Eliminando el parámetro t y P_0 de (1) y (2) se obtiene una relación $f(x,y,z) = 0$, que es la ecuación cartesiana del cilindro.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación cartesiana del cilindro con directriz

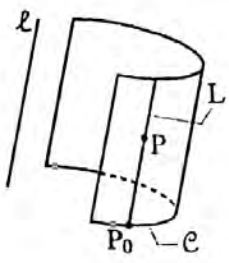
$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - 4z^2 = 16 \\ y = 2 \end{cases}$$

y generatrices paralelas a la recta

$$\ell : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \longrightarrow \vec{n}_1 = (1,2,3) \\ 3x - 2y = 0 \longrightarrow \vec{n}_2 = (3,-2,0) \end{cases}$$

Solución :

Se trabaja con la ecuación de la generatriz L y la directriz $\mathcal{C}$.



- Sea P(x,y,z) un punto del cilindro.
- Como $L \parallel \ell \Rightarrow L: P = P_0 + t\,\vec{a}$; donde :

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,2,3) \times (3,-2,0) = (6,9,-8)$$

Entonces L: $P = P_0 + t(6,9,-8)$ ... (1)

- Si :

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4z_0 = 16 \ \ldots\ldots (2) \\ y_0 = 2 \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- De (1) se obtiene :

$$\begin{cases} x = x_0 + 6t \ \ldots\ldots (4) \\ y = y_0 + 9t \ \ldots\ldots (5) \\ z = z_0 - 8t \ \ldots\ldots (6) \end{cases}$$

- Usando las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) se halla x_0 y z_0 en términos de x, y, z para luego reemplazar en (2). Así :

(3) en (5) : $y = 2 + 9t \Rightarrow t = \frac{y-2}{9}$ ... (7)

- (7) en (4) y (6) : $\begin{cases} x = x_0 + 6\left(\frac{y-2}{9}\right) \\ z = z_0 - 8\left(\frac{y-2}{9}\right) \end{cases}$
- Despejar x_0 y z_0 :

$$x_0 = \frac{9x - 6y - 12}{9} \ , \ z_0 = \frac{9z + 8y - 12}{9}$$

- Reemplazar en (2) :

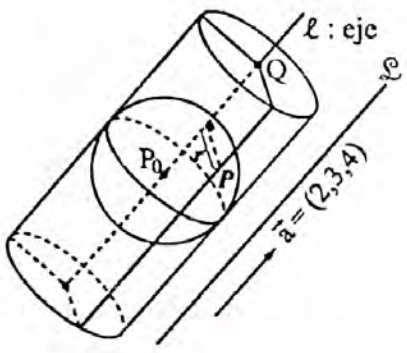
$$\left(\frac{9x - 6y - 12}{9}\right)^2 - 4\left(\frac{9z + 8y - 16}{9}\right)^2 = 16$$

$$9(3x - 2y + 4)^2 - 4(9z + 8y - 16)^2 = 81 \times 16$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación cartesiana del cilindro circular recto que tiene eje paralelo a la recta $\mathcal{L} : Q = t(2,3,4)$, $t \in \mathbb{R}$ y es tangente a la esfera $E : (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 9$

Solución :



Se pide hallar la ecuación cartesiana del cilindro recto, donde su eje ℓ es paralelo a $\mathfrak{L}$ y es tangente a la esfera E.

- El eje ℓ pasa por el punto $P_0(2,-4,5)$ de la esfera E y su vector dirección es $\vec{a}=(2,3,4)$ porque $\ell // \mathfrak{L}$. Entonces la ecuación de ℓ es $\ell : (Q-P_0)\times\vec{a}=\vec{O}$.
- El radio de la esfera E es $r=3$.
- Si $P=(x,y,z)$ es el punto genérico del cilindro y la esfera E es tangente al cilindro, entonces el cilindro es el conjunto de puntos P, tal que:

$$d(P,\ell)=r$$

$$\frac{\|(P-P_0)\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}=3$$

$$\frac{\sqrt{(4y-3z+3)^2+(2z-4x-2)^2+(3x-2y-14)^2}}{\sqrt{29}}=3$$

$$(4y-3z+3)^2+(2z-4x-2)^2+(3x-2y-14)^2=261$$

Ejemplo 3

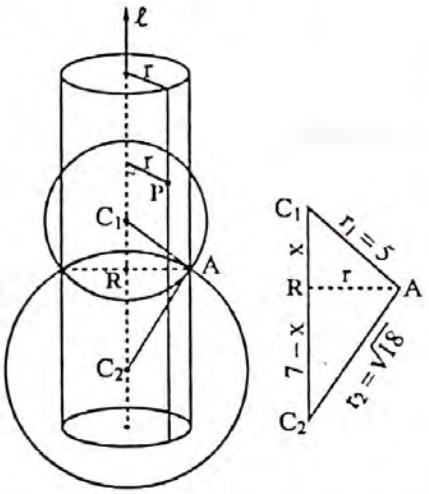
Hallar la ecuación del cilindro circular recto que tiene curva de base en la intersección de las esferas :

$x^2+y^2+z^2=25$ y

$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{14}{3}\right)^2+\left(z-\frac{14}{3}\right)^2=18$

Solución :

Esbozar el gráfico :



Necesitamos el radio r del cilindro y la ecuación del eje del cilindro ℓ. Si $P=(x,y,z)$ es el punto generador del cilindro, entonces el cilindro es el conjunto de puntos P tales que :

$$d(P,\ell)=r \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

i) Como ℓ pasa por los centros de dos circunferencias:

$C_1=(0,0,0)$ y $C_2=\left(-\frac{7}{3},\frac{14}{3},\frac{14}{3}\right)$.

- Su vector dirección es:
  $\vec{a}=C_2-C_1=\left(-\frac{7}{3},\frac{14}{3},\frac{14}{3}\right)$,
  eligiendo como punto de paso el centro $C_1=(0,0,0)$, la ecuación de ℓ, es : $\ell : (Q-C_1)\times\vec{a}=\vec{O}$
- Para hallar el radio r del cilindro necesitamos $\|\overline{C_1C_2}\|=7$
  Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ARC_1 y ARC_2, respectivamente :

$$\begin{cases} x^2+r^2=25 \\ (7-x)^2+r^2=18 \end{cases}$$

  Al resolver el sistema obtenemos $r=3$.
- Reemplazar en (1) : $\frac{\|(P-C_1)\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}=3$
  Se obtiene :
  $4(y-z)^2+(2x+z)^2+(2x+y)^2=81$

Ejemplo 4

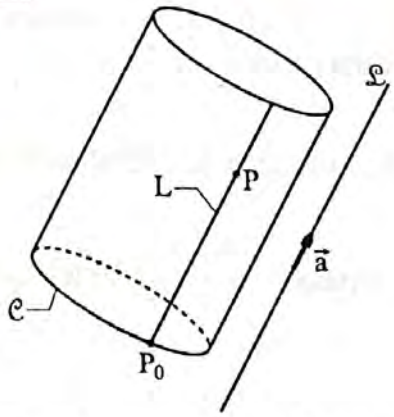
Hallar la ecuación cartesiana del cilindro cuya generatriz es paralela a la recta.

$$\mathfrak{L}:\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 3z+2y=7 \end{cases}$$

y su curva directriz es la circunferencia :

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6z=0 \\ 2x-3y+2z=7 \end{cases}$$

Solución :



Se necesitan: la ecuación de la generatriz L y la ecuación de la directriz $\mathcal{C}$.

Sea $P=(x,y,z)$ un punto genérico del cilindro.

i) La ecuación de la generatriz L, es :

$L: P = P_0 + t\vec{a}$

donde : $\vec{a} = (3,2,0)\times(0,2,3)$

$= 3(2,-3,2)$

Entonces: $L: \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{-3} = \frac{z-z_0}{2}$ ... (1)

ii) Si $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertenece a la directriz, entonces :

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 6z_0 = 0 \ \ldots\ldots (2) \\ 2x_0 - 3y_0 + 2z_0 = 7 \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

De (3) se despeja z_0 :

$z_0 = \frac{1}{2}(7 - 2x_0 + 3y_0)$ y reemplazar en (1) para obtener x_0 y y_0 en términos de x, y, z. Veamos :

iii) $\frac{x-x_0}{2} = \frac{z-\frac{1}{2}(7-2x_0+3y_0)}{2}$

$\Rightarrow -4x_0 + 3y_0 = -7 + 2z - 2x$ ... (4)

iv) $\frac{y-y_0}{-3} = \frac{z-\frac{1}{2}(7-2x_0+3y_0)}{2}$

$\Rightarrow 6x_0 - 13y_0 = 21 - 6z - 4y$ ... (5)

- Resolver el sistema de ecuaciones formada por (4) y (5), obteniéndose :

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{17}(6x + 8y + 6z - 21) \ \ldots\ldots (6) \\ x_0 = \frac{1}{17}(13x + 6y - 4z + 14) \ldots\ldots (7) \end{cases}$$

Reemplazando (6) y (7) en z_0 :

$z_0 = \frac{1}{2}[7 - 2(\ldots) + 3(\ldots)]$

$z_0 = \frac{1}{17}(-4x + 6y + 13z + 55) \ldots\ldots (8)$

- Reemplazar (6), (7) y (8) en (2) :

$$\left[\tfrac{1}{17}(13x+6y-4z+14)\right]^2 + \left[\tfrac{1}{17}(6x+8y+6z-21)\right]^2 + \left[\tfrac{1}{17}(-4x+6y+13z+55)-3\right]^2 = 9$$

PROBLEMAS

En cada uno de los ejercicios de 1 al 5, se dan las ecuaciones de la directriz y los vectores que son paralelos a las generatrices de una superficie cilíndrica. Hallar la ecuaciones de la superficie y graficarlas.

1) $x^2 = 4y$, $z = 0$; $(1,1,3)$
2) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $(2,1,-1)$
3) $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$, $(0,2,-1)$
4) $x^2 + y = 1$, $z = 0$, $(2,0,1)$
5) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$, $(4,1,0)$

Respuestas:

1) $9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0$
2) $x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 1 = 0$
3) $x^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 1 = 0$
4) $x^2 + 4z^2 - 4xz + y - 1 = 0$
5) $4x^2 + 64y^2 + z^2 - 32xy + 4z = 0$

Ejemplo 5 Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$ representa una superficie cilíndrica, y hallar las ecuaciones de su directriz y el vector dirección de sus generatrices.

Solución:

En la ecuación: $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$ elegir, de entre los productos de dos variables, la variable común.

En este caso, de los productos $2xz$ y $4yz$, elegir z y hacer $\boxed{z = k}$, obteniéndose:

$$x^2 + y^2 + 5k^2 + 2kx + 4ky - 4 = 0$$

Asociar, adecuadamente y completar cuadrados :

$$x^2 + 2kx + \ldots + y^2 + 4ky + \ldots = 4 - 5k^2$$

$$\underbrace{x^2 + 2kx + k^2} + \underbrace{y^2 + 4ky + 4k^2} = 4 - 5k^2 + k^2 + 4k^2$$

$$\boxed{(x + k)^2 + (y + 2k)^2 = 4 \quad , \quad z = k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es una familia de circunferencias contenidas en el plano $z = k$. El plano $z = k$ es una sección paralela al plano XY. En particular, si $z = 0$ (que es el plano XY), obtenemos la

DIRECTRIZ : $\boxed{x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad z = 0}$ ..... (2)

La recta que une el centro $(-k , -2k , k)$ de cualquiera de las circunferencias de (1) y el centro $(0, 0, 0)$ de (2) es paralela a las generatrices.

Pero $(-k , -2k , k) = -k\,(1 , 2 , -1)$, $k \in \mathbb{R}$, entonces $(-1 , -2 , 1)$ es el vector dirección de las generatrices.

PROBLEMAS

En cada uno de los ejercicios de 1 al 3, demuestre que la ecuación dada representa una superficie cilíndrica, y hállese las ecuaciones de su directriz y los vectores dirección de sus generatrices. Graficar la superficie.

1. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$
2. $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$
3. $xz + 2yz - 1 = 0$

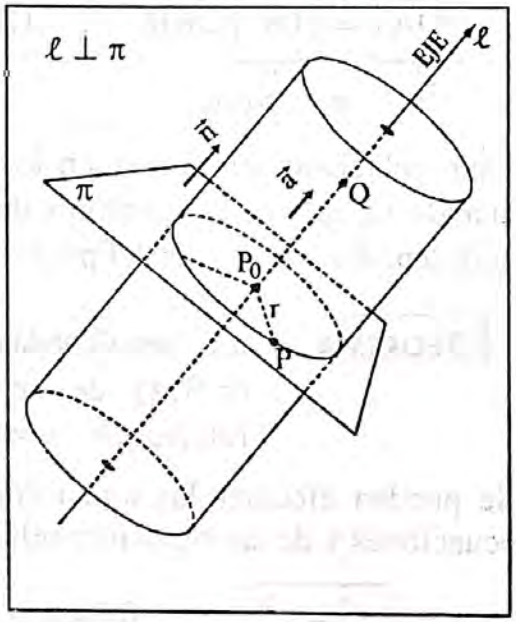
Solución:

1. $x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad (-1 , 1 , 1)$
2. $2y^2 + z^2 = 2 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad (1 , 2 , 3)$
3. $xy = 1 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad (2 , -1 , 0)$

2.3.2.1 Coordenadas Cilíndricas

A. CILINDRO CIRCULAR RECTO

Un cilindro circular recto, es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ equidistantes de una recta fija llamada eje del cilindro.



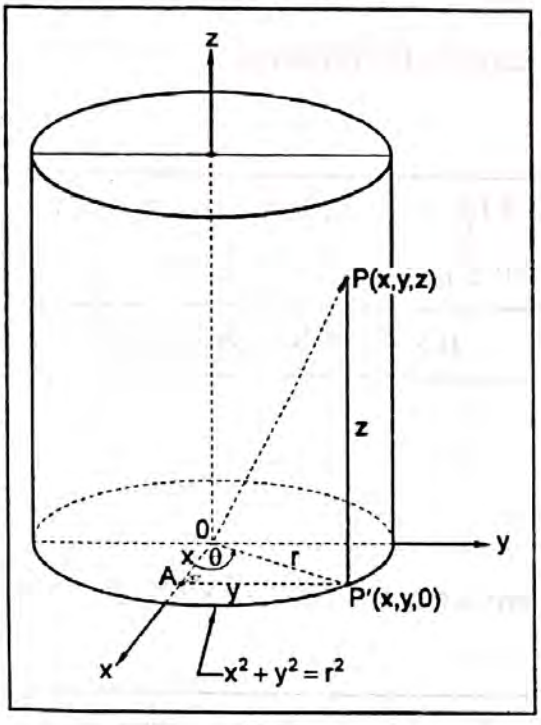
ECUACIÓN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO:

Sea $\ell : (Q - P_0) \times \vec{a} = \vec{0}$ la ecuación cruz de ℓ (eje del cilindro) $P(z,y,z)$ pertenece al cilindro circular recto si y sólo si.

$$d(P,\ell) = r \quad ; \quad \frac{\|(P - P_0) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = r$$

donde r, es la distancia de un punto cualquiera del cilindro al eje ℓ.

B. COORDENADAS CILÍNDRICAS



A partir de un punto $P(x,y,z)$ de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = r^2$ vamos a definir un nuevo sistema de coordenadas, llamado **COORDENADAS CILÍNDRICAS. Para** ello, procedemos del siguiente modo: Sea $P(x,y,z)$ un punto de la superficie cilíndrica recta $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ ——(1) y $P'(x,y,0)$ la proyección de P sobre el plano XY. En el plano XY se tiene el triángulo rectángulo OAP', recto en A.

Hallemos una relación trigonométrica entre las coordenadas de $P = (x, y, z)$ y el ángulo θ formado por el eje X y el vector $\overrightarrow{OP'}$ que se mueve en sentido antihorario variando de $0 \leq \theta < 2\pi$.

En el triángulo rectángulo OAP' se tiene:

$$\underbrace{|\overline{OA}|}_{x} = \underbrace{|\overline{OP'}|}_{r}\cos\theta \quad , \quad \underbrace{|\overline{AP'}|}_{y} = \underbrace{|\overline{OP'}|}_{r}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \text{además } z = z$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Estas relaciones nos permiten localizar cualquier punto de la superficie cilíndrica (1) cuando se conocen los valores de r, θ y z. Por tal razón, la terna (r,θ,z) se llaman coordenadas cilíndricas del punto $P = (x, y, z)$.

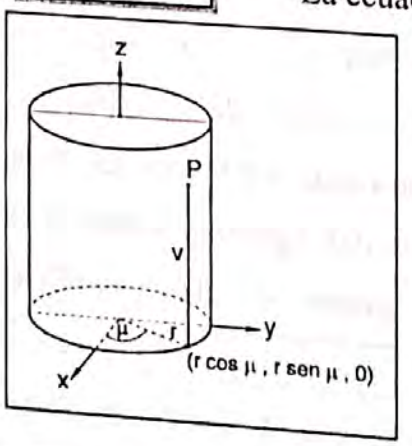
TEOREMA Las coordenadas rectangulares (x,y,z) y las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) de un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$ están ligadas por las relaciones: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$.

Se pueden efectuar las transformaciones entre los dos sistemas por medio de estás ecuaciones y de las siguientes relaciones obtenidas de ellas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad , \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

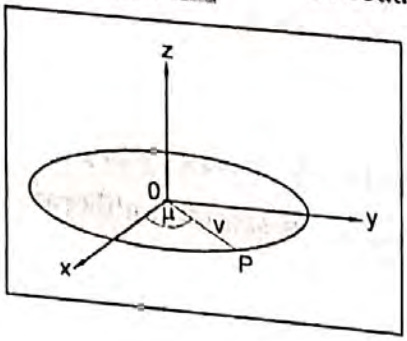
Las variaciones para r y θ están dadas por los intervalos: $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

COROLARIO 1 La ecuación vectorial de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = r^2$ es:



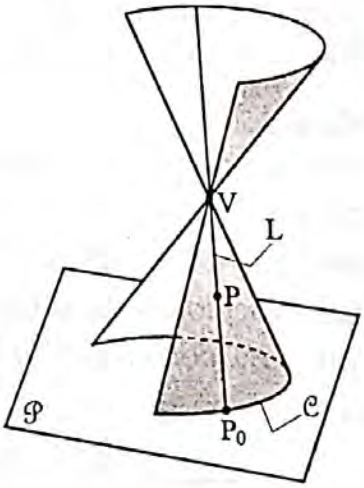
$$\vec{r}(\mu, v) = (r\cos\mu, r\operatorname{sen}\mu, v)$$
$$0 \leq \mu < 2\pi \quad , \quad -\infty < v < +\infty$$
μ y v son los parámetros

COROLARIO 2 La ecuación vectorial del plano circular: $x^2 + y^2 \leq a^2$ es:



$$\vec{r}(\mu, v) = (v\cos\mu, v\operatorname{sen}\mu, 0)$$
$$0 \leq v \leq a \quad , \quad 0 \leq \mu < 2\pi$$

2.3.3 CONOS EN $\mathbb{R}^3$



Sea $\mathcal{C}$ una curva contenida en un plano $\mathcal{P}$ y V un punto de $\mathbb{R}^3$ que no pertenece al plano que contiene a $\mathcal{C}$.

Definición : un ***cono*** (de dos hojas) es un conjunto de rectas **L** que pasan por $\mathcal{C}$ y V. $\mathcal{C}$ es la ***directriz*** del cono y **V** su vértice. Cada recta **L** es una ***generatriz*** del cono.

ECUACION DEL CONO :

Un punto P(x,y,z) pertenece al cono si, y sólo si P satisface dos condiciones :

1) $P = V + t(P_0 - V)$, $t \in \mathbb{R}$

2) $P_0 \in \mathcal{C}$

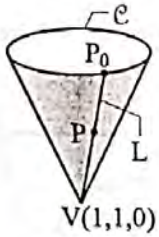
Eliminando t y P_0 de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la ecuación cartesiana $f(x,y,z) = 0$, que es la ecuación cartesiana del cono.

Ejemplo 1

Sea la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Hallar la ecuación cartesiana del cono que tiene a $\mathcal{C}$ como curva de base (directriz) y al punto V(1,1,0) como vértice.

Solución:



Sea P = (x,y,z) un punto del cono. Necesitamos la generatriz y la directriz. Se trabaja con P(x,y,z), $P_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{C} \cap L$ y con el vértice V.

a) La generatriz es :
$L : P = (1,1,0) + t((x_0,y_0,z_0) - (1,1,0))$

b) La directriz es : $\mathcal{C}: \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases}$

- Si $P_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_0^2 + y_0^2 = 4 \ldots\ldots\ldots (1) \\ z_0 = 2 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Debemos despejar t, x_0, y_0 en términos de las variables x, y, z.

- De L obtenemos :

$$\begin{cases} x - 1 = t(x_0 - 1) \ldots\ldots (3) \\ y - 1 = t(y_0 - 1) \ldots\ldots (4) \\ z = t\,z_0 \quad \ldots\ldots\ldots (5) \end{cases}$$

- Reemplazar (2) en (5) : $z = 2t$
- Despejar t : $t = \frac{z}{2}$ ..... (6)
- Reemplazar (6) en (3) y (4) para luego despejar x_0 y y_0, respectivamente :

$$x_0 = 1 + \frac{2}{z}(x-1) \ , \ y_0 = 1 + \frac{2}{z}(y-1)$$

- Reemplazar en la ecuación (1) :

$$4\left[1 + \frac{2}{z}(z-1)^2\right]^2 + \left[1 + \frac{2}{z}(y-1)\right]^2 = 4$$

es la ecuación cartesiana del cono.

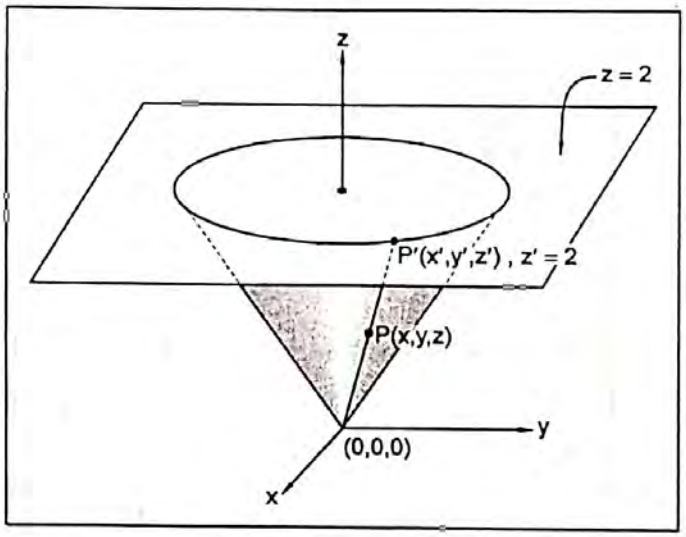
Ejemplo 2

Dada la ecuación de la directriz C:

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \ z = 2$$

y el vértice P = (0,0,0); hallar la ecuación de la superficie cónica.

Solución:



Paso 1.
Elegir un punto cualquiera $P(x,y,z)$ de la superficie.

Paso 2.
Supongamos que la **GENERATRIZ** pasa por $P(x,y,z)$ y corta a la directriz en el punto $P'(x',y',z')$. Las ecuaciones de la **GENERATRIZ** que pasa por el vértice $(0,0,0)$ y el punto (x' , y' , z') son :

$$\frac{x-0}{x'-0} = \frac{y-0}{y'-0} = \frac{z-0}{z'-0}$$

como $z' = 2 \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{2}$

Despejar x' y y' : De $\frac{x}{x'} = \frac{z}{2} \Rightarrow x' = \frac{2x}{z}$

De $\frac{y}{y'} = \frac{z}{2} \Rightarrow y' = \frac{2y}{z}$ ..... (1)

Además $P'(x' , y', z')$ pertenece a la directriz C, entonces $\boxed{x'^2 + y'^2 = 4 \ , \ z' = 2}$ ②

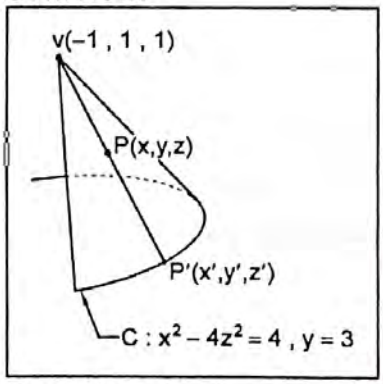
Sustituir (1) en (2) : $\left(\frac{2x}{z}\right)^2 + \left(\frac{2y}{z}\right)^2 = 4$

$$4x^2 + 4y^2 = 4z^2$$

$\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$ Es la ecuación rectangular del cono de vértice en $(0,0,0)$ y directriz C: $x^2 + y^2 = 4, z = 2$

Ejemplo 3 Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la hipérbola $x^2 - 4z^2 = 4$, $y = 3$ y cuyo vértice es el punto $(-1 , 1 , 1)$.

Solución:



- Sea $P(x,y,z)$ un punto de la superficie cónica.
- Suponer que la generatriz pasa por P, P' y el vértice. Entonces las ecuaciones paramétricas de la generatriz, son : $\frac{x+1}{x'+1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-1}{z'-1}$

Como $y' = 3$, entonces : $\frac{x+1}{x'+1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{z'-1}$

Despejar x' , z' en términos de y : De $\frac{x+1}{x'+1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x' = \frac{2(x+1)}{y-1} - 1$

De $\frac{z-1}{z'-1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow z' = \frac{2(z-1)}{y-1} + 1$ (1)

- Pero $P'(x', y', z')$ pertenece a la directriz C,

  entonces se cumple: $\boxed{x'^2 - 4z'^2 = 4}$ (2) , $y' = 3$

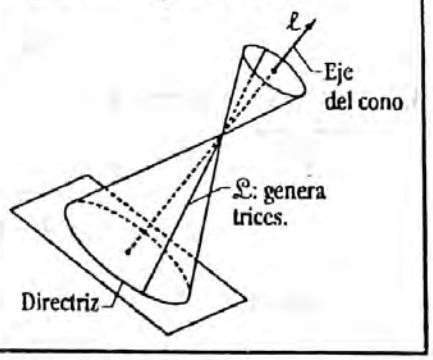
- Reemplazar (1) en (2):

$$\left(\frac{2(x+1)}{y-1} - 1\right)^2 - 4\left(\frac{2(z-1)}{y-1} + 1\right)^2 = 4$$

$$4x^2 - 7y^2 - 16z^2 - 4xy - 16yz + 12x + 26y + 48z = 31$$

CONO CIRCULAR RECTO

Definición: Si la directriz del cono es una circunferencia y la recta que une el vértice con el centro de la circunferencia es perpendicular al plano que contiene a la directriz, el cono se llama cono circular recto.



PROBLEMAS Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares de superficies a coordenadas cilíndricas:

1. $2x = y$
2. $x^2 + y^2 - 2y = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
4. $x^2 - z^2 = 4$
5. $y^2 = 4z$
6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 0$
8. $z = x^2 + y^2$
9. $x^2 + y^2 = 2x$
10. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$

Solución:

Las relaciones entre coordenadas rectangulares y coordenadas cilíndricas están dadas por las ecuaciones:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\text{sen}\theta \quad , \quad z = z \quad , \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Luego:

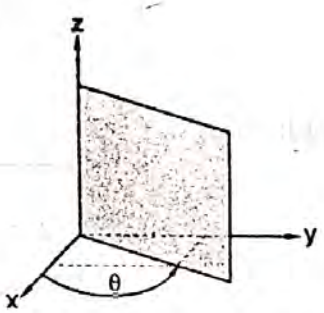
1. $2x = y$ se convierte en:

$$2 = \frac{y}{x}$$

$$2 = \text{tg}\,\theta$$

$$\boxed{\theta = \text{arctg}\,(2)}$$

Su gráfico es:

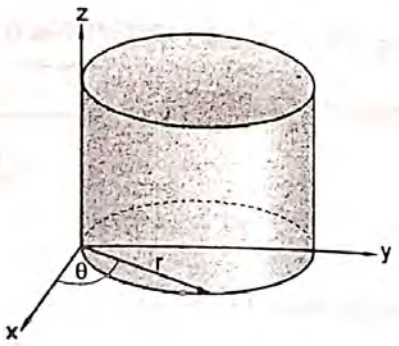


2. $\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} - 2y = 0$

$r^2 - 2r \operatorname{sen}\theta = 0$

$r = 2 \operatorname{sen}\theta$	$0 \le \theta \le \pi$

Gráfico:



3. $\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} + z^2 = 4$

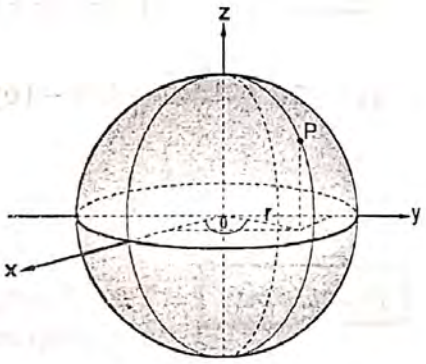
$r^2 + z^2 = 4$

$z = \pm\sqrt{4 - r^2}$

donde: $4 - r^2 \ge 0 \iff -2 \le r \le 2$

Conclusión:

$z = \pm\sqrt{4 - r^2}$,	$-2 \le r \le 2$ $0 \le \theta \le 2\pi$



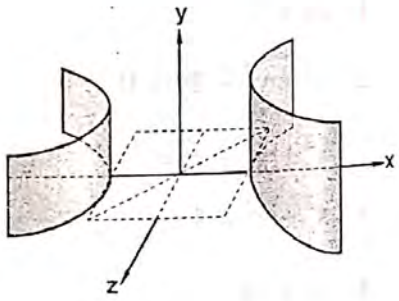
4. $x^2 - z^2 = 4$

$r^2 \cos^2\theta - z^2 = 4$

$z^2 = r^2 \cos^2\theta - 4$

$z = \pm\sqrt{r^2 \cos^2\theta - 4}$

Gráfico:



7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 0$

$r^2 + z^2 - 2r = 0$

$z^2 = 2r - r^2$

$z = \sqrt{2r - r^2}$

Con: $2r - r^2 \ge 0$

$r^2 - 2r \le 0$

$r(r - 2) \le 0$

$0 \le r \le 2$

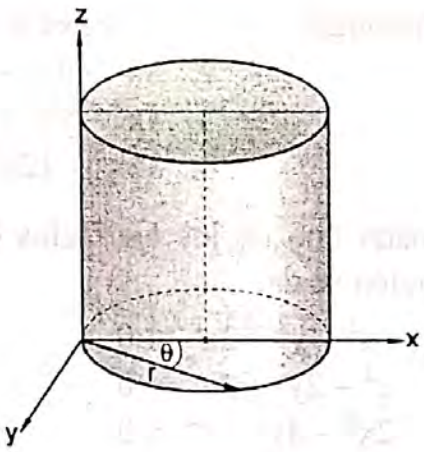
Conclusión:

$z = \sqrt{2r - r^2}$,	$0 \le r \le 2$ $0 \le \theta \le 2\pi$

9. $x^2 + y^2 = 2x$

$r^2 = 2r\cos\theta$

$r = 2\cos\theta$



Graficar: $x^2 + y^2 = 2x$

$x^2 - 2x + \ldots + y^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

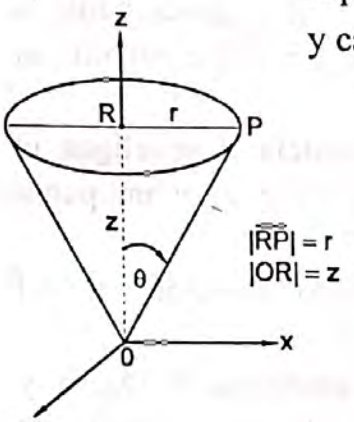
es un cilindro circular de radio 1 y centro (1, 0)

Conclusión:

$$r = 2\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 3

La ecuación $x^2 + y^2 - z^2\,tg^2\,\phi = 0$ describe una familia de superficies cónicas, donde el parámetro ϕ es un ángulo entre eje Z y cada generatriz del cono, ϕ varía en $0 < \phi < \pi$, $\phi \neq \frac{\pi}{2}$.



La representación de $x^2 + y^2 - z^2\,tg^2\,\phi = 0$ en coordenadas cilíndricas es :

$$r^2 - z^2\,tg^2\,\phi = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\phi = \frac{r}{z}}$$

Problemas

En cada uno de los ejercicios del 1 – 5 se dan las ecuaciones de la directriz y las coordenadas del vértice de una superficie cónica. Hallar la ecuación de la superficie y construirla.

1. $z^2 = 4y$, $x = 0$, $(2, 0, 0)$
2. $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$, $(-1, 1, 0)$
3. $y = x^3$, $z = 2$, $(0, 0, 0)$
4. $4x^2 + z^2 = 1$, $y = 4$, $(1, 1, -3)$
5. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$, $(0, 0, 0)$

Soluciones:

1. $z^2 + 2xy = 4y$
2. $8x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 6xy + 22x + 12y + 5 = 0$
3. $4x^3 - yz^2 = 0$
4. $36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0$

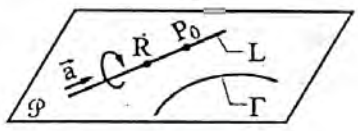
En cada uno de los ejercicios 6 – 13 identifíquese y construyase la superficie cuya ecuación se da.

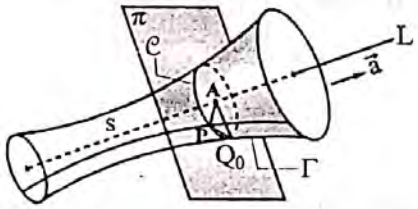
6. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$
7. $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$
8. $2x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$
9. $y^2 + xz = 0$
10. $x^2 - 2yz = 0$
11. $4z^3 - x^2 y = 0$
12. $8x^4 - yz^3 = 0$
13. $xy + xz + yz = 0$

Observación: Las ecuaciones homogéneas de grado dos o mayor que dos son conos de centro en el origen de coordenadas.

2.3.4 SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sean $\begin{cases} \Gamma \text{ una curva, y} \\ L : (R - P_0) \times \vec{a} = 0 \text{ una recta,} \\ \text{ambos contenidos en un plano } \mathcal{P}. \end{cases}$





Si la curva Γ gira al rededor de la recta fija L, se genera una superficie S en $\mathbb{R}^3$, llamada **SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN.**

Cada punto Q_0 de la curva Γ, al girar en torno al eje L, genera una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro en el punto $A \in L$ y radios $|\overline{AP}|$ y $|AQ_0|$.

La ecuación cartesiana de la superficie de revolución S se halla del siguiente modo:

1° Se traza una sección perpendicular al eje L, esto es, se traza un plano π perpendicular al eje L, generándose la circunferencia $\mathcal{C} = \pi \cap S$ contenida en el plano π.

2° En la circunferencia $\mathcal{C}$ se eligen el punto genérico P(x,y,z) y un punto $Q_0(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma$.

3° Se busca el vector dirección $\vec{a}$ del **EJE** L.

Con los cuatro elementos P, Q_0, $\vec{a}$ y L, la ecuación de la superficie de revolución S queda bien definido si se cumplen dos condiciones :

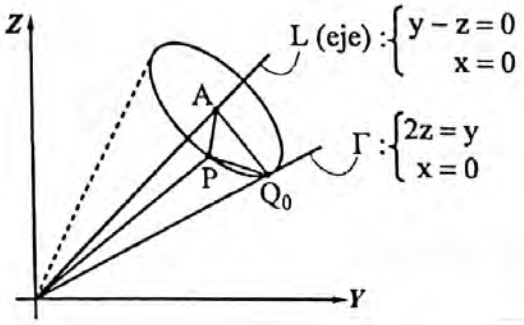
1) $\underbrace{(P - Q_0) \perp \vec{a}}_{(P - Q_0) \cdot \vec{a} = 0}$

2) $\underbrace{d(P,L)}_{\frac{\|(P - P_0) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}} = \underbrace{d(Q_0, L)}_{\frac{\|(Q_0 - P_0) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}}$

Ejemplo 1

Halle la ecuación de la superficie que se genera al girar la recta $2z = y$ alrededor de la recta $z = y$, para $y \geq 0$ (ambas contenidos en el plano yz).

Solución: Hacer el respectivo gráfico:



Necesitamos: P, Q_0, $\vec{a}$ y L; veamos:

- $P = (x,y,z)$
- $Q_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \Gamma$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z_0 = y_0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{2}y_0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

entonces $Q_0 = \left(0, y_0, \frac{1}{2}y_0\right)$

- $\vec{a} = (0,1,-1) \times (1,0,0) = -(0,1,1)$

Normal del plano $y - z = 0$ — Normal del plano $x = 0$

- La ecuación del eje L es:

$L : (R - P_0) \times \vec{a} = \vec{0}$

donde $P_0 = (0,0,0)$.

Entonces, la ecuación de la superficie de revolución S queda definida si cumple dos condiciones:

(1) $(P - Q_0) \perp \vec{a}$

$$\Rightarrow \left(x, y - y_0, z - \tfrac{1}{2}y_0\right) \cdot (0,1,1) = 0$$

$$\Rightarrow y - y_0 + z - \tfrac{1}{2}y_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \tfrac{2}{3}(y+z) \ \ldots\ldots \text{(I)}$$

(2) $d(P,L) = d(Q_0, L)$

$$\frac{\|(P - P_0) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\|(Q_0 - P_0) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$

$$\Longleftrightarrow \|(P - P_0) \times \vec{a}\| = \|(Q_0 - P_0) \times \vec{a}\|$$

$$\sqrt{(y-z)^2 + x^2 + x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}y_0^2}$$

$$\Longleftrightarrow (y-z)^2 + 2x^2 = \tfrac{1}{4}y_0^2 \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

- Reemplazar (I) en (II):

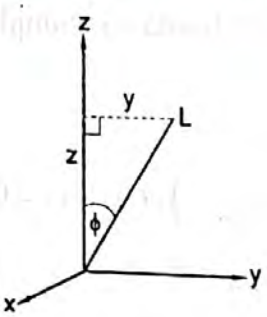
$$(y-z)^2 + 2x^2 = \tfrac{1}{4}\tfrac{4}{9}(y+z)^2$$

$$\Longleftrightarrow 9(y-z)^2 + 18x^2 = (y+z)^2$$

Ejemplo 2 Deducir la ecuación de la superficie del cono circular recto que se obtiene haciendo girar la recta L en torno del eje Z, sabiendo que L está contenida en el plano YZ, pasa por el origen y forma un ángulo agudo ϕ con la parte positiva del eje Z. El ángulo ϕ se llama ángulo generador del cono.

Solución:

Forma práctica de resolver:



Se tiene L : $\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{z}$, eje : EJE Z

↓

No está medida (x,y) entonces se hace $\sqrt{x^2+y^2}$

↓

se reemplaza en "y" de L

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2\phi = 0}$$

Ejemplo 3 $\mathcal{C}: z^2 = 2y$; $x = 0$; eje : EJE Y

↓

No está medida (x,z), entonces se hace $\sqrt{x^2+z^2}$

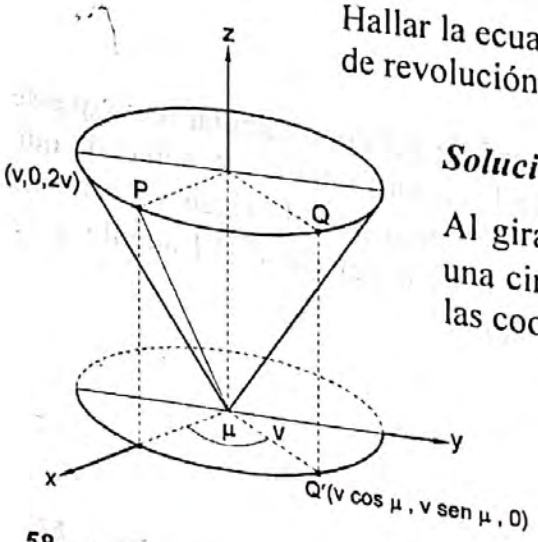
↓

Se reemplaza en "z" de $\mathcal{C}$

$$\boxed{x^2 + z^2 = 2y}$$

Ejemplo 4 Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{C}$ en el plano XZ son $\begin{cases} x = v \\ y = 0 \\ z = 2v \end{cases}$ $0 \le v \le 2$ eje: **EJE. Z**

Hallar la ecuación vectorial de la superficie de revolución.



Solución:

Al girar el punto P(v , 0 , 2v) en torno al eje Z genera una circunferencia de radio "v" y ángulo "μ", entonces las coordenadas del punto Q son:

$$\begin{cases} x = v\cos\mu \\ y = v\operatorname{sen}\mu \\ z = 2v \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} 0 \le v \le 2 \\ 0 \le \mu \le 2\pi \end{matrix}$$

Por lo tanto la ecuación vectorial de la superficie de revolución es :

$\vec{r}(\mu, v) = (v\cos\mu, v\,\text{sen}\,\mu, 2v)$
$0 \le v \le 2 \quad , \quad 0 \le \mu \le 2\pi$

2.3.5 Superficie Cuádrica

Una superficie cuya ecuación es de la forma:

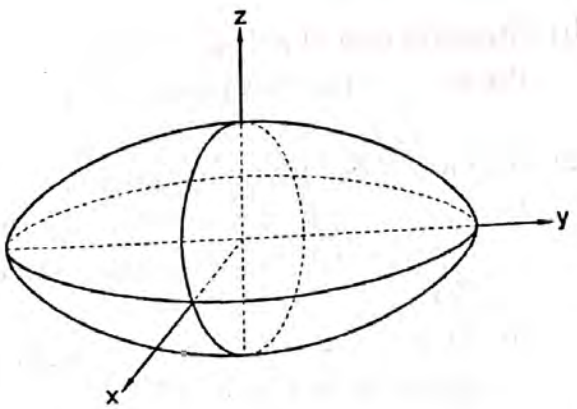
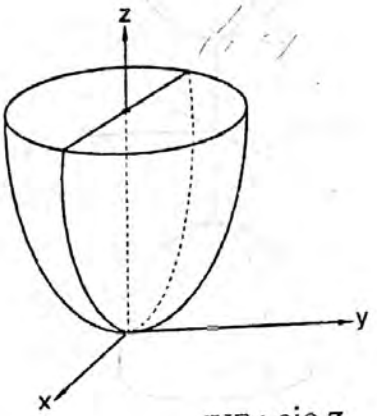
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

se llama superficie cuádrica.

Restringiremos el análisis de las superficies cuádricas al caso:

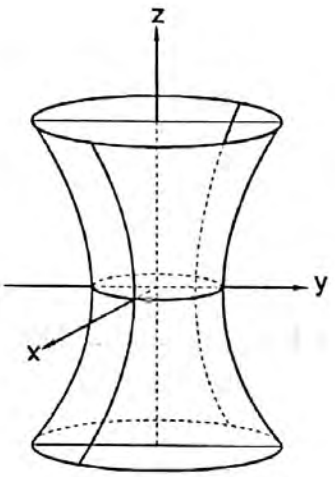
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Vamos a clasificar las cuádricas en dos tipos:

TIPO I **CUÁDRICAS CON CENTRO** Forma: $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$	TIPO II **CUÁDRICAS SIN CENTRO** Forma: $Mx^2 + Ny^2 = Sz$
1. ELIPSOIDE : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 	1. PARABOLOIDE : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$  EJE : eje z

2. HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA:

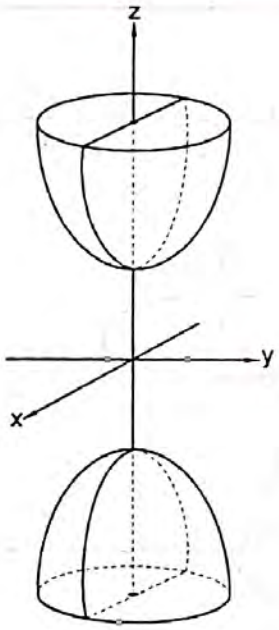
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



EJE : eje Z

3. HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS:

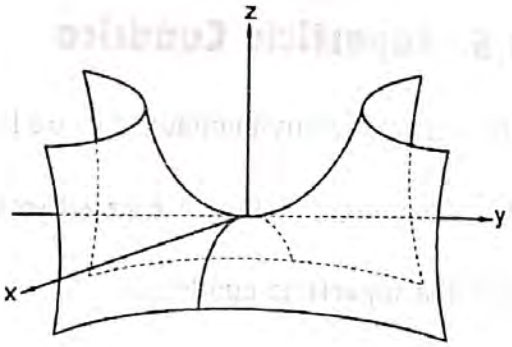
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



EJE : eje Z

2. PARABOLOIDE HIPERBOLICO: (silla de montar)

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=cz$$



EJE : eje Z

3. $z = xy$ (también es una silla de montar rotada).

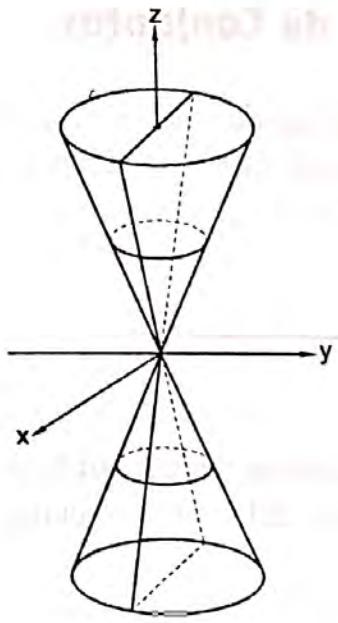
Discusión:

a) Intersección con los ejes coordenados: No existe.
Si $z = 0 \Rightarrow xy = 0$ equivale que $x = 0 \vee y = 0$. Esto es, la superficie pasa por el origen.

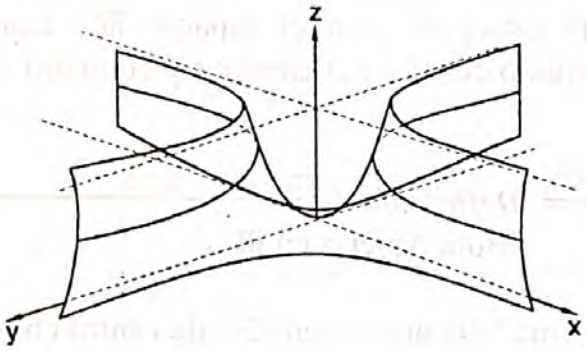
b) Simetría con el origen: existe.
Pues: $-z = (-x)(-y) \Longleftrightarrow z = xy$.

c) Secciones por planos paralelos :
i) Si $z = k \Rightarrow xy = k$ son hipérbolas paralelos al plano XY.
ii) Si $x = k \Rightarrow z = ky$, son rectas paralelas al plano YZ.
iii) Si $y = k \Rightarrow z = kx$, son rectas paralelos al plano XZ.

4. Cono : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



EJE: eje z



Observación. Cada uno de estas ecuaciones se gráfica haciendo una previa discusión de la misma siguiendo los pasos que se indican en la página 29.

EJERCICIOS

Esquematizar la gráfica en tres dimensiones de las siguientes ecuaciones :

1. $x^2+y^2=4$
2. $9y^2+4z^2=36$
3. $x^2=4z$
4. $y^2-x^2=16$
5. $3x-4y=12$
6. $z=e^y$
7. $9x^2+4y^2=36z$
8. $16x^2+100y^2-25z^2=400$
9. $4x^2-3y^2-z^2=12$
10. $x^2-16y^2=4z^2$
11. $4x^2+9y^2+z^2=36$
12. $16x^2-4y^2-z^2+1=0$
13. $y^2-9z^2-x^2-9=0$
14. $4y^2+25z^2+100z=0$
15. $16x^2-36y^2+9z^2=0$
16. $8y=x^2-z^2$
17. $2xy=z$
18. $z^2-x^2=4$
19. $4x^2+3y^2=12$
20. $x^2+y^2=1-z$

2.4 PARAMETRIZACIÓN DE UNA SUPERFICIE

2.4.0 Algunos Conceptos de Topología de Conjuntos

Nuestro interés es precisar, matemáticamente, algunas definiciones de conjuntos muy especiales, en el espacio $\mathbb{R}^2$. Estos son: conjunto abierto, conjunto conexo, conjunto conexo por caminos y conjunto simplemente conexo.

Definición 1
(Bola Abierta en $\mathbb{R}^2$)

Una bola abierta en $\mathbb{R}^2$ de centro en X_0 y radio r , que se denota por $B(x_0, r)$, es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tal que la distancia del centro al punto x es menor que r. Esto es:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - x_0\| < r\} .$$

Gráficamente $B(x_0, r)$ es un circulo de centro en x_0 y radio r.

Definición 2
(Conjunto abierto)

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se dice que D es un conjunto ***abierto*** en $\mathbb{R}^2$ si para cada $x_0 \in D$ existe una bola abierta $B(x_0, r)$, $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset D$.

indica que la bola B está totalmente contenida en el conjunto D .

Definición 3
(Conjunto conexo)

Se dice que el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es ***conexo*** si la única manera de escribir a D como unión disjunta de dos subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$, es la trivial, es decir, $D = D \cup \varnothing$.

Intuitivamente, D es conexo cuando D consta de una sola pieza, y no es conexo cuando está constituido por varias piezas.

Por ejemplo, dados los conjuntos: $A = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$

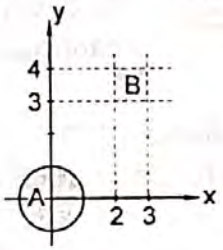
$$B = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < x < 3 \ , 3 < y < 4\}$$

se tiene:

a) A es un abierto en $\mathbb{R}^2$, también es conexo

b) B es un abierto en $\mathbb{R}^2$, también es conexo

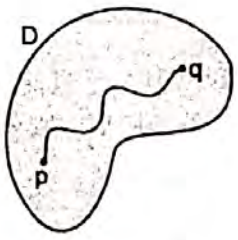
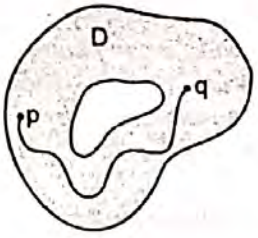
c) $A \cup B$ no es conexo.



***Definición* 4**
(Conjunto conexo por caminos)

Se dice que el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es ***conexo por caminos*** si, dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{p} , \mathbf{q} \in D$, existe un camino $\alpha : [0 , 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con extremos $\mathbf{p} = \alpha(0)$ y $q = \alpha(1)$, tal que $\alpha([0,1]) \subset D$. Esto es, la curva que une **p** con **q** está totalmente contenido en el conjunto D.

EJEMPLOS GRÁFICOS:

	D *es el conjunto sombreado*		
			
D es conexo. *D es conexo por caminos.* *D es simplemente conexo.*	*D no es conexo.* *D no es conexo por caminos.* *D no es simplemente conexo.*	*D es conexo.* *D es conexo por caminos.* *D no es simplemente conexo.*	*D es conexo.* *D es conexo por caminos.* *D no es simplemente conexo.*

LEMA Sea $\alpha : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camino en $\mathbb{R}^2$. La imagen $\alpha([a , b])$ contenido en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto conexo.

TEOREMA 1 Si el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es conexo por caminos, entonces es conexo.

TEOREMA 2 Si el conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es conexo, entonces es conexo por caminos.

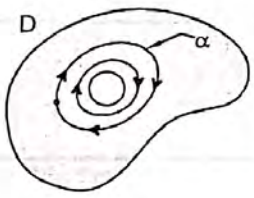
Definición 5

(Conjunto simplemente conexo)

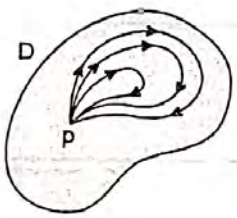
Se dice que el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es ***simplemente conexo***, si D es conexo por caminos y además todo camino cerrado $\alpha : [a, b] \longrightarrow D$ se puede contraer hasta reducirse a un punto $\mathbf{p} \in D$.

(En términos de homotopía: D es ***simplemente conexo*** si todo camino cerrado contenido en D es homotópico a un punto $\mathbf{p} \in D$).

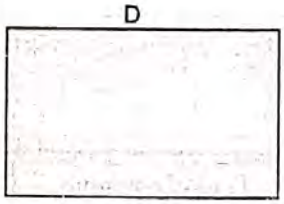
EJEMPLOS GRÁFICOS :



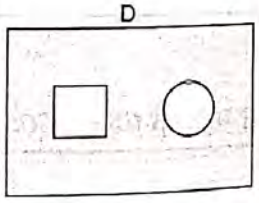
Si vamos contrayendo el camino cerrado α, nunca se va ha reducir a un punto.
D no es simplemente conexo.



Cualquier camino cerrado α con punto común en p contenido en D se puede contraer hasta reducirse al punto P.
D es simplemente conexo.



D es simplemente conexo.



D no es simplemente conexo.

2.4.1 Parametrización de una Superficie

Definición

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región conexa y $\vec{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación inyectiva de clase C^1 definida por $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

a) ***La imagen de la aplicación*** $\vec{r}$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y se define del siguiente modo:

$$M = \vec{r}(D) = \left\{ (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (u,v) \in D \right\}$$

se llama SUPERFICIE SIMPLE.

b) La aplicación $\vec{r}(u,v)$ se llama ***parametrización de la región*** $\vec{r}(D)$ y las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

se llaman ecuaciones paramétricas de la superficie $\vec{r}(D)$

"u" y "v" son los parámetros.

c) Si S es una superficie, la parametrización $\vec{r}(u,v)$ tiene la propiedad de recubrir todo S, esto es, $\vec{r}(D) = S$ o recubre parte de S, esto es, $\vec{r}(D) \subset S$.

2.4.2 Técnicas para Parametrizar una Superficie

Al procedimiento de encontrar la aplicación $\vec{r}(u,v)$ y su respectivo dominio D, $D \subset \mathbb{R}^2$, le llamaremos técnicas de parametrizar una superficie.

Para cada superficie encontraremos su respectiva parametrización.

CASOS DE PARAMETRIZACIÓN:

CASO 1 Parametrización del Plano $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$

En este caso, se puede despejar cualquiera de las 3 variables. Si despejamos la variable z en función de (x,y) obtenemos: $z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$, $c \neq 0$ donde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

La parametrización de $\mathcal{P}$, es:

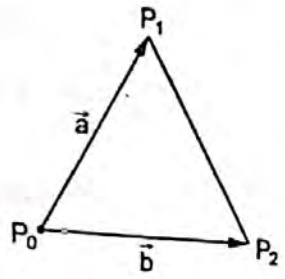
$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, -\frac{A}{D}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}\right)$	$(x,y) \in D = \mathbb{R}^2$

CASO 2 Parametrización de un plano que pasa por tres puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

En este caso, conviene fijar el punto P_0 y hallar los vectores $\vec{a} = P_1 - P_0$, $\vec{b} = P_2 - P_0$

La parametrización de este plano es:

$\vec{r}(u,v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$	$(u,v) \in \mathbb{R}^2$



CASO 3 La Parametrización del triángulo de vértices : P_0 , P_1 , P_2 , es :

$\vec{r}(u,v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$	$(u,v) \in D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le u \le 1 \;,\; 0 \le v \le 1-u\right\}$

CASO 4 Parametrización CANÓNICA.
Esta parametrización, sólo es posible cuando una de las tres variables de la ecuación cartesiana $F(x,y,z) = 0$, es de fácil despeje.

Pueden presentarse tres casos:

a) Cuando de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se puede despejar $z = f(x,y)$, el **dominio D** de la parametrización $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ **es la PROYECCIÓN de la superficie sobre el plano XY.**

b) Cuando de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se puede despejar $y = g(x,z)$, **el dominio D** de la parametrización $\vec{r}(x,z) = (x, g(x,z), z)$ es la **PROYECCIÓN de la superficie sobre el plano XZ.**

c) Cuando de la ecuación $F(x,y,z) = 0$, se puede despejar $x = h(y,z)$, el dominio de la parametrización $\vec{r}(y,z) = (h(y,z), y, z)$ es la **PROYECCIÓN de la superficie sobre el plano YZ.**

Ejemplos

(1) Parametrizar la superficie: $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ para $z \geq 0$.

Solución:

De $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$, obtenemos: $x^2 + y^2 = 1 - z$

donde, necesariamente, debe cumplirse que: $1 - z \geq 0 \Longleftrightarrow z \leq 1$, porque $x^2 + y^2 \geq 0$

Así, tendríamos: $0 \leq z \leq 1$.

Por otro lado, al despejar z de la ecuación $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ obtenemos:

$$\boxed{z = 1 - x^2 - y^2}$$

El dominio de la función $z = f(x,y)$, es la proyección de la superficie sobre el plano XY. Esto se halla, haciendo $z = 0$ en la ecuación, del cual obtenemos:

$x^2 + y^2 = 1$.

Así obtenemos:

$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$	$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2 + y^2 \leq 1\}$

(2) Parametrizar la superficie S que es la frontera del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2x$.

Solución:

(1) Ya tenemos: $z = x^2 + y^2$

(2) Falta hallar el dominio D:

El procedimiento consiste en intersectar las ecuaciones $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \; \ldots (1) \\ z = 2x \; \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

Reemplazar (2) en (1): $x^2 + y^2 = 2x$

$$x^2 - 2x + \ldots + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$

Luego, la parametrización del paraboloide $z = x^2 + y^2$, frontera del sólido, es:

$\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$	$(x,y) \in D = \{(x,y) / (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

La parametrización del plano frontera del sólido, es:

$\vec{r}(x,y) = (x, y, 2x)$	$(x,y) \in D = \{(x,y) / (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

(3) Parametrizar el plano : $x + z - y = 0$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + z^2 + ax = 0$

Solución:

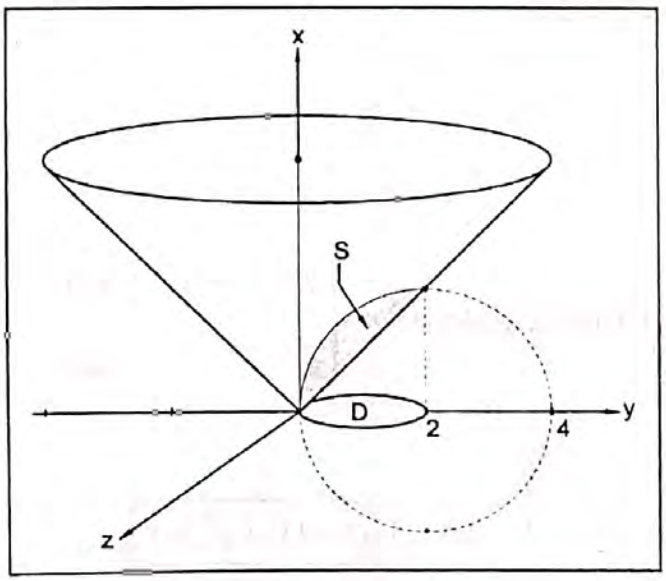
Como el eje del cilindro es paralelo al eje Y, entonces la proyección se hace sobre el plano XZ y del plano despejar $y = x + z$

Así obtenemos:

$\vec{r}(x,z) = (x, x+z, z)$	$(x,z) \in D = \left\{ (x,z) / \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$

(4) Parametrizar el pedazo del cono $x^2 = y^2 + z^2$ que se encuentra sobre el plano YZ y dentro de la esfera $y^2 + z^2 + x^2 - 4y = 0$.

Solución:



- Despejar x del cono : $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, esto se hace porque el EJE X, es eje del cono.
- Intersectar el cono con la esfera, reemplazando x^2 del cono en la esfera, obteniéndose:

$$y^2 + z^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$$
$$2y^2 + 2z^2 - 4y = 0$$
$$y^2 + z^2 - 2y = 0$$
$$(y-1)^2 + z^2 = 1$$

- La esfera es: $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$

La parametrización de la superficie S es:

$\vec{r}(y,z)=\left(\sqrt{y^2+z^2}\,,y,z\right)$	$(y,z)\in D=\left\{(y,z)\,/\,(y-1)^2+z^2\le 1\right\}$

CASO 5 Parametrización de superficies, por coordenadas cilíndricas.
Algunas superficies tienen ecuaciones cartesianas que contienen los términos : x^2+y^2 o x^2+z^2 o y^2+z^2.
En este caso, se puede recurrir a las coordenadas cilíndricas .

Ejemplos

(1) Parametrizar : el cilindro $y^2+z^2=a^2$.

Solución:

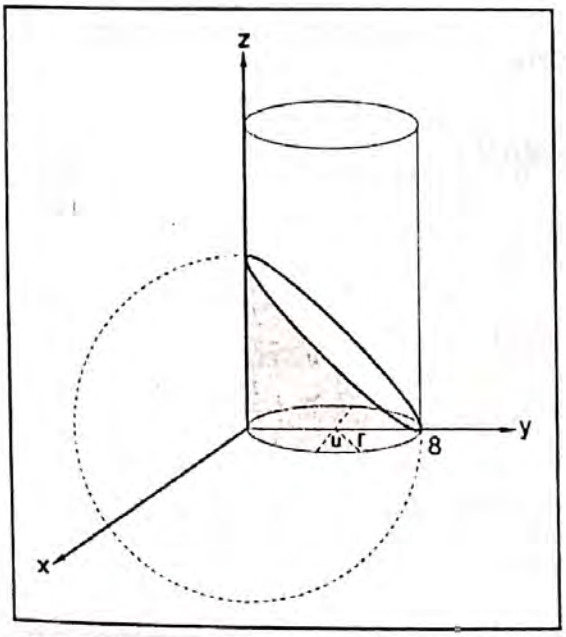
Hacer : $\begin{cases} y = a\ \cos u \\ z = a\ \text{sen}\, u \\ x = v \end{cases}$ donde : $0\le u<2\pi$, $-\infty<v<+\infty$.

Luego, la aplicación vectorial que parametriza al cilindro es:

$\vec{r}(u,v)=(v,a\cos u,a\,\text{sen}\,u)$	$(u,v)\in D=\left\{(u,v)\,/\,0\le u<2\pi,-\infty<v<\infty\right\}$

(2) Parametrizar aplicando coordenadas cilíndricas, el pedazo del cilindro $x^2+y^2=8y$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=64$

Solución:



- Completar cuadrados en el cilindro:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 8y \\ x^2+y^2-8y+\ldots &= 0 \\ x^2+y^2-8y+16 &= 16 \\ x^2+(y-4)^2 &= 16 \end{aligned}$$

- Como el eje del cilindro es paralelo al eje z, podemos aplicar coordenadas cilíndricas, haciendo:

$$\begin{cases} x = 4\cos u \\ y-4 = 4\ \text{sen}\, u \text{ , donde } 0\le u<2\pi \\ z = v \text{ (es paralelo al eje Z)} \end{cases}$$

Faltaría hallar, la variación del parámetro "v", tal que $z = v$.

Para ello, se reemplaza $x = 4\cos u$, $y = 4 + 4\,\text{sen}\,u$ en la esfera, obteniéndose :

$$(4\cos u)^2 + (4 + 4\ \text{sen}\,u)^2 + z^2 = 64$$

$$16\cos^2 u + 16 + 32\,\text{sen}\,u + 16\,\text{sen}^2 u + z^2 = 64$$

$$32 + 32\,\text{sen}\,u + z^2 = 64 \Rightarrow z = 4\sqrt{2}\ \sqrt{1-\text{sen}\,u}$$

Luego, la parametrización del pedazo del cilindro es :

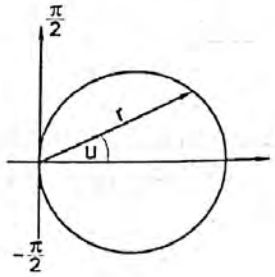
$\vec{r}(u,v) = (4\cos u, 4+4\text{sen}\,u, v)$	$(u,v) \in D = \{(u,v):\ 0 \le u < 2\pi,\ 0 \le v \le 4\sqrt{2}\sqrt{1-\text{sen}\,u}\}$

Otra forma de parametrizar:

Si aplicamos la transformación $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\,\text{sen}\,u \end{cases}$

a) La ecuación: $x^2 + y^2 = 8y$ se convierte en: $r = 8\,\text{sen}\,u$ y las ecuaciones paramétricas del cilindro serán:

$$\begin{cases} x = 8\,\text{sen}\,u\cos u \\ y = 8\,\text{sen}^2 u \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ z = v \end{cases}$$



Faltaría la variación de "v".

Esto se halla cuando las ecuaciones $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\,\text{sen}\,u \end{cases}$

se reemplazan en la esfera: $\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} + z^2 = 64$

$$r^2 + z^2 = 64$$

$$z = \sqrt{64 - r^2}$$

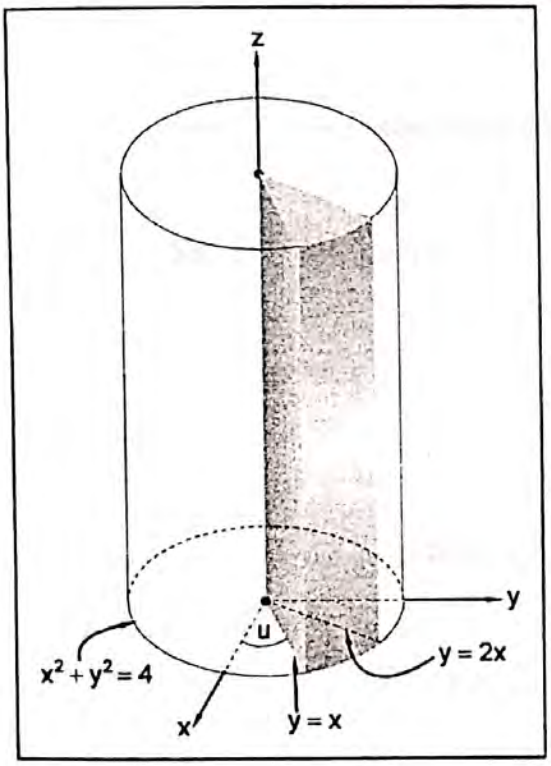
pero $r = 8\,\text{sen}\,u \Rightarrow$ $z = \sqrt{64 - 64\,\text{sen}^2 u}$

$$z = 8\cos u.$$

Luego, la parametrización del pedazo de cilindro es:

$\vec{r}(u,v) = (8\operatorname{sen} u \cos u, 8\operatorname{sen}^2 u, v)$	$(u,v) \in D = \{(u,v): -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v \le 8\cos u\}$

③ Obtener una parametrización de la parte del cilindro : $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 5$, delimitada por los semiplanos $y = x$ e $y = 2x$ con $x \ge 0$.



Solución:

Aplicar coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\operatorname{sen} u \ , \ r = 2 \\ z = v \end{cases}$$

Ahora debemos haliar la región D:

a) La variación del parámetro u se halla en los semiplanos:

- De $y = 2x \Rightarrow 2 = \operatorname{tg} u \Rightarrow u = \operatorname{arc\,tg}\, 2$
- De $y = x \Rightarrow 1 = \operatorname{tg} u \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

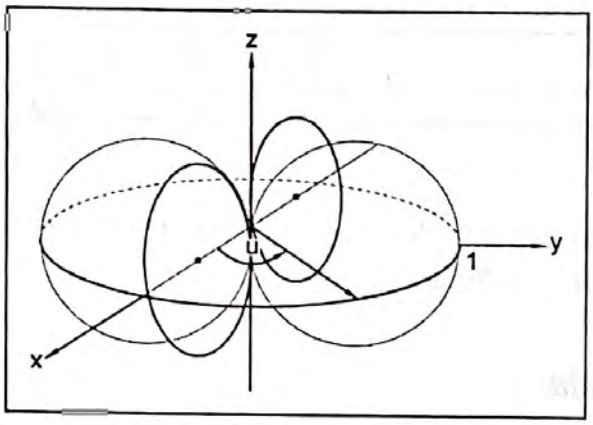
b) La variación de v está dada por la variación de z, que es $0 \le v \le 5$.

En consecuencia, la parametrización de la superficie es:

$\vec{r}(u,v) = (2\cos u, 2\operatorname{sen} u, v)$	$(u,v) \in D = \{(u,v): \frac{\pi}{4} \le u \le \operatorname{arctg} 2 \ , \ 0 \le v \le 5\}$

④ Parametrizar con coordenadas cilíndricas la superficie:
$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$.

Solución:



Las coordenadas cilíndricas son:

$$(*)\quad \begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\,\text{sen}\, u \\ z = v \end{cases}$$

Al reemplazar $(*)$ en la ecuación de la superficie, se obtiene:

$$(r^2 + v^2)^2 = r^2 \quad , \quad r > 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + v^2 = r$$

$$v^2 = r - r^2$$

$$v = \sqrt{r - r^2} \quad , \quad r - r^2 \geq 0$$

$$r^2 - r \leq 0$$

$$0 \leq r \leq 1$$

Por otro lado, de la ecuación: $r^2 + v^2 = r$ debemos despejar r.

veamos : $r^2 - r + v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - v^2$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - v^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde $\frac{1}{4} - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$.

Reemplazar (1) en $(*)$

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - v^2}\right)\cos u \\ y = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\right)\text{sen}\, u \\ z = v \end{cases}$$

La variación de u es: $0 \le u \le 2\pi$

La variación de v es: $-\frac{1}{2} \le v \le \frac{1}{2}$

Entonces, la parametrización cilíndrica de la superficie es:

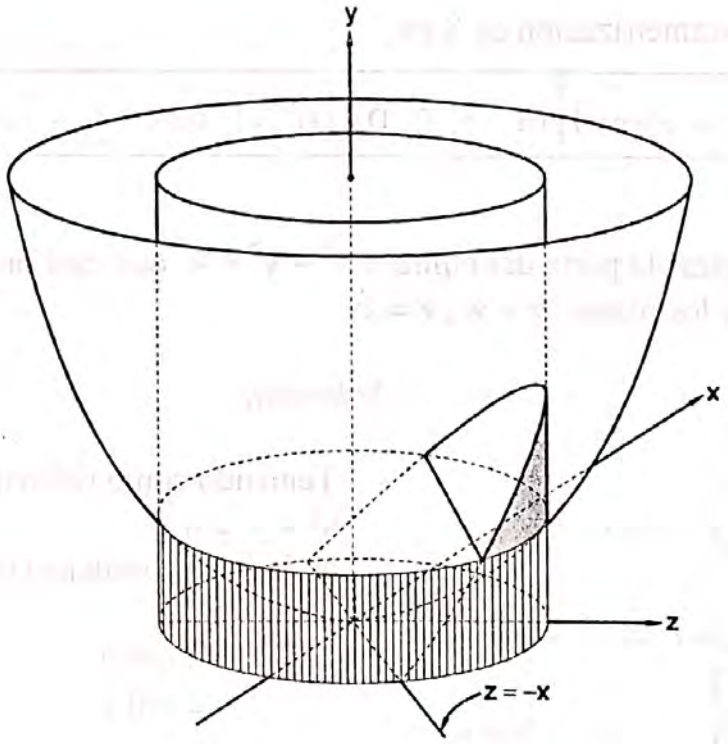
$$\vec{r}(u,v) = \left(\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - v^2} \right) \cos u , \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - v^2} \right) \operatorname{sen} u , v \right)$$

$$0 \le u \le 2\pi$$

$$-\frac{1}{2} \le v \le \frac{1}{2}$$

(5) Sea S la lámina de forma cilíndrica ubicada en el primer octante descrita por $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}$; y comprendida entre las superficies $y = x^2 + z^2$, $y = x + z$. Parametrizar S.

Solución:



Se pide parametrizar el cilindro: $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}$

Aplicando coordenadas cilíndricas, obtenemos:

$$(*)\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos u \\ z = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \\ y = v \end{cases}$$

Ahora, debemos hallar el recorrido de los parámetros "u" y "v".

a) Como S está ubicada en el primer octante, entonces: $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$.

b) Como el parámetro "v" ($y = v$) recorre verticalmente, al reemplazar $(*)$ en el plano : $y = x + z$ obtenemos:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(\cos u + \operatorname{sen} u)}$$

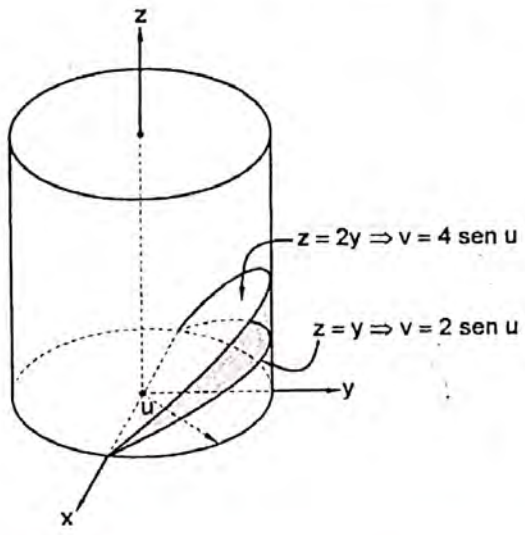
Al intersectar: $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ con $y = x^2 + z^2$ se obtiene $\boxed{y = \frac{1}{4}}$

Entonces la variación de "v" es : $\frac{1}{4} \le v \le \frac{1}{2}(\cos u + \operatorname{sen} u)$.

Conclusión: La parametrización de S es:

$\vec{r}(u, v) = \left(\frac{1}{2}\cos u, v, \frac{1}{2}\operatorname{sen} u\right)$	$(u, v) \in D, D = \left\{(u, v): 0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \frac{1}{4} \le v \le \frac{1}{2}(\cos u + \operatorname{sen} u)\right\}$

(6) Parametrizar la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que está por encima del plano XY entre los planos $z = y$, $z = 2y$



Solución:

- Teniendo como referencia el cilindro : $x^2 + y^2 = 4$
  aplicar las coordenadas cilíndricas :

$$\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$$

La variación de u es : $0 \le u \le \pi$

- Falta hallar la variación de v :

Para ello, reemplazar $y = 2 \operatorname{sen} u$ | obteniéndose :

en $\begin{cases} z = 2y \\ z = y \end{cases}$ $\quad\Big|\quad \begin{cases} v = 4 \operatorname{sen} u \\ v = 2 \operatorname{sen} u \end{cases}$

Por tanto, la parametrización es:

$\vec{r}(u, v) = (2\cos u, 2\operatorname{sen} u, v)$	$(u, v) \in D = \{(u, v): 0 \le u \le \pi, 2\operatorname{sen} u \le v \le 4\operatorname{sen} u\}$

CASO 6 PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES, POR COORDENADAS ESFÉRICAS.

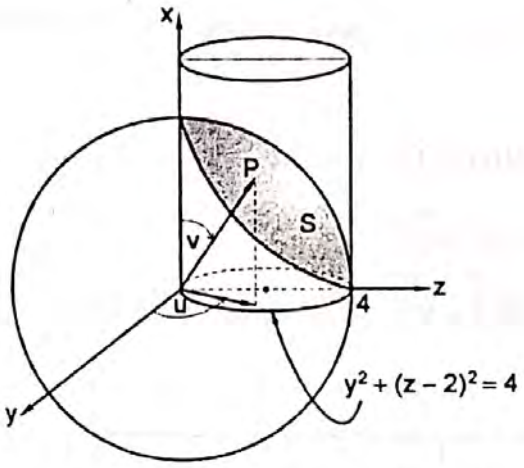
Algunas superficies tienen ecuaciones cartesianas que aparecen la suma de los términos : $x^2 + y^2 + z^2$.

En este caso se recomienda aplicar las coordenadas esféricas.

Ejemplos

1 Parametrizar la parte de la esfera : $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$, interceptado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4z$

Solución:



- En $y^2 + z^2 = 4z$ completar cuadrados: $y^2 + (z-2)^2 = 4$
- Teniendo como referencias a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el gráfico, hacemos:

$$\begin{cases} y = 4 \operatorname{sen} v \cos u \\ z = 4 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \\ x = 4 \cos v \end{cases}$$

A continuación, buscar la variación de los parámetros "u" y "v".

Viendo el gráfico, la variación de u es: $0 \le u \le \pi$

y la variación de v es: $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

Luego la parametrización de la superficie es:

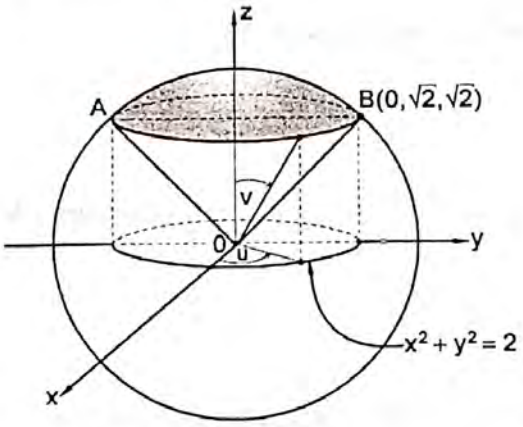
$\vec{r}(u,v) = (4\cos v, 4\operatorname{sen} v\cos u, 4\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u)$	$0 \le u \le \pi\ ,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

Si hacemos la parametrización canónica, despejamos $x = h(y, z)$ y obtenemos:

$\vec{r}(y,z) = \left(\sqrt{16 - y^2 - z^2}\ , y, z\right)$	$(y,z) \in D = \left\{(y,z) : y^2 + (z-2)^2 \le 4\right\}$

2 Parametrizar la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada por la parte superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución:



Teniendo como referencia la esfera:

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el gráfico, hacemos:

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{sen} v\cos u \\ y = 2\operatorname{sen} v\ \operatorname{sen} u \\ z = 2\cos v \end{cases}$$

Ahora, buscar la variación de los parámetros "u" y "v".

a) En el gráfico, "u" debe dar toda la vuelta, esto es, $0 \le u \le 2\pi$

b) En el gráfico, "v" varía del eje Z hasta el rayo $\overrightarrow{OB}$.
Teniendo como referencia el punto $B = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ se obtiene que $0 \le v \le \frac{\pi}{4}$

Luego la parametrización de la superficie es:

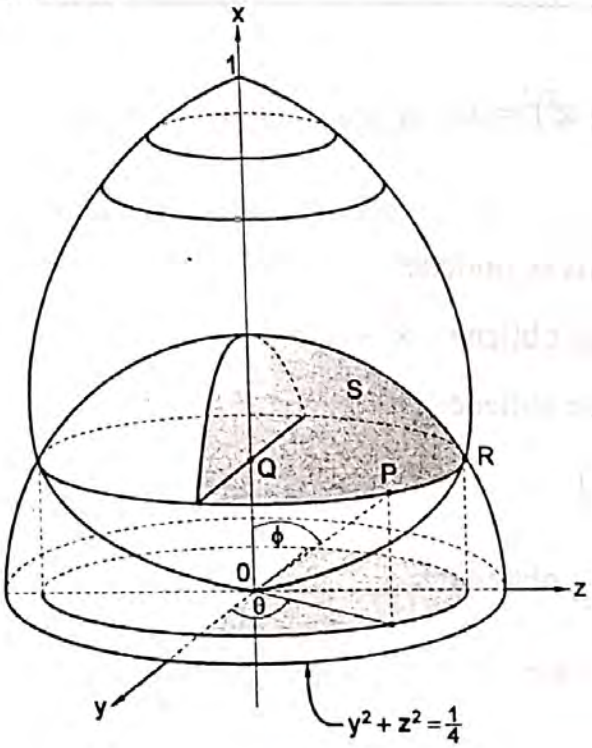
$\vec{r}(u,v) = (2\operatorname{sen} v\cos u, 2\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, 2\cos v)$	$0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le \frac{\pi}{4}$

Si hacemos la parametrización canónica, despejamos $z = f(x, y)$ y obtenemos:

$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$	$(x,y) \in D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2\right\}$

3 Parametrizar la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$, $z\geq 0$ que se halla en el interior de la superficie $(x^2+y^2+z^2)^3=x$.

Solución:



Se tiene las superficies:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$(x^2+y^2+z^2)^3=x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$x^2+y^2+z^2=\sqrt[3]{x} \quad , \quad 0\leq x\leq 1$$

Al sustituir (1) en (2):

$$\frac{1}{4^3}=x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sustituir (3) en (1):

$$y^2+z^2=\frac{4^5-1}{4^6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

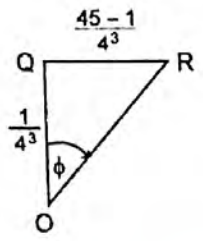
Teniendo como referencia la esfera : $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$, con $z\geq 0$; hacemos:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ z=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ x=\frac{1}{2}\cos\phi \end{cases}$$

Ahora, buscar la variación de los parámetros "θ" y "ϕ".

a) Mirando el gráfico, la variación de θ es $0\leq\theta\leq\pi$.

b) La variación de ϕ la veremos en el triángulo OQR :



$$\operatorname{tg}\phi=\frac{\frac{\sqrt{4^5-1}}{4^3}}{\frac{1}{4^3}}=\sqrt{4^5-1}$$

$$\phi=\operatorname{arctg}\sqrt{4^5-1}$$

En consecuencia, la parametrización de la superficie S, es :

$\vec{r}(\theta,\phi)=\left(\frac{1}{2}\cos\phi\,,\frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,,\frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\right)$	$0\le\theta\le\pi\ ,\ 0\le\phi\le \operatorname{arctg}\sqrt{4^5-1}$

4 Parametrizar la superficie $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$.

Solución:

Al hacer las trazas con los planos coordenados se obtiene :

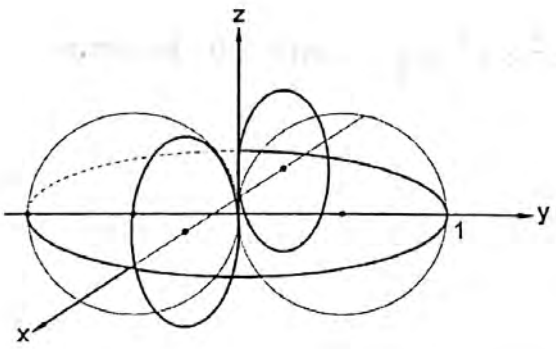
a) TRAZA CON EL PLANO XY, se hace $z=0$ y se obtiene : $x^2+y^2=1$

b) TRAZA CON EL PLANO XY, se hace $y=0$ y se obtiene:

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\tfrac{1}{4} \quad \text{o} \quad \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\tfrac{1}{4}$$

c) TRAZA CON EL PLANO YZ , se hace $x=0$ y se obtiene:

$$\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\tfrac{1}{4} \quad \text{o} \quad \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\tfrac{1}{4}$$



Las coordenadas esféricas son:

$$(*)\begin{cases} x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

Al reemplazar $(*)$ en la ecuación:

$(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$

Se obtiene: $\rho^4=\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta$

$\rho^4=\rho^2\operatorname{sen}^2\phi$

$\rho^2=\operatorname{sen}^2\phi$

$\rho=\operatorname{sen}\phi$ ..... (1)

Reemplazar (1) en (∗) :

$$\begin{cases} x = \text{sen}^2\,\phi\cos\theta \\ y = \text{sen}^2\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z = \text{sen}\,\phi\cos\theta \end{cases}$$

La variación de los parámetros : θ y ϕ son : $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$

Luego la función vectorial que parametriza a la superficie es:

$$\bar{r}\,(\theta\,,\,\phi) = (\text{sen}^2\,\phi\cos\theta\,,\,\text{sen}^2\,\phi\,\text{sen}\,\theta,\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)$$
$$0 \le \theta \le 2\pi \quad , \quad 0 \le \phi \le \pi$$

5 **TRES FORMAS DE PARAMETRIZAR LA ESFERA** S : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

FORMA 1 Aplicando coordenadas esféricas, las ecuaciones paramétrica son :

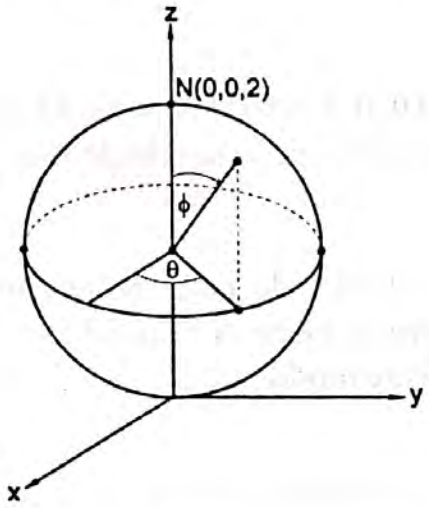


Fig. 1

$$\begin{cases} x = \text{sen}\,\phi\cos\theta & \\ y = \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & 0 \le \theta < 2\pi \\ z - 1 = \cos\phi & 0 \le \phi < \pi \end{cases}$$

La función vectorial es:

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

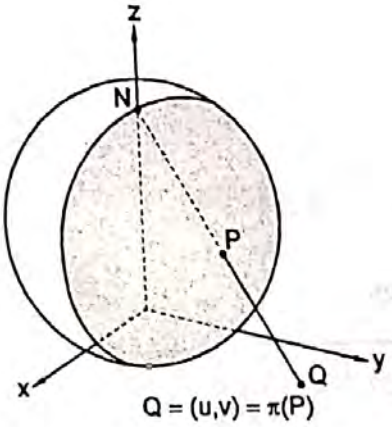
$X(\theta,\phi) = (\text{sen}\phi\,\cos\theta\,,\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta\,,\,1 + \cos\phi)$

$(\theta\,,\,\phi) \in U = \{(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta < 2\pi\,,\,0 < \phi < \pi\}$

La imagen de X, X (U) , recubre toda la esfera S.

FORMA 2 Si de la ecuación : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ despejamos, respectivamente, las variables z , y , x; obtendremos 6 ecuaciones. La parametrización canónica que se obtiene de cada ecuación, recubre un sector de la esfera, pero no toda la esfera.

Por ejemplo, al despejar y : $y = \sqrt{1 - x^2 - (z-1)^2}$ se obtiene:



$$\vec{r}(x,z) = \left(x, \sqrt{1 - x^2 - (z-1)^2}, z \right), (x,z) \in U$$

$$U = \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + (z-1)^2 \leq 1 \right\}$$

$\vec{r}(U)$ recubre la parte sombreada de la esfera de la figura 2.

Fig. 2

FORMA 3 *(PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA)*

Intuitivamente, esta parametrización consiste en "pelar una naranja desde el polo norte $N(0,0,2)$ y extender la cáscara sobre el plano XY". (ver la fig. 2)

El procedimiento consiste en:

1° Trazar el segmento de recta desde el polo norte $N = (0,0,2)$ hasta el punto Q, que es la proyección del punto $P = (x,y,z)$ sobre el plano XY partiendo desde el polo norte $N = (0,0,2)$.

Como se tiene la esfera $S^2 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, el polo norte N, el punto $P \in S^2$ y el punto proyección $Q(u,v)$ que recae sobre el plano XY, definimos la función proyección de P sobre el plano XY, del siguiente modo:

$$\pi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longrightarrow \pi(P) = (u,v)$$

La inversa de π es : π^{-1} : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - \{N\}$

$$(u,v) \longrightarrow \pi^{-1}(u,v) = (x,y,z)$$

Se debe hallar las coordenadas x , y, z en función de los parámetros u , v.

2° La ecuación vectorial del segmento $\overline{NQ}$ es:

$$P = N + t(Q - N) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ , \quad Q = (u, v, 0), \quad N = (0, 0, 2)$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(u, v, -2)$$

$$= (tu, tv, 2 - 2t)$$

Al igualar las coordenadas, obtenemos:

$$(1) \quad \begin{cases} x = tu \\ y = tv \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Como $(x, y, z) \in S^2$, entonces $(tu)^2 + (tv)^2 + (2 - 2t - 1)^2 = 1$

$$t^2 u^2 + t^2 v^2 + 1 - 4t + 4t^2 = 1$$

$$t^2 u^2 + t^2 v^2 + 4t^2 - 4t^2 = 0$$

$$(u^2 + v^2 + 4)\, t^2 - 4t = 0$$

$$[(u^2 + v^2 + 4)\, t - 4]\, t = 0$$

Como $t \neq 0$, entonces $(u^2 + v^2 + 4)\, t - 4 = 0$

$$t = \frac{4}{u^2 + v^2 + 4} \quad \ldots\ldots (2)$$

3° Reemplazar (2) en (1): $x = \dfrac{4u}{u^2 + v^2 + 4}$

$$y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}$$

$$z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}$$

Así, hemos obtenido la función vectorial :

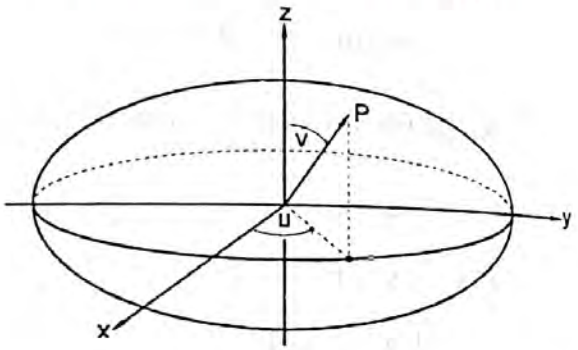
$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4} \ , \ \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4} \ , \ \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right) \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$$

6 Parametrizar la elipsoide : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Solución:

Se aplica las coordenadas esféricas modificadas, que para el elipsoide, son :

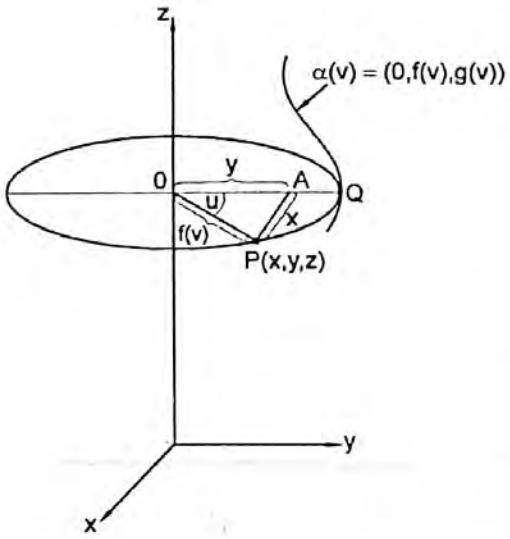
$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} v \cos u \\ y = b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \quad , \quad 0 \le u \le 2\pi \\ z = c \cos v \qquad\qquad 0 \le v < \pi \end{cases}$$



La función vectorial que parametriza a la elipsoide es $\vec{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que :

$$\vec{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u , b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u , c \cos v)$$
$$(u, v) \in U \ , \ U = \{ (u, v) : 0 \le u \le 2\pi , 0 \le v < \pi \}$$

CASO 7 *PARAMETRIZACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN*



La superficie de revolución se obtiene haciendo girar una curva $\mathcal{C}$ contenida en un plano $\mathcal{P}$ alrededor de una recta L (eje de rotación).

Por ejemplo, si elegimos una curva $\mathcal{C}$ contenida en el plano YZ cuya parametrización sea :

$\alpha(v) = (0 , f(v) , g(v))$ de parámetro "v" $\in$ I y el eje de rotación sea el EJE Z (ver la figura).

Cuando la curva $\mathcal{C}$ gira alrededor del eje Z genera una superficie S cuya representación paramétrica queremos saber.

Cada punto Q perteneciente a la curva $\mathcal{C}$ genera una circunferencia de centro en el eje Z y radio $f(v)$.

Si el punto Q gira hasta el punto P se genera el ángulo "u".

Queremos hallar las coordenadas (x, y, z) del punto P.

En el triángulo rectángulo OAP, recto en A, se tiene:

$$\begin{cases} x = f(v)\,\text{sen}\,u \\ y = f(v)\cos u \end{cases}$$

Como $z = g(v)$, entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie S, son:

$$\begin{cases} x = f(v)\,\text{sen}\,u \\ y = f(v)\cos u \\ z = g(v) \end{cases}$$

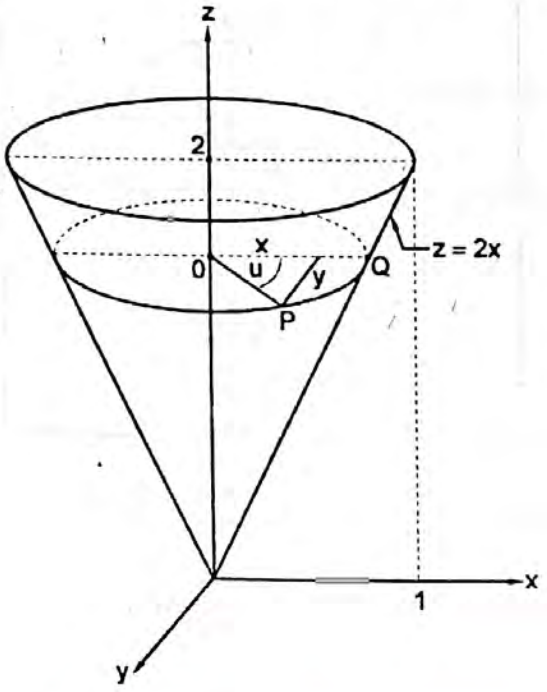
La variación del parámetro "u" depende cuánto giramos la curva $\mathcal{C}$.

La variación del parámetro "v" depende de las condiciones que se plantean al inicio del problema.

Si la curva da una vuelta entera, entonces $0 \le u < 2\pi$ y si $a < v < b$, entonces la función vectorial que parametriza a la superficie de revolución S es:

$\vec{r}(u,v) = \big(f(v)\,\text{sen}\,u, f(v)\cos u, g(v)\big)$	$0 \le u < 2\pi, a < v < b$

Ejemplo 1 Hallar la superficie de revolución que se genera al rotar la recta $z = 2x$, $0 \le x \le 1$ en torno al eje Z.



Solución:

Haciendo $x = v$, las ecuaciones paramétricas de la recta $z = 2x$, son:

$$\begin{cases} x = v \\ z = 2v \\ y = 0 \end{cases} \quad , \quad 0 \le v \le 1$$

P es un punto de la superficie de revolución con coordenadas (x,y,z), donde:

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\,\text{sen}\,u \end{cases} \quad 0 \le u \le 2\pi$$

Entonces la función vectorial que parametriza a la superficie de revolución es:

$\vec{r}(u,v) = (v\cos u, v\,\text{sen}\,u, 2v)$	$(u,v) \in D = \{(u,v): 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 1\}$

La imagen de $\vec{r}$ es el cono : $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$, $0 \le z \le 2$.

Pues, al hacer $\begin{cases} x = v\cos u \Rightarrow x^2 = v^2\cos^2 u \\ y = v\,\text{sen}\,u \Rightarrow y^2 = v^2\,\text{sen}^2 u \end{cases}$

sumar : $x^2 + y^2 = v^2$ ..... (1)

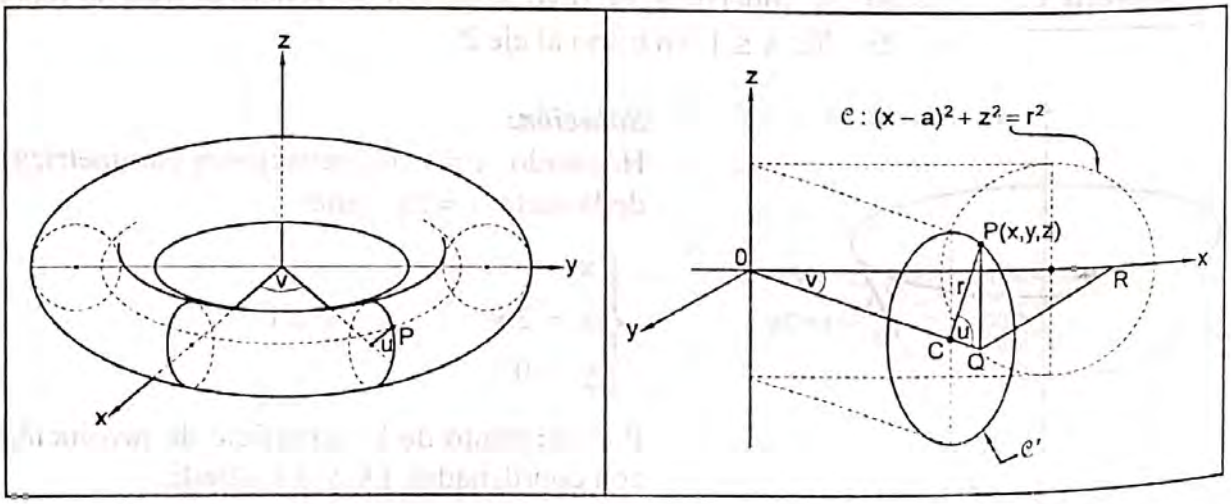
Como $z = 2v \Rightarrow v = \frac{z}{2}$ ..... (2)

Al reemplazar (2) en (1) : $\boxed{x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}}$ $0 \le z \le 2$

Es un cono de vértice en $(0,0,0)$.

Ejemplo 2 *(El Toro)*

El toro es una superficie cerrada, parecida a la llanta (neumático) de un auto. Se genera al girar una circunferencia en torno a un eje .



Supongamos que en el plano XZ se tiene la circunferencia $\mathcal{C} : (x-a)^2 + z^2 = r^2$, $a > r$.

Si la circunferencia $\mathcal{C}$ gira en torno al eje Z, se genera una superficie cerrada S.

Sea $P = (x , y , z)$ un punto de S, debemos hallar las coordenadas (x , y , z) de P .

Cuando $\mathcal{C}$ pasa a la posición $\mathcal{C}'$ aparece el triángulo rectángulo ORQ , recto en R y el ángulo "v" que se moverá horizontalmente en el plano XY. El ángulo "u" se mueve en el plano vertical que contiene a la circunferencia $\mathcal{C}$.

En el segundo gráfico se tiene:

$$\left|\overline{OR}\right| = x = \left|\overline{OQ}\right| \cos v \quad , \quad \text{donde} \quad \left|\overline{OQ}\right| = \underbrace{\left|\overline{OC}\right|}_{a} + \underbrace{\left|\overline{CQ}\right|}_{r\cos u}$$

$$\left|\overline{RQ}\right| = y = \left|\overline{OQ}\right| \operatorname{sen} v$$

$$\left|\overline{QP}\right| = z = r \operatorname{sen} u$$

Luego :

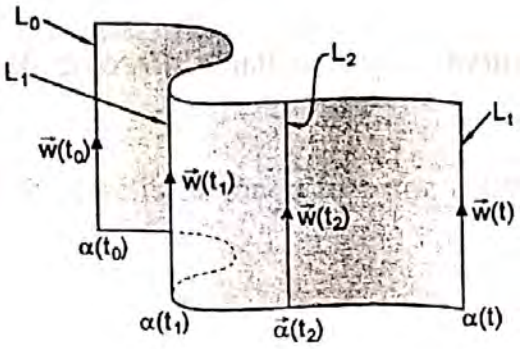
$$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\operatorname{sen} v \\ z = r \operatorname{sen} u \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le u < 2\pi \\ 0 \le v < 2\pi \end{matrix}$$

En consecuencia, el toro está parametrizado por:

$X(u , v) = ((a + r\cos u)\cos v , (a + r\cos u)\operatorname{sen} v , r \operatorname{sen} u)$	$0 \le u < 2\pi$ $0 \le v < 2\pi$

CASO 8 *PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIE REGLADAS*

Una ***superficie reglada***, es una superficie generada por una recta que se mueve sobre una curva α .



Sea :

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (x(t) , y(t) , z(t))$$

Se sabe que la ecuación paramétrica de una recta queda bien definida por un punto $\alpha(t)$ y su vector dirección $\vec{w}(t)$ para cada $t \in I$.

Así por ejemplo:

para $t_0 \in I$, definimos la recta $L_0 : \alpha(t_0) + v\ \vec{w}(t_0)$, $v \in IR$

para $t_1 \in I$, definimos la recta $L_1 : \alpha(t_1) + v\ \vec{w}(t_1)$, $v \in IR$

para $t_2 \in I$, definimos la recta $L_2 : \alpha(t_2) + v\ \vec{w}(t_3)$, $v \in IR$

⋮

para $t \in I$, definimos la recta $L_t : \alpha(t) + v\ \vec{w}(t)$, $v \in IR$

De esta manera obtenemos una familia uniparamétrica de rectas

$$\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}, t \in I, \vec{w}(t) \neq \vec{0}$$

vector dirección de la recta

punto de la recta

Para cada $t \in I$, la recta L_t que pasa por el punto $\alpha(t)$ y es paralela al vector $\vec{w}(t)$ se denomina la ***recta de la familia en t***.

Definición de Superficie Reglada

Dada una familia uniparamétrica de rectas $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$, la superficie parametrizada : $X(t, v) = \alpha(t) + v\,\vec{w}(t)$, $t \in I$, $v \in IR$ se denomina la SUPERFICIE REGLADA generada por la familia $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$.

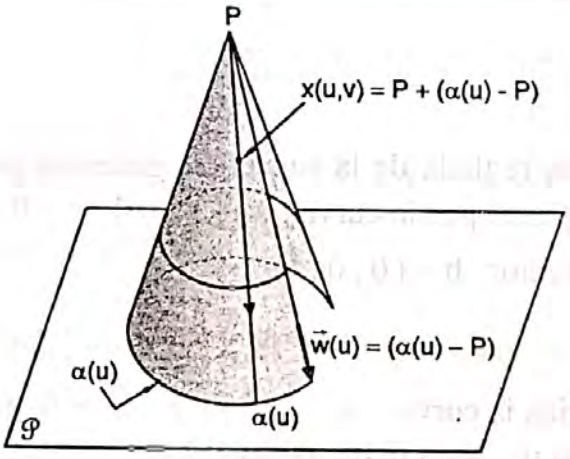
Las rectas L_t se llaman ***generatrices*** y la curva $\alpha(t)$ se llama ***directriz*** de la superficie X.

Los ejemplos mas simples de superficies regladas son : el cono, el cilindro y las superficies tangentes a una curva regular.

a) un ***cono*** es una superficie reglada con parametrización de la forma:

$X(u,v) = P + v(\alpha(u) - P)$ $= (1 - v)P + v\,\alpha(u)$	$u \in I$ $0 \le v \le 1$

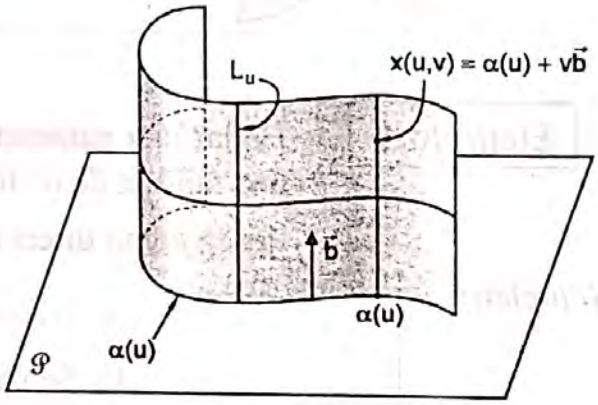
donde P es el vértice y $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $u \in I$ es la curva directriz contenida en un plan $\mathcal{P}$.



b) Un ***cilindro*** es una superficie reglada con parametrización de la forma:

$X(u,v) = \alpha(u) + v\,\vec{b}$	$u \in I$ $v \in \mathbb{R}$

donde $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $u \in I$ es la curva directriz contenida en un plano $\mathcal{P}$ y $\vec{b}$ es un vector dirección fijo. Todas las rectas L_u son paralelas al vector $\vec{b}$.



c) ***Superficie tangente.***

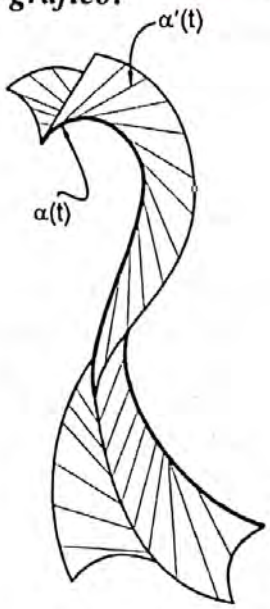
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular.

$t \longrightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Una ***superficie tangente*** es una superficie reglada con parametrización de la forma:

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\,\alpha'(t) \quad , \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}$$

Ejemplo gráfico:



Por cada punto $\alpha(t)$ de la curva se traza su respectivo vector tangente $\alpha'(t)$, $t \in I$.

Conocidos un punto $\alpha(t)$ y su vector dirección $\alpha'(t)$ definimos la familia de rectas:

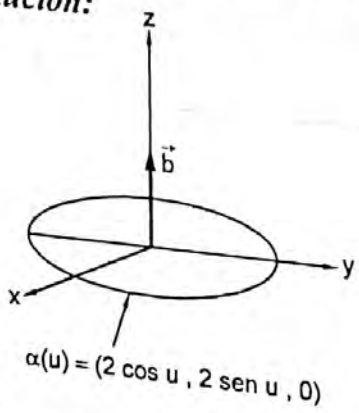
$$\alpha(t) + v\,\alpha'(t) \ , \ v \in \mathbb{R} .$$

Esta familia de rectas define la superficie reglada:

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\,\alpha'(t) \ , (t, v) \in I \times \mathbb{R}$$

Ejemplo 1 Hallar una parametrización reglada de la superficie generada por una familia de rectas que pasan por la curva : $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y tienen como dirección al vector $\bar{b} = (0, 0, 1)$

Solución:



1. Se parametriza la curva: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ por $\alpha(u) = (2 \cos u , 2 \operatorname{sen} u, 0)$, $0 \le u < 2\pi$

2. Como $\bar{b} = (0, 0, 1)$, es el vector dirección de las rectas, entonces la parametrización de la superficie es:

$X(u, v) = (2 \cos u , 2 \operatorname{sen} u , 0) + v\,(0, 0, 1)$, $v \in \mathbb{R}$

$X(u, v) = (2 \cos u , 2 \operatorname{sen} u , v)$	$(u, v) \in U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u < 2\pi , -\infty < v < \infty\}$

La imagen de U por X es : $X(U) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 \cos u , y = 2 \operatorname{sen} u , z = v\}$

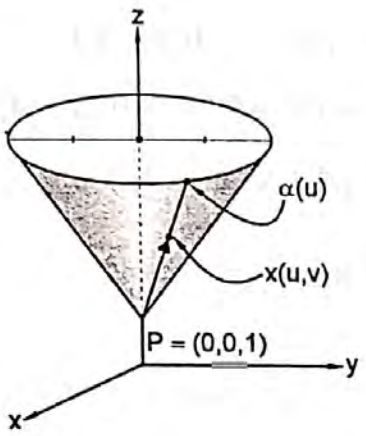
Al hacer :

$$\begin{cases} x^2 = 4 \cos^2 u \\ y^2 = 4 \operatorname{sen}^2 u \end{cases}$$

sumar : $x^2 + y^2 = 4$, $z \in \mathbb{R}$ (cilindro circular recto) .

Ejemplo 2 Hallar la ecuación paramétrica de la superficie generada por una familia de rectas que pasan por la curva: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$ y por el punto $(0,0,1)$.

Solución:



1. Se parametriza la curva : $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$ por $\alpha(u) = (2\cos u , 2 \operatorname{sen} u , 3)$, $0 \le u < 2\pi$

2. Conocido el punto $P = (0 , 0 , 1)$, entonces la superficie es :

$$X(u , v) = P + v(\alpha(u) - P) \quad , \quad 0 \le v \le 1$$

$$X(u , v) = (2v\cos u \ , 2 v \operatorname{sen} u , 2v + 1)$$

$$U = \{ (u , v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le u < 2\pi \ , \ 0 \le v \le 1 \}$$

La imagen de U por X , es:

$$X(U) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / x = 2 v \cos u , \ y = 2 v \operatorname{sen} u , z = 2 v + 1 \}$$

Haciendo : $\begin{cases} x^2 = 4 v^2 \cos^2 u \\ y^2 = 4 v^2 \operatorname{sen}^2 u \end{cases}$

Sumar : $x^2 + y^2 = 4v^2$. Como $z = 2v + 1 \Rightarrow 2v = 1 - z \Rightarrow 4v^2 = (1 - z)^2$

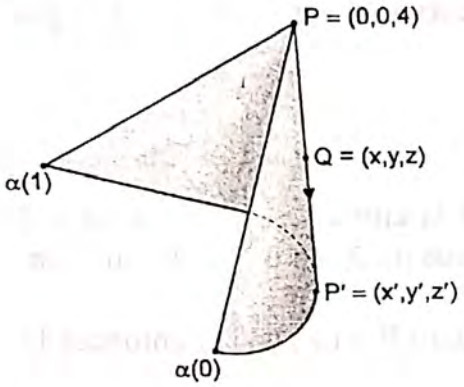
obtenemos : $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$, que es un cono de vértice en $P = (0,0,1)$.

Ejemplo 3 Sea Γ la curva descrita por la función $\vec{\alpha}(t) = (t , t^2 + 1 \ , t + t^2)$, $0 \le t \le 1$ y $P = (0 , 0 , 4)$.

Uniendo los puntos de la curva Γ con el punto P mediante segmentos de recta se genera la superficie S .

Escriba la función vectorial de la superficie S.

Solución:



Para hallar la función vectorial de la superficie S, bastará hallar las coordenadas del punto Q que pertenece a S.

La ecuación vectorial del segmento dirigido $[P\ ,\ P']$ es:

$$Q = P + v\,(P' - P) \quad , \quad 0 \le v \le 1$$

$$(x,y,z) = (0,0,4) + v\,(x' - 0\ ,\ y' - 0\ ,\ z' - 4)$$

$$(x,y,z) = (vx'\ ,\ vx'\ ,\ 4 + v\,(z' - 4)) \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Como P' pertenece a la curva $\vec{\alpha}$, entonces:

$$(2)\ \begin{cases} x' = t \\ y' = t^2 + 1 \\ z' = t + t^2 \end{cases}$$

Al reemplazar (2) en (1) e igualar las componentes, se obtiene:

$$(3)\ \begin{cases} x = vt \\ y = v\,(t^2 + 1) \\ z = 4 + v\,(1 + t^2) - 4v \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1 \quad , \quad 0 \le v \le 1$$

Las ecuaciones paramétricas que aparecen en (3) generan la superficie S. Por tanto, haciendo $t = u$, la función vectorial de S es:

$$\vec{r}\,(u\ ,\ v) = (vu\ ,\ vu^2 + v\ ,\ 4 + v + vu^2 - 4v) \quad , \quad (u\ ,\ v) \in D$$

$$D = \left\{ (u\ ,\ v) : 0 \le u \le 1 \quad , \quad 0 \le v \le 1 \right\}$$

2.4.3 Importancia de la Parametrización de Superficies

La parametrización de superficies es importante porque:

a) Nos permite recubrir una superficie mediante una función vectorial de dos parámetros $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u , v) \longrightarrow X(u , v) = (x(u , v) , y(u , v) , z(u ,v))$$

b) Nos permite hallar fácilmente los vectores tangentes:

$$X_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} , \frac{\partial y}{\partial u} , \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad , \quad X_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} , \frac{\partial y}{\partial v} , \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

que son los generadores del plano tangente $T_p(S)$ de la superficie S en el punto P .

c) Nos permite hallar una NORMAL a la superficie S, que es el vector $\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}$ denominado ***producto vectorial fundamental*** de la superficie **S** respecto a la parametrización $X(u,v)$.

d) Con la parametrización $X(u,v)$ se define la primera forma fundamental $I_p(w) = E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2$ donde los siguientes productos internos: $E = X_u \cdot X_u$, $F = X_u \cdot X_v$, $G = X_v \cdot X_v$ se llaman los coeficientes de la primera forma fundamental. Además $w = X_u u' + X_v v'$, $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$.

e) Los coeficientes de la primera fundamental se aplican : para hallar el área de una superficie, para hallar el ángulo entre dos curvas contenidas en la superficie.

f) Con los vectores X_u y X_v se forma la función vector normal unitario $N(u , v) = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|}$

g) Con la función N(u,v) se define la segunda forma fundamental $II_p(w) = e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2$, donde : $e = N \cdot X_{uu}$, $f = N \cdot X_{uv}$, $g = N \cdot X_{vv}$

En suma, la parametrización de una superficie es el inicio para proseguir estudios de las propiedades intrínsecas de la superficie. Dicho estudio corresponde al curso de Geometría Diferencial que puede dictarse en dos semestres: un semestre, respecto al estudio de superficies en $\mathbb{R}^3$ y un segundo semestre, al estudio de superficies abstractas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

I. LA ESFERA

1. Hallar la ecuación de la esfera en cada uno de los casos siguientes:

1) el centro de la esfera está en el punto $C(0;0;0)$ y el radio es $r = 9$;
2) el centro de la esfera está en el punto $C(5 ; -3 ; 7)$ y el radio es $r = 2$;
3) la esfera pasa por el origen de coordenadas y tiene el centro en el punto $C(4 ; -4 ; -2)$;
4) la esfera pasa por el punto $A(2 ; -1 ; -3)$ y tiene el centro en el punto $C(3 ; -2 ; 1)$;
5) los puntos $A(2 ; -3 ; 5)$ y $B(4 ; 1 ; -3)$ son los extremos de uno de los diámetros de la esfera ;
6) el centro de la esfera está en el origen de coordenadas y el plano $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ es tangente a la esfera ;
7) el centro de la esfera es $C(3 ; -5 ; -2)$, y el plano $2x - y - 3z + 11 = 0$ es tangente a la esfera ;
8) la esfera pasa por los tres puntos $M_1(3 ; 1 ; -3)$, $M_2(-2 ; 4 ; 1)$ y $M_3(-5 ; 0 ; 0)$ y su centro está en el plano $2x + y - z + 3 = 0$;
9) la esfera pasa por los cuatro puntos :

$M_1(1 ; -2 ; -1)$, $M_2(-5 ; 10 ; -1)$, $M_3(4 ; 1 ; 11)$ y $M_4(-8 ; -2 ; 2)$.

2. Hallar la ecuación de la esfera de radio $r = 3$, que es tangente al plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punto $M_1(1 ; 1 ; -3)$.

3. Calcular el radio R de la esfera que es tangente a los planos
$3x + 2y - 6z - 15 = 0$, $3x + 2y - 6z + 55 = 0$

4. Una esfera tiene el centro en la recta

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 , \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

y es tangente a los planos

$x + 2y - 2z - 2 = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$,

Hallar su ecuación.

5. Hallar la ecuación de la esfera que es tangente a los dos planos paralelos
$6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $6x - 3y - 2z + 63 = 0$
y el punto $M_1(5 ; -1 ; -1)$ es el punto de contacto con uno de ellos.

6. Hallar la ecuación de la esfera con el centro en $C(2 ; 3 ; -1)$, que corta en la recta.

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 , \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

una cuerda de longitud igual a 16 .

7. Determinar las coordenadas del centro C y el radio *r* de la esfera dada por cada una de las ecuaciones siguientes:

1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 16$;
2) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$.

8. Hallar las ecuaciones paramétricas del diámetro de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0 ,$$

que es perpendicular al plano

$$5x - y + 2z - 17 = 0 .$$

9. Hallar las ecuaciones canónicas del diámetro de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0 ,$$

que es paralelo a la recta

$$x = 2t - 1 , \; y = -3t + 5 , \; z = 4t + 7 .$$

10. Determinar la situación del punto $A(2 ; -1 ; 3)$ con respecto a cada una de las esferas dadas a continuación: averiguar si el punto está dentro, fuera o en la superficie:

1) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$;
2) $(x+14)^2 + (y-11)^2 + (z+12)^2 = 625$;
3) $(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 22 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z - 3 = 0$.

11. Calcular la distancia más corta del punto A la esfera dada, en cada uno de los casos siguientes :

a) A (–2 ; 6 ; –3) , $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

b) A (9 ; –4 ; –3) , $x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 241 = 0$;

c) A (1 ; –1 ; 3) , $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 4y - 10z - 62 = 0$.

12. Determinar cómo está situado el plano con respecto a la esfera: si la corta, si es tangente o si pasa por fuera de ella. Las ecuaciones del plano y de la esfera son :

1) $z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;

2) $y = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;

3) $x = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

13. Determinar cómo está situado la recta con respecto a la esfera : si la corta, si es tangente o si pasa por fuera de ella. Las ecuaciones de la recta y de la esfera son:

1) $x = -2t + 2$, $y = 3t - \frac{7}{2}$, $z = t - 2$,

$x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$;

2) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$,

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 67 = 0$;

3) $\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0 , \\ 2x - 4y - z + 6 = 0 , \end{cases}$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0$.

14. Hallar en la esfera

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

el punto M_1 más próximo al plano

$$3x - 4z + 19 = 0$$

y calcular la distancia d del punto M_1 a este plano.

15. Determinar el centro C y el radio R de la circunferencia

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100\,, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0\,. \end{cases}$$

16. Los puntos A(3 ; –2 ; 5) y B(–1 ; 6 ; –3) son los extremos de un diámetro de una circunferencia que pasa por el punto C(1 ; –4 ; 1) . Hallar la ecuación de esta circunferencia.

17. El punto C(1 ; –1 ; –2) es el centro de una circunferencia que corta en la recta

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0\,, \\ 4x - 7y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

una cuerda de longitud igual a 8. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $M_1(3\,;-1\,;-2)$, $M_2(1\,;1\,;-2)$ y $M_3(-1\,;3\,;0)$.

19. Hallar la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de las dos esferas :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0\,,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0\,.$$

20. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por el origen de coordenadas y por la circunferencia .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0\,. \end{cases}$$

21. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por la circunferencia.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0\,, \\ 5x + 2y - z - 3 = 0\,. \end{cases}$$

y por el punto A(2 ; –1 ; 1) .

22. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por las dos circunferencias :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 , \\ y = 2 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + z^2 = 16 , \\ y = 3 . \end{cases}$$

23. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en el punto $M_1(6 ; -3 ; -2)$.

24. Demostrar que el plano $2x - 6y + 3z - 49 = 0$
es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$

Calcular las coordenadas del punto de contacto.

25. Hallar los valores de a para los cuales el plano $x + y + z = a$
es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

26. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$ en el punto $M_1(-1 ; 3 ; 0)$.

27. El punto $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ está en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Hallar la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto M_1.

28. Deducir la condición, según la cual el plano $Ax + By + Cz + D = 0$
es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

29. El punto $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ está en la esfera
$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$.
Hallar la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto M_1 .

30. Por los puntos de intersección de la recta $x = 3t - 5$, $y = 5t - 11$, $z = -4t + 9$
y la esfera $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$
se han trazado planos tangentes a esta esfera. Hallar sus ecuaciones.

31. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
paralelos al plano $x + 2y - 2z + 15 = 0$

32. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$$

y paralelos al plano $4x+3z-17=0$

33. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera

$$x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$$

y paralelos a las rectas $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{0}$

34. Demostrar que se pueden trazar por la recta

$$\begin{cases} 8x-11y+8z-30=0, \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

dos planos tangentes a la esfera $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0$ y hallar sus ecuaciones.

35. Demostrar que por la recta $x=4t+4$, $y=3t+1$, $z=t+1$ se puede trazar solamente un plano tangente a la esfera

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0,$$

y hallar su ecuación.

II CUÁDRICAS

1. Verificar que la línea de intersección del plano $x-2=0$ y el elipsoide

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1 ,$$

es una elipse; hallar sus semiejes y sus vértices .

2. Verificar que la línea de intersección del plano $z+1=0$ y el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ es una hipérbola; hallar sus semiejes y sus vértices .

3. Verificar que la línea de intersección del plano $y+6=0$ y el paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ es una parábola; hallar su parámetro y el vértice.

4. Hallar las ecuaciones de las proyecciones sobre los planos coordenados de la intersección del paraboloide elíptico. $y^2 + z^2 = x$ y el plano $x + 2y - z = 0$.

5. Averiguar qué línea se forma en la intersección del elipsoide $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ con el plano $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ y hallar su centro.

6. Averiguar qué línea se forma en la intersección del paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y$ con el plano $3x - 3y + 4z + 2 = 0$ y hallar su centro.

7. Averiguar qué líneas se determinan por las ecuaciones siguientes :

1) $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1, \\ 9x - 6y + 2z - 28 = 0, \end{cases}$

y hallar el centro de cada una de ellas.

8. Hallar los valores de *m* para los cuales la intersección del plano $x + mz - 1 = 0$ con el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ sea :

a) una elipse , b) una hipérbola.

9. Hallar los valores de *m* para los cuales la intersección del plano $x + my - 2 = 0$ con el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y$ sea :

a) una elipse , b) una parábola

10. Demostrar, que el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$ tiene un punto común con el plano $2x - 2y - z - 10 = 0$ y hallar sus coordenadas

11. Demostrar que el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ tiene un punto común con el plano $5x + 2z + 5 = 0$ y hallar sus coordenadas

12. Demostrar que el elipsoide $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ tiene un punto común con el plano $4x-3y+12z-54=0$ y hallar sus coordenadas.

13. Hallar el valor de m para que el plano $x-2y-2z+m=0$ sea tangente al elipsoide $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$

14. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{n}=(2;-1;-2)$ y tangente al paraboloide elíptico $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=2z$.

15. Trazar los planos tangentes al elipsoide $4x^2+16y^2+8z^2=1$ que son paralelos al plano $x-2y+2z+17=0$ y calcular la distancia entre los planos hallados.

16. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por rotación de la elipse

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$ en torno del eje Oy.

17. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la elipse.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$ alrededor del eje Ox.

18. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$ alrededor del eje Oz.

19. Demostrar que el elipsoide escaleno determinado por la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, se puede obtener como resultado de una rotación de la elipse

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$ alrededor del eje Ox y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxy.

20. Demostrar que el hiperboloide de una hoja, determinado por la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ se puede obtener por rotación de la hipérbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$ en torno del eje Oz y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxz.

21. Demostrar que el paraboloide elíptico, determinado por la ecuación $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, se puede obtener por rotación de la parábola

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0 \end{cases}$$ en torno del eje Oz y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxz.

22. Demostrar que las intersecciones del plano $2x-12y-z+16=0$ con el paraboloide hiperbólico $x^2-4y^2=2z$ son generatrices de éste. Hallar las ecuaciones de estas generatrices.

23. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el origen de coordenadas, si las ecuaciones de la directriz son :

$$\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$$

24. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto (0 ; 0 ; c), si las ecuaciones de la directriz son :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

25. Hallar la ecuación del cono cuyo vértice está en el punto (3; −1; −2), si las ecuaciones de la directriz son :

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x-y+1=0. \end{cases}$$

26. La recta $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ es el eje de un cono circular cuyo vértice está situado en el plano Oyz. Hallar la ecuación de este cono, si se sabe que el punto $M_1\left(1;1;-\frac{5}{2}\right)$ está situado en su superficie.

27. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto $S(5;0;0)$, si las generatrices son tangentes a la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

28. Hallar la ecuación del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $\bar{b}=(2;-3;4)$, si las ecuaciones de la directriz son.

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=1. \end{cases}$$

29. Hallar la ecuación del cilindro, si se dan las ecuaciones de la directriz

$\begin{cases} x^2-y^2=z, \\ x+y+z=1 \end{cases}$ y las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz.

30. Las generatrices de un cilindro circunscrito en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ son perpendiculares al plano $x+y-2x-5=0$.

Hallar la ecuación de este cilindro.

31. Las generatrices de un cilindro circunscrito en la esfera

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$$

son paralelas a la recta $x=2t-3$, $y=-t+7$, $z=-2t+5$.

Hallar la ecuación de este cilindro .

III. COORDENADAS CILINDRÍCAS Y ESFÉRICAS

1. Expresar las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) a coordenadas rectangulares :

a) $\left(4,\frac{5\pi}{3},3\right)$, b) $(5,0,2)$, c) $\left(4,\frac{\pi}{2},-2\right)$, d) $\left(2,\frac{\pi}{3},1\right)$

e) $\left(3,\frac{-\pi}{4},1\right)$, f) $\left(4,\frac{7\pi}{6},3\right)$, g) $\left(1,\frac{3\pi}{2},1\right)$

2. Expresar el punto (x,y,z) en coordenadas cilíndricas :

a) $\left(1,\sqrt{3},2\right)$, b) $(0,5,1)$, c) $\left(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4\right)$

d) $\left(1,\sqrt{3},4\right)$, e) $\left(\sqrt{3},-1,2\right)$, f) $(2,-2,-4)$, g) $(-3,2,-1)$

3. Expresar cada punto (x,y,z) a coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) :

a) $(4,0,0)$, b) $(1,1,1)$, c) $\left(-2,2\sqrt{3},4\right)$,

d) $\left(2,2,4\sqrt{2}\right)$, e) $\left(\sqrt{3},1,2\sqrt{3}\right)$, f) $(-4,0,0)$.

4. Pasar el punto dado de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares :

a) $\left(4,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$, b) $\left(12,\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{9}\right)$, c) $\left(12,-\frac{\pi}{4},0\right)$

d) $\left(9,\frac{\pi}{4},\pi\right)$, e) $\left(5,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$, f) $\left(6,\pi,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Pasar el punto dado de coordenadas cilíndricas a coordenadas esféricas :

a) $\left(4,\frac{\pi}{4},0\right)$, b) $\left(2,\frac{2\pi}{3},-2\right)$, c) $\left(4,-\frac{\pi}{6},6\right)$

d) $\left(-4,\frac{\pi}{3},4\right)$, e) $(12,\pi,5)$, f) $\left(4,\frac{\pi}{2},3\right)$.

6. Pasar el punto dado de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas :

a) $\left(10,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, b) $\left(4,\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{2}\right)$, c) $\left(6,-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$,

d) $\left(5,-\frac{5\pi}{6},\pi\right)$, e) $\left(8,\frac{7\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$, f) $\left(7,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

7. Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y graficarlas.

a) $r=2$, b) $z=2$, c) $\theta=\frac{\pi}{6}$, d) $r=\frac{z}{2}$,

e) $r=2\,\text{sen}\,\theta$, f) $r=2\cos\theta$, g) $r^2+z^2=4$, h) $z=r^2\,\text{sen}^2\,\theta$

8. Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para la ecuación dada en coordenadas esféricas. Graficarlas.

a) $\rho=2$, b) $\theta=\frac{3\pi}{4}$, c) $\phi=\frac{\pi}{3}$, d) $\phi=\frac{\pi}{2}$,

e) $\rho=4\cos\phi$, f) $\rho=2\sec\phi$, g) $\rho=\text{cosec}\,\phi$, h) $\rho=4\,\text{cosec}\,\phi\,\sec\theta$

9. Encontrar una ecuación en coordenadas *i*) cilíndricas y *ii*) esféricas, para la superficie dada :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, b) $4(x^2 + y^2) = z^2$, c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$,

d) $x^2 + y^2 = z$, e) $x^2 + y^2 = 4y$, f) $x^2 + y^2 = 16$

g) $x^2 - y^2 = 9$, h) $y = 4$.

10. Dibuje el sólido que se describe en coordenadas cilíndricas :

a) $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$, $r \le z \le a$

b) $0 \le \theta \le 2\pi$, $2 \le r \le 4$, $z^2 \le -r^2 + 6r - 8$.

11. Dibuje el sólido que se describe en coordenadas esféricas :

a) $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$, $0 \le \rho \le a \sec \phi$

b) $0 \le \theta \le 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 2$.

RESPUESTAS

I. LA ESFERA

1.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 81$;
2. $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$;
3. $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 36$;
4. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$;
5. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$;
6. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
7. $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 56$;
8. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$;
9. $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 81$;

2. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$ y $x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$

3. $R = 5$

4. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=4$;

5. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$;

6. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$;

7. 1. $C(3,-2,5)$, $r=4$; 2. $C(-1,3,0)$, $r=3$;
3. $C(2,1,-1)$, $r=5$; 4. $C(0,0,3)$, $r=3$;
5. $C(0,-10,0)$, $r=10$;

8. $x=5t-1$, $y=-t+3$, $z=2t-0.5$;

9. $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-3}=\frac{z+\frac{1}{2}}{4}$

10. 1) fuera de la esfera
2) y 5) en la superficie
3) y 4) dentro de la esfera

11. a) 5 ; b) 21 ; c) 7 .

12. 1) El plano corta a la esfera 2) el plano es tangente a la esfera
3) el plano pasa por fuera de la esfera

13. 1) La recta corta a la esfera ; 2) la recta pasa por fuera de la esfera;
3) la recta es tangente a la esfera.

14. $M_1(-2,-2,7)$, $d=3$

15. $C(-1,2,3)$, $R=8$.

16. $\begin{cases}(x-1)^2\ (y-2)^2\ (z-1)^2=36\\ 2x-z-1=0\end{cases}$

17. $\begin{cases}(x-1)^2\ (y+1)^2\ (z+2)^2=65\\ 18x-22y+5z-30=0\end{cases}$

18. $\begin{cases}(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27\\ x+y-2=0\end{cases}$

19. $5x - 8y + 5z - 7 = 0$

20. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$,

21. $x^2 + y^2 + z^2 + 13x - 9y + 9z - 14 = 0$,

22. $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 41$,

23. $6x - 3y - 2z - 49 = 0$,

24. $(2 , -6 , 3)$,

25. $a = \pm 6$,

26. $2x - y - z + 5 = 0$

27. x , $x + y$, $y + z$, $z = r^2$,

28. $A^2 R^2 + B^2 R^2 + C^2 R^2 = D^2$,

29. $(x_1 - \alpha)(x - \alpha) + (y_1 - \beta)(y - \beta) + (z_1 - \gamma)(z - \gamma) = r^2$

30. $3x - 2y + 6z - 11 = 0$, $6x + 3y + 2z - 30 = 0$,

31. $x + 2y - 2z - 9 = 0$, $x + 2y - 2z + 9 = 0$,

32. $4x + 3z - 40 = 0$, $4x + 3z + 10 = 0$,

33. $4x + 6y + 5z - 103 = 0$, $4x + 6y + 5z + 205 = 0$,

34. $2x - 3y + 4z - 10 = 0$, $3x - 4y + 2z - 10 = 0$,

35. $x - y - z - 2 = 0$,

II CUÁDRICAS

1. 3 , $\sqrt{3}$; $(2;3;0), (2;-3;0), \left(2;0;\sqrt{3}\right)$, $\left(2;0;-\sqrt{3}\right)$

2. 4 , 3 ; $(4;0;-1)$, $(-4;0;-1)$

3. $15\,;\left(0\,;-6\,;-\frac{3}{2}\right)$

4. Las ecuaciones de las proyecciones :

a) sobre el plano Oxy : $\begin{cases} x^2+4xy+5y^2-x=0\,, \\ z=0\,, \end{cases}$

b) sobre el plano Oxz : $\begin{cases} x^2-2xz+5y^2-4x=0\,, \\ y=0\,, \end{cases}$

c) sobre el plano Oyz : $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0\,, \\ x=0\,. \end{cases}$

5. Una elipse; el centro de esta elipse es $(2\,;-1\,;1)$.

Nota: El centro de la proyección es la proyección del centro de la sección.

6. Una hipérbola; el centro de esta hipérbola es $(1\,;-1\,;-2)$.

7. 1) Una elipse; el centro de esta elipse es $(-1\,;1\,;3)$;
2) una parábola; no tiene centro ;
3) una hipérbola; el centro de esta hipérbola es $(2\,;-3\,;-4)$.

8. a) $1<|m|<\sqrt{2}$; b) $|m|<1$

9. a) $m\neq 0$ y $m\geq -\frac{1}{4}$, pero, si $m=-\frac{1}{4}$ resulta una elipse degenerada, un punto ;

b) $m=0$.

10. $(9\,;5\,;-2)$

11. $(3\,;0\,;-10)$

12. $(6\,;-2\,;2)$

13. $M=\pm 18$

14. $2x-y-2z-4=0$

15. $x-2y+2z-1=0,$
$x-2y+2z+1=0\,;\ \frac{2}{3}$.

16.

17. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$

18. $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

19.

20.

21.

22. $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y+4=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x+2y-8=0. \end{cases}$

23. $x^2+y^2-z^2=0$.

24. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$

25. $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$

26. $35x^2+35y^2-52z^2-232xy-116xz+116yz+232x-70y-116z+35=0$

27. $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0$

28. $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-23=0$

29. $x^2-y^2-2xz+2yz+x+y-2z=0$

30. $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$

31. $45x^2+72y^2+45z^2+36xy+72xz-36yz+54x+216y-54z-567=0$

III. COORDENADAS CILINDRÍCAS Y ESFÉRICAS

1. a) $\left(-2\sqrt{3},2,3\right)$, b) $(5,0,2)$ d) $\left(1,\sqrt{3},2\right)$

2. a) $\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right)$ si $r > 0$ y θ en cuadrante I , $\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right)$ si $r > 0$ y θ en el cuadrante III , b) $\left(5, \frac{\pi}{2}, 1\right)$, d) $\left(2, \frac{\pi}{3}, 4\right)$.

3. a) $\left(4, 0, \frac{\pi}{2}\right)$, c) $\left(4\sqrt{2}\ ,\ 2\pi/3\ ,\ \pi/4\right)$.

4. a) $\left(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$, c) $(0, 0, 12)$

5. a) $\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, c) $\left(2\sqrt{13}, -\frac{\pi}{6}, \arccos\left[3 \mid \sqrt{13}\right]\right)$

6. a) $\left(10, \frac{\pi}{6}, 0\right)$, c) $\left(6\operatorname{sen} 6\ ,\ \frac{-\pi}{6}\ ,\ 6\cos 6\right)$

7. a) $x^2 + y^2 = 4$, c) $x - \sqrt{3}\, y = 0$, c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

8. a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, c) $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$

e) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$, g) $x^2 + y^2 = 1$.

9. a) *i*) $r^2 + z^2 = 16$, *ii*) $\rho = 4$;

c) *i*) $r^2 + (z-1)^2 = 1$, *ii*) $\rho = 2\cos\phi$

e) *i*) $r = 4\operatorname{sen}\theta$, *ii*) $\rho = 4\operatorname{sen}\theta \operatorname{cosec}\phi$,

g) *i*) $r^2 = \frac{9}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$, *ii*) $\rho^2 = \frac{9\operatorname{cosec}^2\phi}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$.

CAPÍTULO 3

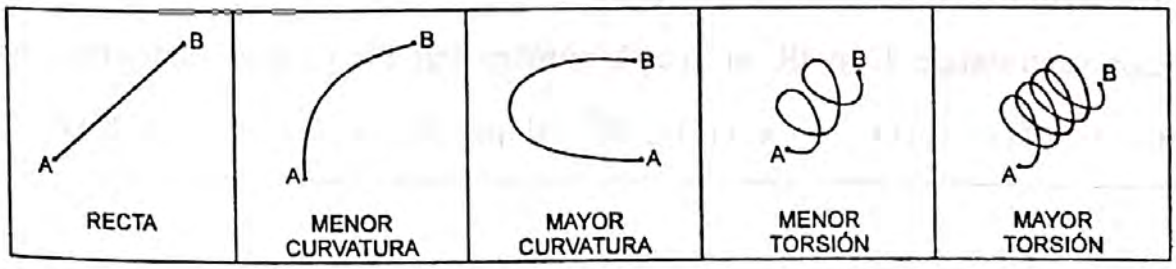
FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$$

(CURVAS)

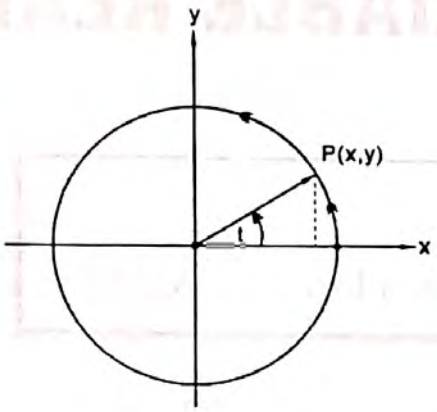
3.1 INTRODUCCIÓN

El tratado más importante, en este capítulo, es lo referente al estudio de dos características cualitativas de las curvas en $\mathbb{R}^3$, estos son la curvatura (k) y la torsión (τ) que describen el comportamiento local de la curva. Físicamente, podemos imaginar una curva en $\mathbb{R}^3$ como resultado de someter un alambre (recta) a combamiento (curvatura) y atornillamiento (torsión).

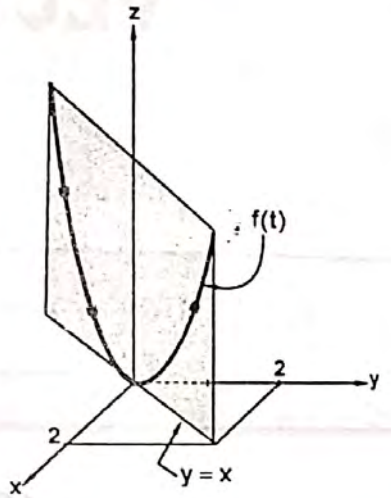


El estudio de las curvas sólo es posible cuando se las expresa en forma paramétrica. Las parametrizaciones son funciones de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ o funciones de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Como vemos, son funciones que dependen de un sólo parámetro tales como:

$$\alpha : [0 , 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos t , \operatorname{sen} t)$$
$$\text{donde} \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$



$$f : [-2 , 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow f(t) = \left(t , t , \tfrac{1}{2}t^2\right)$$



3.2 FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

Definición

Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$, diremos que f es una función vectorial de I en $\mathbb{R}^n$ si "a cada número real $t \in I$ corresponde el único vector $(x_1 , (t) , x_2 (t) , \ldots , x_n (t)) \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(t) = (x_1 (t), \ldots , x_n (t))$.

Notación:
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow (x_1 (t) , x_2 (t) , \ldots , x_n (t) = f(t)$$

Ejemplos:

FUNCIONES DE I EN IR^2

$$f : I \longrightarrow IR^3 \ , \ I \subseteq IR$$
$$t \longrightarrow (x_1(t) , x_2(t)) = f(t)$$

EJEMPLOS:

1. La recta en IR^2

$$\vec{\alpha}(t) = P_o + t\,\vec{a} \quad , \quad t \in IR$$

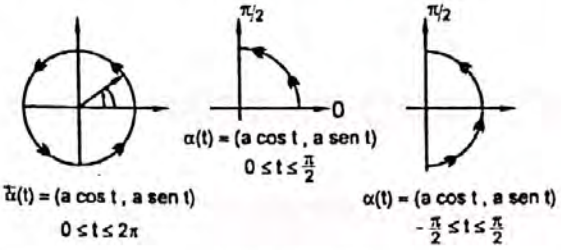
donde : $P_0 = (x_0 , y_0)$ *punto fijo de IR^2.*

$\vec{a} = (a_1 , a_2)$ *vector paralelo a la recta*

2. La ecuación vectorial de un segmento de recta que une dos puntos $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$, siendo la dirección de P_1 a P_2, es:

$$\alpha(t) = P_1 + t\,(P_2 - P_1) \ , \ 0 \le t \le 1$$

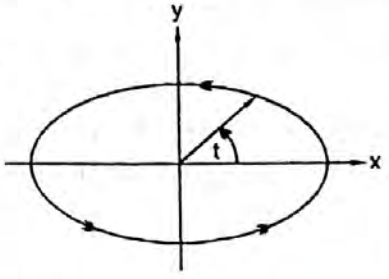
3. Parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ o parte de ella.



4. Parametrización de la Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases}$$
$$0 \le t \le 2\pi$$



$$\vec{\alpha}(t) = (a\cos t , b\,\text{sen}\, t) , 0 \le t \le 2\pi$$

FUNCIONES DE I EN IR^3

$$f : I \longrightarrow IR^3 \ , \ I \subseteq IR$$
$$t \longrightarrow (x_1(t) , x_2(t) , x_3(t)) = f(t)$$

EJEMPLOS:

1. La recta en IR^3

$$\vec{\alpha}(t) = P_0 + t\,\vec{a} \ , \ t \in IR$$

donde: $P_0 = (x_0 , y_0 , y_0) \in IR^3$

$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ *vector paralelo a la recta.*

2. Si $P_1(x_1 , y_1 , z_2)$ y $P_2(x_2 , y_2 , z_2)$ definen el segmento dirigido, $\overrightarrow{P_1 P_2}$, entonces su ecuación vectorial es:

$$\vec{f}(t) = P_1 + t(P_2 - P_1) , 0 \le t \le 1$$

3. La hélice:

$$\alpha(s) = \left(a\cos\tfrac{s}{c} , a\,\text{sen}\,\tfrac{s}{c} , b\,\tfrac{s}{c}\right), s \in IR$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$

4. $\vec{r}(t) = (4t , -4t , 2t) \quad , \quad t \in IR$

5. $\vec{r}(t) = \left(t , t^2 , \frac{t^2}{2}\right) \quad , \quad t \in IR$

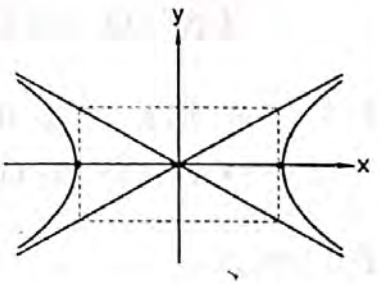
6. $\vec{r}(t) = \left(t , 3t^2 , \frac{t^2}{2}\right) \quad , \quad t \in IR$

7. $\vec{r}(t) = (4t , 3\cos t , \text{sen}\, t) \quad , \quad t \in IR$

8. $\vec{r}(t) = (e^t \cos t , e^t\,\text{sen}\, t , e^t) , \ t \in IR$

5. Parametrización de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\vec{\alpha}(t) = (a \cdot \cos h\, t\,,\ b \cdot \operatorname{sen} h\, t)$$

$$\cos h\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,,\quad \operatorname{sen} h\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cos h^2 t - \operatorname{sen} h^2 t = 1$$

9. $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t\,,\ \operatorname{sen} t\,,\ \cos t\right)$

$0 \le t \le \pi$

10. $\vec{r} = (e^t \operatorname{sen} t\,,\ 0\,,\ e^t \cos t)$

$0 \le t \le \pi$

Nota:

¿Por qué es importante parametrizar una curva?.

Si la curva es el recorrido de un proyectil, entonces la posición del proyectil en el instante t_0 es $\vec{r}(t_0)$. Con la representación paramétrica podemos hallar fácilmente: la posición del proyectil, su velocidad en el instante t_0, su aceleración, su curvatura, su torsión.

3.3 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE VARIABLE REAL

Dada la función vectorial $f(t) = (x_1(t)\,,\ x_2(t)\,,\ \ldots\,,\ x_n(t))$, cada componente x_i es una función real de variable real, por lo tanto el dominio de **f** dependerá de los dominios de cada componente x_i.

Así definimos:

a) **DOMINIO DE f**

$$\text{Dom}(f) = D_{x_1} \cap D_{x_2} \cap \ldots \cap D_{x_n}$$

↑ *intersección de los dominios de las funciones coordenaadas x_i*

b) **RANGO O IMAGEN DE f**

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial tal que $f(t) = (x_1(t)\,,\ \ldots\,,\ x_n(t))$, definimos $\text{Im}(f) = \{(x_1(t)\,,\ \ldots\,,\ x_n(t)) / t \in I\}$, donde $\text{Im}(f) = f(I)$.

c) **LA TRAZA DE f**

El conjunto imagen $f(I) \subset \mathbb{R}^3$ se denomina la traza de f.

Ejemplo Dado: $f(t) = (t , t\sqrt{t})$

En este caso tenemos: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = \sqrt{t}$

$D_{x_1} = \mathbb{R}$ $D_{x_2} = \mathbb{R}$ $D_{x_3} = [0 , +\infty\rangle$

Luego:

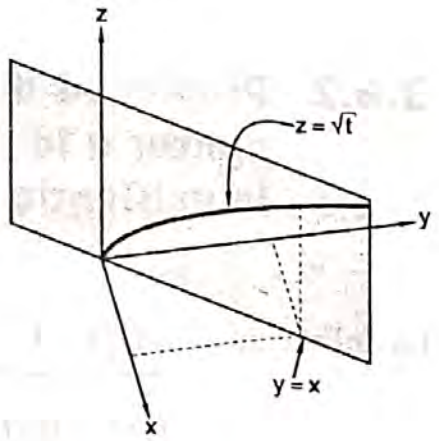
a) $\text{Dom}(\mathbf{f}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap [0 , +\infty\rangle = [0 , +\infty\rangle$

b) $\text{Im}(\mathbf{f}) = \left\{(t , t , \sqrt{t} / t \in [0 , +\infty\rangle\right\}$

Hacer: $x = t$, $y = t$, $z = \sqrt{t}$

se obtiene: $y = x$, $z = \sqrt{x}$ (parábola contenida en el plano $y = x$).

c) $\text{Gr}(\mathbf{f}) = \left\{(x_1 , x_2 , x_3 , t) / t \in [0 , +\infty\rangle\right\}$



LÍMITE, CONTINUIDAD Y DERIVADA

Los conceptos y definiciones de límite, continuidad y derivada de una función vectorial $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{x}_1(t) , \mathbf{x}_2(t) , \ldots , \mathbf{x}_n(t))$, $t \in I$ depende de la existencia de límite, continuidad y derivada de cada función componente $\mathbf{x}_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en algún punto $t_0 \in I$ o un punto frontera de I que se estudia en el curso de cálculo elemental.

3.4 EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

3.4.1 Definición

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y sea t_0 un punto de acumulación de I. Se dice que el límite de la función $\mathbf{f}$ cuando t tiende a t_0 es el vector $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$, lo cual se escribe como:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$t \in I \wedge 0 < |t - t_0| < \delta$ entonces $\| f(t) - \mathbf{L} \| < \varepsilon$

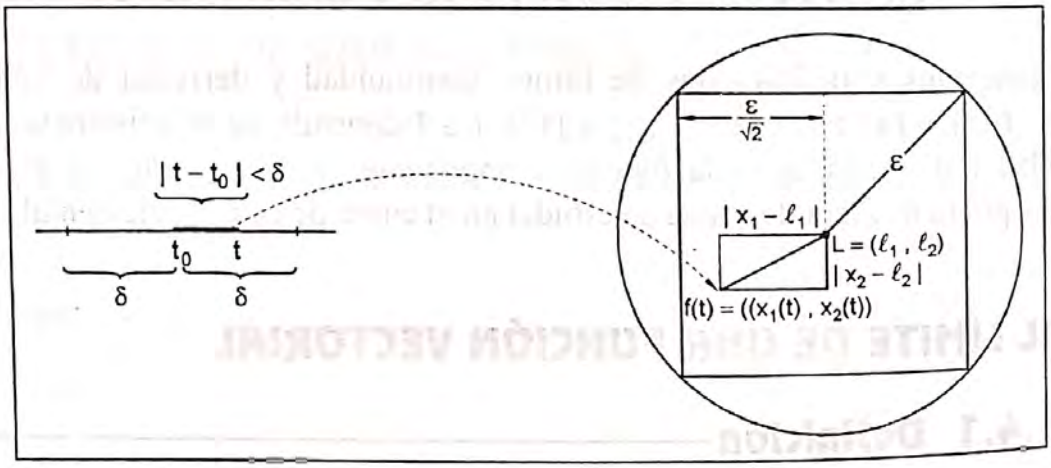
Notación: La notación $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = L$ se lee "límite de la función f(t) es igual al vector L si la variable t se acerca al número real t_0"

3.4.2 Propiedad de la norma de un vector que es necesario aplicar a la definición 3.4.1 cuando se quiere verificar la existencia de limites de funciones vectoriales.

La definición: $\underbrace{\| \mathbf{f}(t) - \mathbf{L} \| < \varepsilon}$ siempre que $\underbrace{0 < |t - t_0| < \delta \ \wedge \ t \in \mathbf{I}}$

$f(t) \in B(\mathbf{L}, \varepsilon)$ $\qquad$ $t \in \langle t_0 - \delta , t_0 + \delta \rangle \cap D_f , \ t \neq t_0$

nos indica que $t \in \langle t_0 - \delta , t_0 + \delta \rangle \cap I$ implica que $f(t) \in B(\mathbf{L}, \varepsilon)$.



Tenemos:

1) $B(L, \varepsilon) = \{ f = (x_1(t), x_2(t)) / \| ((x_1(t), x_2(t)) - (\ell_1, \ell_2) \| < \varepsilon \}$ es una bola abierta de centro en $L = (\ell_1, \ell_2)$ y radio ε.

2) $\| (x_1(t), x_2(t)) - (\ell_1, \ell_2) \| = \sqrt{(x_1(t) - \ell_1)^2 + (x_2(t) - \ell_2)^2}$

PROPIEDAD: $\underbrace{\sqrt{(x_1-\ell_1)^2+(x_2-\ell_2)^2}}_{\text{longitud del vector } (x_1-\ell_1\,,\,x_2-\ell_2)} < \underbrace{|x_1-\ell_1|+|x_2-\ell_2|}_{\text{suma de las longitudes de las componentes del vector } (x_1-\ell_1\,,\,x_2-\ell_2)}$

donde: $|x_1-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; $|x_2-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

3) La condicional:

$\left(|x_1-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \wedge |x_2-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \sqrt{(x_1-\ell_1)^2+(x_2-\ell_2)^2}<\varepsilon$ es una implicación, siempre que el punto $(x_1\,,\,x_2)$ esté dentro del cuadrado inscrito de lado $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo

Dado la función vectorial $f(t)=\left(2t\,,\frac{t^3-2t^2}{t-2}\right)$, $t\neq 2$

a) ¿Existe el $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$?

b) Probar la existencia del $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$ aplicando la definición 4.1

Solución:

a) En primer lugar, tenemos $I=\langle-\infty\,,2\rangle \cup \langle 2\,,+\infty\rangle$ es el dominio de la función vectorial f(t).

b) En segundo lugar, se tiene que "2" es un punto de acumulación del intervalo I y $2\notin I$

c) En el tercer lugar, el cálculo del $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$ y su existencia dependerá del cálculo y la existencia de los límites de las funciones componentes de f(t). Así tendremos:

$$\lim_{t\to 2} f(t)=\left(\lim_{t\to 2} 2t\ ,\ \lim_{t\to 2}\frac{t^2(t-2)}{t-2}\right)\ ,\ t\neq 2$$

$$=\left(\lim_{t\to 2} 2t\ ,\ \lim_{t\to 2} t^2\right)=(4\,,4)$$

b) Demostrar que $\lim_{t\to 2}(2t, t^2) = (4, 4)$

Prueba:

Dado: $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |t-2| < \delta$ implica,

$\|(2t, t^2) - (4, 4)\| < \varepsilon$.

Búsqueda de δ en Términos de ε

Partir de $\|(2t, t^2) - (4, 4)\|$, hacer sus respectiva definición y acotar apropiadamente con fin de obtener δ en términos de ε.

Veamos:

$$\|(2t, t^2) - (4, 4)\| = \sqrt{(2t-4)^2 + (t^2-4)^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

A continuación debemos acotar: a) $|2t-4|$ y b) $|t^2-4|$ teniendo en cuenta la hipótesis $|t-2| < \delta$ y los límites de las funciones componentes.

a) Si $\lim_{t\to 2} 2t = 4$ entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que:

$|t-2| < \delta_1 \Rightarrow |2t-4| < \varepsilon$.

Buscar δ_1 en Términos de ε

$|2t-4| = 2|t-2|$. Como $|t-2| < \delta_1 \Rightarrow 2|t-2| < 2\delta_1$

Es decir : $\boxed{|2t-4| < 2\delta_1}$ ..... (2)

Elegir $2\delta_1 = \varepsilon \Rightarrow \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

Así tendremos: $|2t-4| < \varepsilon$ siempre que $|t-2| < \delta_1$

b) Si $\lim_{t\to 2} t^2 = 4$ entonces dado $\varepsilon > 0$, existe δ_2 tal que $0 < |t-2| < \delta_2$ implica $|t^2-4| < \varepsilon$.

Búsqueda de δ_2 en Términos de ε

$|t^2-4| = |t+2|\,|t-2|$ ..... (3)

Como $|t-2| < \delta_2$ ..... (4)

hacer $|t-2| < \delta_2 < 1 \Rightarrow |t-2| < 1$

Pero $|t+2| = |t-2+4| < |t-2| + 4 < 1 + 4 = 5$

$\Rightarrow |t+2| < 5$ ..... (5)

Por (4) y (5) en (3) se cumple: $|t^2-4| < 5\,\delta_2$ ..... (6)

Hacer $5\delta_2 = \varepsilon \Rightarrow \delta_2 = \frac{\varepsilon}{5}$ y elegir $\delta_2 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$

Así tendremos: $|t^2-4| < \varepsilon$ siempre que $|t-2| < \delta_2$ ..... (7)

Volver a (1):

$$\|(2t, t^2)-(4,4)\| \sqrt{|2t-4|^2 + |t^2-4|^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \sqrt{2}\,\varepsilon$$

este resultado no deseamos.
Queremos que sea sólo ε.

Para obtener el resultado deseado debemos hacer:

a) En (1): $|2t-4| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ con $\delta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

b) En (7): $|t^2-4| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ con $\delta_2 = \min\left\{1, \frac{1}{5}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$

Por tanto, si elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple:

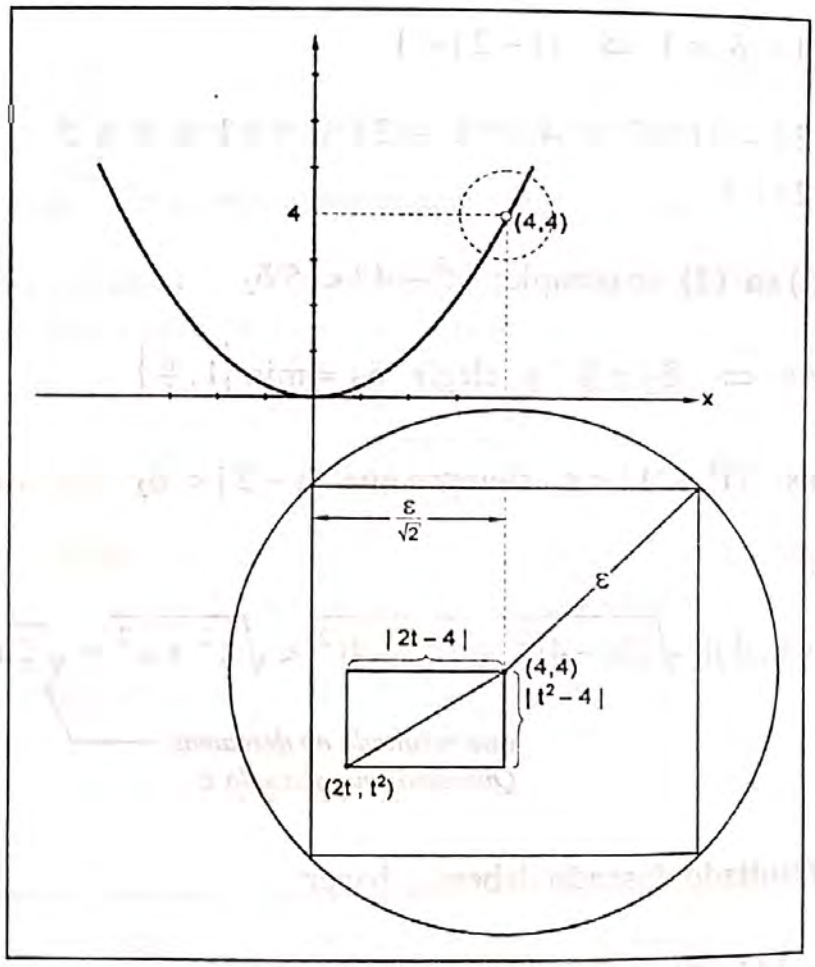
$$\|(2t, t^2)-(4,4)\| = \sqrt{|2t-4|^2+|t^2-4|^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$$

lqqd

ILUSTRACIÓN GRÁFICA:

En $f(t) = (2t\,,\, t^2)\ ,\ t \neq 2$ hacer $\begin{cases} x = 2t \ \Rightarrow \ t = \frac{x}{2} \\ y = t^2 \ \Rightarrow \ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$

$$4y = x^2 \quad \textit{(parábola)}$$



Donde:

a) $B((4\,,\,4)\,,\,\varepsilon) = \{\,(x,y)\ /\ \|\,(x,y) - (4\,,\,4)\,\| < \varepsilon\,\}$ es una bola abierta de centro en $(4,4)$ y radio ε.

b) La desigualdad $\|\,(2t\,,\,t^2) - (4,4)\,\| < \varepsilon$ indica que el punto $(2t\,,\,t^2)$ está dentro de la bola $B_\varepsilon(4\,,\,4)$ y por ello "La distancia de $(2t\,,\,t^2)$ al centro $(4,\,4)$ es menor que ε".

c) Las desigualdades $|2t-4| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $|t^2-4| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

implica $\sqrt{(2t-4)^2 + (t^2-4)^2} < \varepsilon$ siempre que $|t-2| < \delta$.

3.4.3 Teorema 1

Sea $\mathbf{L} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ una función de $D_f \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, y "t_0" un punto de acumulación de D_f. Entonces $\lim_{t \to t_o} f(t) = L$ si y sólo si $\lim_{t \to t_0} x_i(t) = \ell_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración:

Debo probar que $p \Rightarrow q \ \wedge \ q \Rightarrow p$

$(p \Rightarrow q)$ Si $\lim_{t \to t_0} f = L$ entonces $\lim_{t \to t_0} x_i(t) = \ell_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Si $\lim_{t \to t_0} f = L$ se debe probar que dado $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|x_i(t) - \ell_i| < \varepsilon$ siempre que $t \in D_{x_i}$ y $0 < |t - t_o| < \delta$.

Veamos:

Si $\lim_{t \to t_0} f = L$ entonces dado $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\|f - L\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \ell_1)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \quad \text{siempre que } t \in D_f \text{ y } 0 < |t - t_o| < \delta.$$

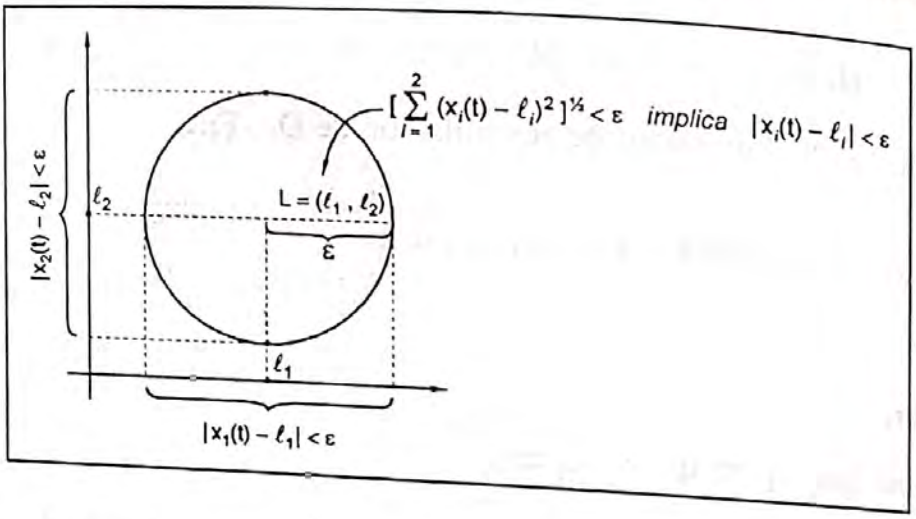
Pero la desigualdad $\|f - L\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \ell_1)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon$ implica que $|x_i(t) - \ell_i| < \varepsilon$ para cada $i = 1, 2, \ldots n$.

siempre que $t \in D_{x_i} = D_f$ y $0 < |t - t_0| < \delta$. Esto prueba que :

$$\lim_{t \to t_0} x_i(t) = \ell_i, \ (i = 1, 2 \ldots, n)$$

■

Nota: Si $n = 2$ en el espacio $\mathbb{R}^2$ si tiene la siguiente figura.



$(q \Rightarrow p)$

Si $\lim_{t \to t_0} x_i(t) = \ell_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ entonces $\lim_{t \to t_0} f(t) = L$.

Debo probar que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\| f(t) - L \| < \varepsilon$ siempre que $t \in D_f \wedge 0 < |t - t_0| < \delta$.

Veamos:

Si $\lim_{t \to t_0} x_i(t) = \ell_i$ entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_i > 0$ tal que $|x_i(t) - \ell_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ siempre que $t \in D_{x_i}$ y $0 < |t - t_0| < \delta_i$.

Eligiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ se cumple que:

$$\|f(t) - L\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \ell_1)^2\right]^{1/2} < \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^{1/2} = \varepsilon$$

siempre que $t \in D_f$ y $0 < |t - t_0| < \delta$. Esto prueba que $\lim_{t \to t_0} f(t) = L$

Comentario:

El teorema 1 nos indica que la función vectorial:

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

tiene límite en "t_0" si y sólo si cada función componente $x_i(t)$ tiene límite en "t_0".

Ejemplos

1 Sea la función vectorial $f(t)=\left(2t\,,\,\frac{t^2-4}{t-2}\,,\,\frac{\operatorname{sen}(t-2)}{t-2}\right)$, $t\neq 2$

¿existe $\lim_{t\to 2} f(t)$?

Solución:

$$\lim_{t\to 2} f(t)=\left(\lim_{t\to 2} 2t\;,\;\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t-2}\;,\;\lim_{t\to 2}\frac{\operatorname{sen}(t-2)}{t-2}\right)$$

$$=(4\,,4\,,1)\,,$$

Sí, existe $\lim_{t\to 2} f(t)=(4\,,4\,,1)$

2 Dado la función vectorial $f(t)=\left(t-1\,,\,t\,,\,\frac{|t|}{t}\right),\ t\neq 0$ ¿existe $\lim_{t\to 0} f$?

Solución:

No, por que $\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}$ es 1 cuando $t\longrightarrow 0^+$ y es -1 cuando $t\longrightarrow 0^-$.

3.4.4 Suma, Diferencia, Producto Interno y Producto Vectorial de Funciones Vectoriales.

Definición

Si **f** y **g** son funciones vectoriales con rangos en $\mathbb{R}^n$ y dominios D_f y D_g en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\mathbf{f}-\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ son funciones con dominio $D_f\cap D_g$ y reglas de correspondencia :

$$[\mathbf{f}+\mathbf{g}](t) = \mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t)$$
$$[\mathbf{f}-\mathbf{g}](t) = \mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)$$
$$[\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}](t) = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$$
$$[\mathbf{f}\times\mathbf{g}](t) = \mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t) \quad \text{(definida solo en } \mathbb{R}^3\text{)}$$

Si **f** es una función vectorial y φ es una función real de una variable real, entonces la función $\varphi\mathbf{f}$ está definida por $[\varphi\,\mathbf{f}](t)=\varphi(t)\,\mathbf{f}(t)$, $D_{\varphi f}=D_\varphi\cap D_f$.

3.4.5 Teorema 2.

Si **f** y **g** son funciones vectoriales de una variable real tales que:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f} = \mathbf{L} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to t_0} \mathbf{g} = \mathbf{M}$$

y t_0 es un punto de acumulación de $D_f \cap D_g$, entonces:

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{f} + \mathbf{g}] = \lim_{t \to t_0} \mathbf{f} + \lim_{t \to t_0} \mathbf{g} = \mathbf{L} + \mathbf{M}$$

3.5 CONTINUIDAD

Definición 1

Sea $\mathbf{f} : I \subseteq IR \longrightarrow IR^n$ una función definida en un subconjunto abierto I de IR y sea $t_0 \in I$. Se dice que **f** es continua en t_0 si .

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

Definición 2

Sea $f : I \subseteq IR \longrightarrow IR^n$. La función f es continua en el punto $t_0 \in I$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $t \in I \wedge |t - t_0| < \delta$ implica $\| f(t) - f(t_0) \| < \varepsilon$.

TEOREMA 3

Sea $f : I \subseteq IR \longrightarrow IR^3$ una función definida en el intervalo abierto I de IR y sea $f(t) = (x_1(t) , x_2(t) , \dots , x_n(t))$. La función **f** es continua en $t_0 \in I$ si y sólo si sus funciones coordenadas $x_i : I \subseteq IR \longrightarrow IR$ son continuas en t_0.

Una función $f : I \subseteq IR \longrightarrow IR^n$ es continua en el intervalo abierto I si es continua en cada $t \in I$.

Ejemplo 1 La función $f : IR \longrightarrow IR^2$ definida por $f(t) = (1 - t , t^2 + 2)$, es continua en todo IR, porque sus funciones coordenadas son polinomios y los polinomios son continuas en todo IR.

Ejemplo 2 Sea la función $f : IR \longrightarrow IR^3$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} \left(2t , t^2 , \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right), & t \neq 0 \\ (0,0,0), & t = 0 \end{cases}$$

¿Es f continua en $t = 0$?

Analicemos:

Paso 1. $f(0) = (0 , 0 , 0)$, esto quiere decir que f está definido en $t = 0$:

Paso 2. Estudiemos el límite de f en $t = 0$:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \left(\lim_{t \to 0} 2t , \lim_{t \to 0} t^2 , \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)$$

$$= (0,0,1)$$

Paso 3. Comparar:

Como $\lim_{t \to 0} f(t) \neq f(0)$, afirmamos que f no es continua en $t = 0$.

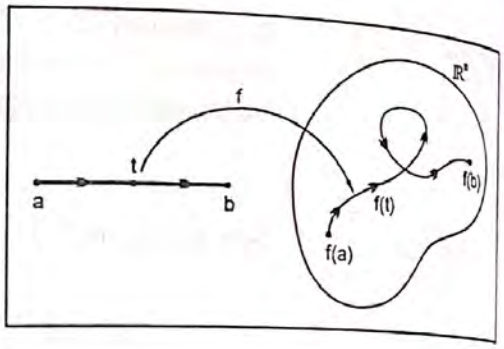
3.6 CAMINOS EN IR^n

En este capítulo estudiaremos los conceptos de : Camino o trayectoria, punto inicial y punto final de un camino, camino cerrado, camino simple, camino CERRADO simple y traza de un camino (curva).

3.6.1 Definición 1

Una función $f : I \subseteq IR \longrightarrow IR^n$ **CONTINUA** en el intervalo I se llama **CAMINO** o **TRAYECTORIA** en el espacio IR^n.

Si el intervalo es cerrado, digamos I = [a , b], decimos que f es continua en [a , b] , si:



a) f es continua en $\langle a , b\rangle$, y si;

b) $\lim_{t \to a^+} f = f(a)$ y $\lim_{t \to b^-} f = f(b)$

Ejemplo 1 Sea la función $f : \langle 0 , +\infty\rangle \longrightarrow IR^2$ definida por $f(t) = \left(t , \frac{1}{t}\right)$.

Como f(t) es continua en el intervalo $\langle 0 , +\infty\rangle$, entonces f(t) es un camino en el espacio IR^2.

Pero la función $f(t) = \begin{cases} (t , \frac{1}{t}) , & \text{si } t \neq 0 \\ (0 , 0) , & \text{si } t = 0 \end{cases}$

no es un camino en el espacio IR^2, porque es discontinua en t = 0. La discontinuidad es infinita en la segunda coordenada $x_2(t) = \frac{1}{t}$, pues $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ y

$\lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$. Es decir no existe límite en $t = 0$.

Ejemplo 2 La función $f(t) = \begin{cases} (t , \frac{|t|}{t}) , & t \neq 0 \\ (0 , 0) , & t = 0 \end{cases}$ no es un camino, porque es discontinua en t = 0. Pues en la segunda coordenada $x_2(t) = \frac{|t|}{t}$ se tiene:

a) $\lim_{t \to 0^+} \frac{|t|}{t} = 1$ y $\lim_{t \to 0^-} \frac{|t|}{t} = -1$

b) Los límites a la derecha e izquierda de t = 0 existen pero son diferentes.

3.6.2 Punto Inicial y Punto Final de un Camino

Si un camino está definido en un intervalo cerrado [a,b]. Es decir $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$, diremos que $f(a)\in \mathbb{R}^n$ es el punto inicial del camino y $f(b)\in \mathbb{R}^n$ es el punto final del camino.

Ejemplo 3 Sea el camino $f:[-2,2]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(t)=(t^3-t,\,t^2-1)$. El punto inicial es $f(-2)=(-6,3)$ y el punto final es $f(2)=(6,3)$. Ver fig. 1

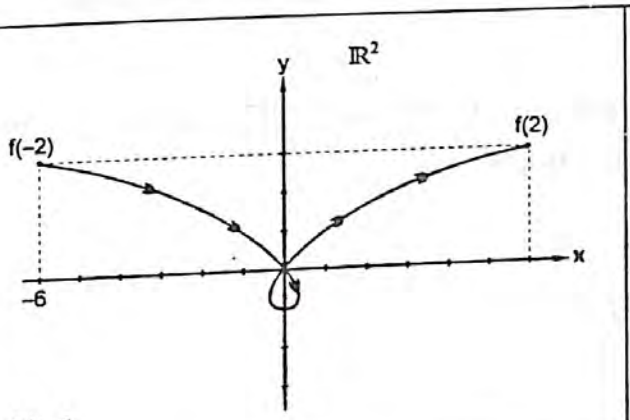


Fig. 1

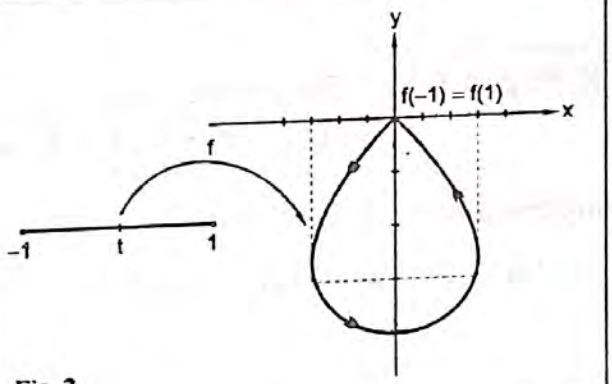


Fig. 2

3.6.3 Camino Cerrado

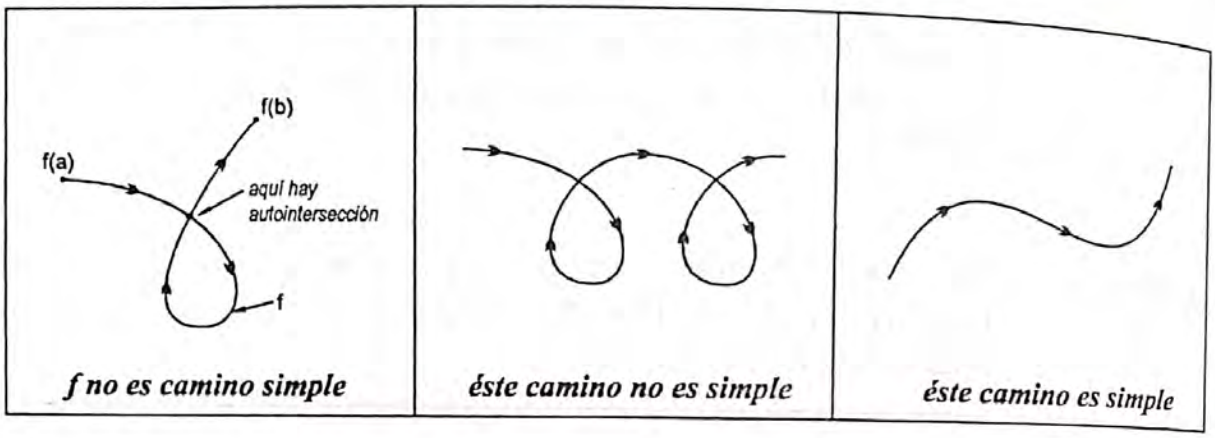
Sea la función continua $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que f es un camino cerrado, si $f(a)=f(b)$.

Ejemplo 4 Sea la función $f:[-1,1]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $f(t)=(t^3-t,\,t^2-1)$. $f(t)$ es un camino cerrado, porque $f(-1)=f(1)=(0,0)$. Ver fig. 2.

3.6.4 Camino Simple

Si la función continua $f:I\subseteq \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^n$ es INYECTIVA en I diremos que f es un camino simple. Geométricamente, un camino f es simple, si no se autointersecta.

Ejemplos Gráficos:



f no es camino simple | *éste camino no es simple* | *éste camino es simple*

Ejemplo 5 Demuestre que el camino $f: IR \longrightarrow IR^2$ definido por $f(t) = (t^2 + 1 , t^2 - 1)$ no es simple.

Demostración:

Si pruebo que $f(t_1) = f(t_2)$ implica $t_1 = t_2$ para todo $t_1 , t_2 \in IR$, diremos que f es inyectiva.

Veamos: $f(t_1) = f(t_2)$ es $(t_1^2 + 1 , t_1^2 - 1) = (t_2^2 + 1 , t_2^2 - 1)$

Por igualdad de vectores: $t_1^2 + 1 = t_2^2 + 1 \ \wedge \ t_1^2 - 1 = t_1^2 - 1$

$t_1 = \pm t_2 \qquad t_1 = \pm t_2$

En ambos casos se cumplen las igualdades $t_1 = t_2$ o $t_1 = -t_2$ donde $t_1 , t_2 \in IR$. Esto contradice la definición, pues debe ser sólo $t_1 = t_2$.

Por tanto, f no es inyectiva en IR.

Pero, si la misma función se define así $f: \langle 0 , +\infty \rangle \longrightarrow IR^2$. Entonces f es inyectiva, puesto que sólo se cumple $t_1 = t_2$ para todo $t_1 , t_2 \in \langle 0 , +\infty \rangle$.

3.6.5 Camino Cerrado Simple

Sea la función $f: [a , b] \longrightarrow IR^n$. Si se cumple que $f(a) = f(b)$ y la función f restringida al intervalo $[a , b\rangle$ es INYECTIVA, diremos que f es un camino cerrado simple.

3.6.6 Traza de un Camino

Definición 2

Se llama traza del camino $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ al conjunto de las imágenes de f, es decir:

$$\text{traza } f = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}^n \,/\, t \in I \right\}$$

Ejemplo 6 La traza del camino $f(t) = (a\cos t\,,\, a\,\text{sent})$, $t \in [0\,,\, 2\pi]$ es un circunferencia de radio a en el espacio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7 La traza del camino $f(t) = (r\cos t\,,\, r\,\text{sent}\,,\, t)$ es una curva que se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. Esta curva se llama hélice.

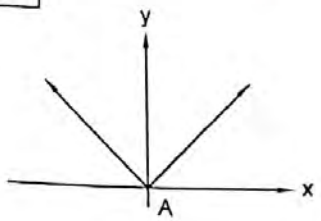
Nota: Con la palabra CURVA designaremos a la traza de f

Ejemplo 8 La traza del camino $f(t) = (a\cos t\,,\, b\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0\,,\, 2\pi]$ es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3.7 DIFERENCIABILIDAD. CURVAS REGULARES

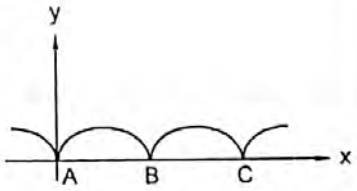
Necesitamos detectar ¿cuándo una curva tiene algún "pico"? Como por ejemplo en los puntos A, B, C, D.

Fig. 1



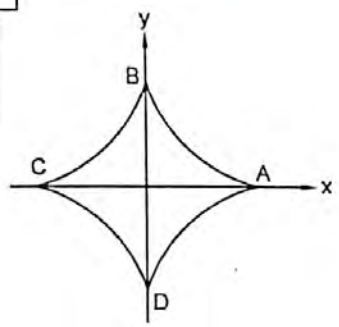
$f(t) = (t^3\,,\, t^2|t|)$
$t \in \langle -\infty\,,\, \infty \rangle$

Fig. 2



$f(t) = a(t - \text{sen}\,t\,,\, 1 - \cos t)$
$t \in \langle \infty -\,,\, \infty \rangle$

Fig. 3



$f(t) = (\cos^3 t\,,\, \text{sen}^3\,t)$
$t \in [0\,,\, 2\pi]$

Para detectar dichos "picos" necesitamos definir y responder las interrogantes: ¿Cuándo la función f es diferenciable en un intervalo I?. ¿La derivada de f es continua en I?
¿La derivada f ' es diferente de cero para todo $t \in I$?

En la fig. 1, se tiene la función vectorial $f(t) = \begin{cases} (t^3, t^3), & t \geq 0 \\ (t^3, -t^3), & t < 0 \end{cases}$

donde se puede apreciar lo siguiente:

1. $f'(t) = \begin{cases} (3t^2, 3t^2), & t \geq 0 \\ (3t^2, -3t^2), & t < 0 \end{cases}$ f es derivable en todo $t \in IR$

2. $f'(t)$ es continua en todo $t \in IR$

3. $f'(t) = (0,0)$ en $t = 0$

Cuando una función vectorial continua f, tiene derivada continua en un intervalo I y su derivada es cero en algún punto $t_0 \in I$, diremos que $f(t_0)$ es un "pico" de la curva (matemáticamente hablando, f no es regular en $t = 0$). A continuación se dan las definiciones pertinentes.

3.7.1 Definición 1.

Dado el camino $f : I \subseteq IR \longrightarrow IR^n$, se dice que f es f derivable en $t_0 \in I$ si existe el límite.

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + t_0) - f(t_0)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Se lee "derivada de f en t_0" que también se denota por $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Si f es diferenciable en todo $t \in I$, decimos que f es diferenciable en I.

3.7.2 Teorema 4

Si $f(t) = (x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,\ \ldots\ ,\ x_n(t))$, entonces
$f'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$ donde el dominio de f' es la intersección de los dominios de las derivadas $x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)$.

Nota: Este teorema nos dice que: existe $f'(t)$ si y sólo si existen cada uno de los límites $\lim_{h\to 0} \dfrac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} = x_i'(t)$.

3.7.3 Definición 2

Se dice que la función vectorial $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 si f y f ' son continuas en I.

Ejemplo 1 Sea la función vectorial $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(t) = (t\ ,\ |t|)$. ¿Es f de clase C^1?

Solución:

a) $f(t)$ es continua en todo IR.

b) $f(t)$ no es derivable en $t = 0$, porque la segunda función coordenada $x_2(t) = |t|$ no es derivable en $t = 0$.

$$\text{Pues: } x_2'(t) = \begin{cases} 1\ , & t > 0 \\ -1\ , & t < 0 \end{cases}$$

c) Además, $f'(t)$ no es continua en $t = 0$, porque $x_2(t)$ no es continua en $t = 0$. Por lo tanto, $f(t)$ no es de CLASE C^1.

Ejemplo 2 Sea la función $f(x) = (x^3, x^2|x|)$ cuyo dominio es $\langle -\infty\ ,\ +\infty \rangle$.

Se cumple:

a) f es continua en $\langle -\infty , +\infty \rangle$, b) f es diferenciable en $\langle -\infty , +\infty \rangle$

c) f ′ es continua en $\langle -\infty , +\infty \rangle$

Por lo tanto, f es de clase C^1.

Ejemplo 3 Sea la función $f : IR \longrightarrow IR^2$, definido por $f(t) = (t , t^{2/3})$.

Se tiene que $f(t)$ es continua en todo IR.

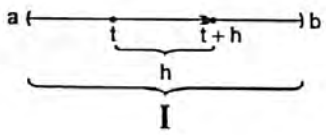
Al derivar la función $f(t) = (t , t^{2/3})$.

obtenemos: $f'(t) = \left(1 , \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} \right)$.

Observamos que no existe $f'(0)$, porque la segunda coordenada $x'_2(t) = \frac{2}{3\sqrt[3]{t}}$ no es de continua en $t = 0$.

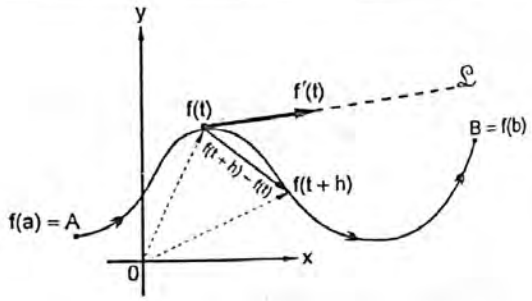
Por tanto, f no es de clase C^1.

3.7.4 Interpretación Geométrica de la Derivada



$t \in I$

$(t+h) \in I$



- f (t) es un radio vector
- f (t + h) es otro radio vector que se obtiene cuando t se mueve a t + h.
- f (t + h) − f(t) es el vector diferencia de los vectores f (t + h) y f (t). $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ es un vector paralelo al vector cuerda $f(t+h)-f(t)$.

Si f es diferenciable en t y $f'(t) \neq 0$, entonces la dirección del vector $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ se aproxima a la dirección del vector $f'(t)$ cuanto h se acerca a cero, puesto que

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Es el vector velocidad del camino f en el punto f(t).

3.7.5 Vector Velocidad (Vector Tangente). Rapidez. Recta Tangente.

Definición

Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable. Al vector no nulo $f'(t)$ se le llama **VECTOR VELOCIDAD** del camino en el punto $f(t) \in \mathbb{R}^n$.

Nota: El vector velocidad del camino f es el **VECTOR TANGENTE** de la curva C = traza de f.

Si una función $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ describe el movimiento de una partícula durante un intervalo de tiempo I, entonces $f'(t)$ es la **VELOCIDAD** y $\| f'(t) \|$ es la **RAPIDEZ** o velocidad modular de la partícula en el instante t.

3.7.6 Camino Regular.

Definición

Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1. Se dice que f es un **CAMINO REGULAR** si $f'(t) \neq \vec{0}$ $(\vec{0} \in \mathbb{R}^n)$ para todo $t \in I$.

Ejemplos Diga en qué puntos los siguientes caminos no son regulares :

a) $f(t) = (t^2 - 4 , t^3 - 8)$, $t \in \mathbb{R}$

b) $f(t) = (a \cos^3 t , b \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0 , 2\pi]$

Solución:

a) El camino es $f(t) = (t^2 - 4 , t^3 - 8)$, $t \in I = \langle -\infty , +\infty \rangle$

Derivar : $f'(t) = (2t , 3t^2)$, $t \in I = \langle -\infty , +\infty \rangle$

Como $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas para todo $t \in I = \langle -\infty , +\infty \rangle$, afirmamos que f es de clase C^1.

Los puntos en los cuáles $f(t)$ **NO** es regular se obtienen de resolver :

$$f'(t) = (0 , 0)$$

$$(2t , 3t^2) = (0 , 0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

En $t = 0$, existe un punto **NO** regular. El punto **NO** regular es: $f(0) = (-4\ ,\ -8)$.

b) Derivar la función $\quad f(t) = (a\cos^3 t\ ,\ b\ \text{sen}^3 t)$

$$f'(t) = (-3a\cos^2 t\ \text{sen}\ t\ ,\ 3b\ \text{sen}^2 t\cos t)$$

Como $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas en $[0\ ,\ 2\pi]$ afirmamos que f es de clase C^1.

Los puntos en los cuales $f(t)$ **NO** es regular se obtienen de resolver $f'(t) = (0,0)$:
$(-3a\cos^2 t\ \text{sen}\ t\ ,\ 3b\ \text{sen}^2 t\ \text{cost}\ ) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a\cos^2 t\ \text{sen}\ t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \ \vee\ \text{sen}\ t = 0 \\ 3b\,\text{sen}^2 t\cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \ \vee\ \text{sen}\ t = 0 \end{cases}$$

$$\text{De } \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{De sen}\ t = 0 \Rightarrow t = 0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi$$

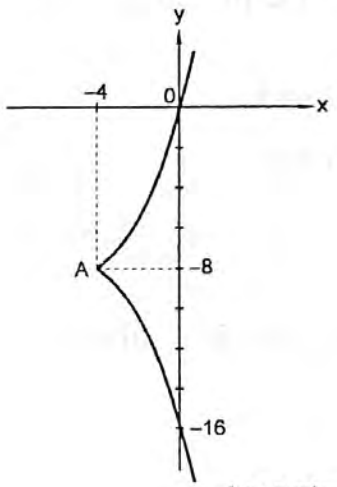
Como $0 \le t \le 2\pi$, entonces: $\quad t = 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\pi.$

Los puntos **NO** regulares son: $\quad f(0) = (a\ ,\ 0)\ ,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0\ ,\ b)\ ,$

$$f(\pi) = (-a\ ,\ 0)\ ,\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0\ ,\ -b)\ ,\ f(2\pi) = (a,\ 0)$$

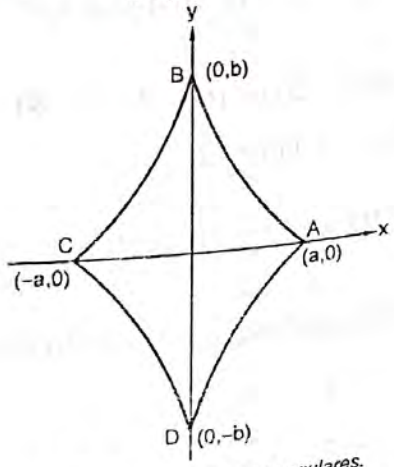
Ver los gráficos correspondientes:

traza de $f(t) = (t^2 - 4\ ,\ t^3 - 8)\ ,\ t \in \mathbb{R}$



A es punto no regular.

traza de $f(t) = (a\cos^3 t\ ,\ b\ \text{sen}^3 t)\ ,\ t \in [0\ ,\ 2\pi]$
$a < b$



A, B, C, D son puntos no regulares.

Nota: Si un camino no es regular en un punto $f(t_0)$, no podremos asociar en dicho punto una recta tangente ni un plano normal. Además no podremos hallar la longitud de un arco de curva si dentro del intervalo [a , b], exista algún $t_0 \in \langle a , b \rangle$ tal que $f(t_0)$ es no regular.

En consecuencia, para hallar la ecuación de una recta tangente, la ecuación de un plano normal y la longitud de un arco de curva, es necesario que los caminos sean **REGULARES** en todo el intervalo en que se define la función $f(t)$.

En adelante, trataremos sólo con caminos regulares.

3.7.7 Recta Tangente y Plano Normal

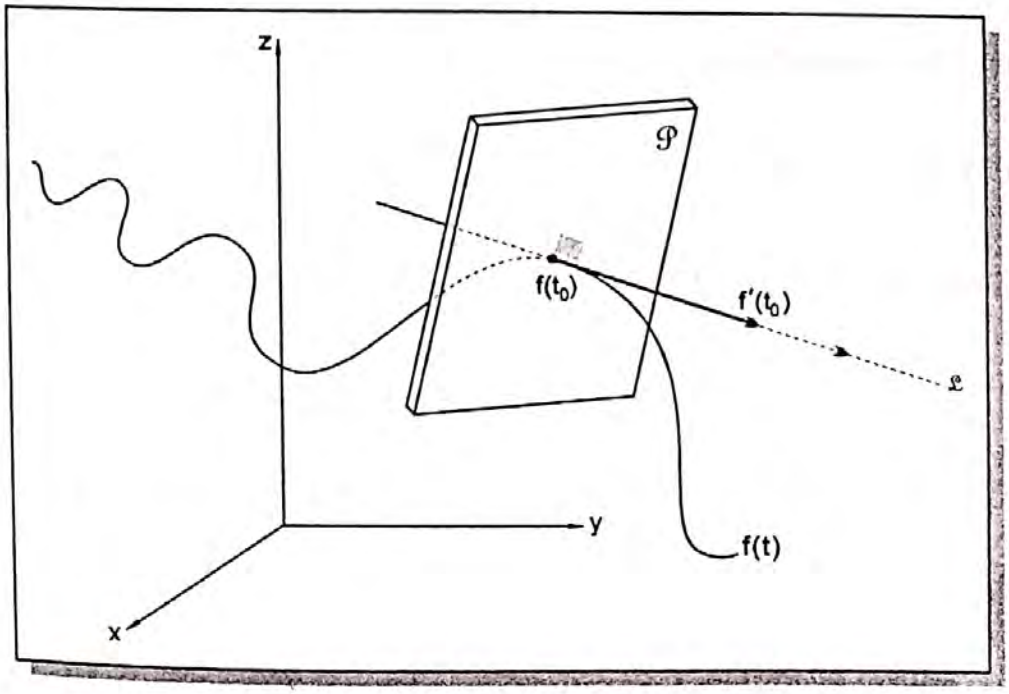
Sea $f : I \subseteq IR \longrightarrow IR^3$ un camino regular. Sea $t_0 \in I$

a) La **RECTA TANGENTE** a la curva $\mathcal{C}$ = **TRAZA** de f en el punto $f(t_0)$, es la recta en IR^3 que pasa por $f(t_0)$ y es paralelo a $f'(t_0)$.
Su ecuación vectorial es:

$$\mathfrak{L} : P = f(t_0) + s\, f'(t_0) \ , \ s \in IR$$

b) El **PLANO NORMAL** a la curva $\mathcal{C}$ = traza de f en el punto $f(t_0)$, es el plano en IR^3 que pasa por $f(t_0)$ y cuya normal es $f'(t_0)$.
Su ecuación es:

$$\mathcal{P} : f'(t_0) \cdot (P - f(t_0)) = 0$$



Ejemplo Dado la función $f : IR \longrightarrow IR^3$ definida por $f(t) = (\cos t , \text{sen } t , t)$, hallar:

a) El vector velocidad en el punto $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) La función rapidez

c) La rapidez en $t = \frac{\pi}{4}$

d) La ecuación vectorial de la recta en el punto $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

e) La ecuación del **PLANO NORMAL** en el punto $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Solución:

a) Derivar la función $f(t) = (\cos t , \text{sen } t , t)$

$f'(t) = (-\text{sen } t , \cos t , 1)$

En $t = \frac{\pi}{4}$ se tiene $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\text{sen}\frac{\pi}{4} , \cos\frac{\pi}{4} , 1\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , 1\right)$ ← *es el vector velocidad en $t = \frac{\pi}{4}$. A su vez es el vector tangente a la curva en el punto $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.*

b) La función **RAPIDEZ** es $\| f'(t) \| = (-\text{sent} , \text{cost} , 1) \|$

$= \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}$

$= \sqrt{2}$

En este caso, la función rapidez es una constante. Por lo general es una función real diferente de la constante.

c) La rapidez en $t = \frac{\pi}{4}$ es $\left\| f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \sqrt{2}$.

d) La ecuación vectorial de la recta tangente en $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es :

$$\mathcal{L} : P = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + s\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) , s \in IR \text{ donde } \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4} , \text{sen}\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{4}\right) \\ \qquad = \left(\cos\frac{\pi}{4} , \text{sen}\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{4}\right) \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , 1\right) \end{cases}$$

Entonces: $\mathcal{L} : P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\pi}{4} \right) + s\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , 1 \right) , \; s \in \mathbb{R}$

e) La ecuación del plano normal en $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, es:

$\mathcal{P} : \; f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(P - f\frac{\pi}{4} \right) = 0$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , 1 \right)\cdot\left((x,y,z) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(z - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{2}{4} + z - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$-2\sqrt{2}\,x + 2 + 2\sqrt{2}\,y - 2 + 4z - \pi = 0$$

$$\boxed{2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y - 4z + \pi = 0}$$

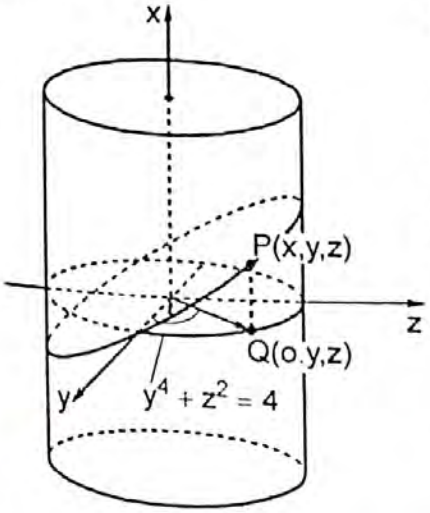
3.7.8 Parametrización de Curvas.

3.7.8.1 Parametrización de Curvas que son la Intersección de dos Superficies.

Al intersectarse dos superficies generan una curva $\mathcal{C}$ cuyas ecuaciones paramétricas deseamos hallar.

Ejemplo 1 Parametrizar la curva $\mathcal{C}$ que resulta de intersectar las superficies en $\mathbb{R}^3 : y^2 + y^2 = 1 \; , \; z = 2y$.

Solución:

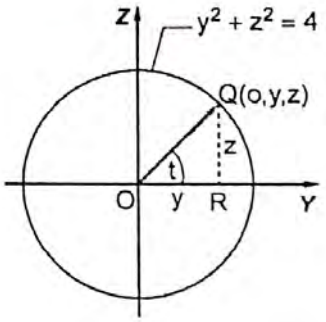


Porque el eje X es el eje del cilindro $S_1 : y^2 + z^2 = 4$ conviene proyectar la curva $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ sobre el plano YZ.

La técnica de parametrizar la curva C consiste en seguir los siguientes pasos:

1° Proyectar el punto $P(x,y,z) \in \mathcal{C}$ sobre el plano YZ, obteniéndose el punto $Q(O,Y,Z)$.

2° Porque Q pertenece a la circunferencia $y^2 + z^2 = 4$ del plano XY aplicamos coordenadas polares.



Entre el eje $\overrightarrow{OY}$ y el radio vector $\overrightarrow{OQ}$ se forma el ángulo "t". En el triángulo rectángulo ORQ se obtiene $\begin{cases} y = 2\cos t \\ z = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$

3° Como $P(x,y,z)$ pertenece al plano $S_2 : x = 2z$ y además $z = 2\operatorname{sen} t$ $\quad x = 2(2\operatorname{sen} t)$

$x = 4\operatorname{sen} t$

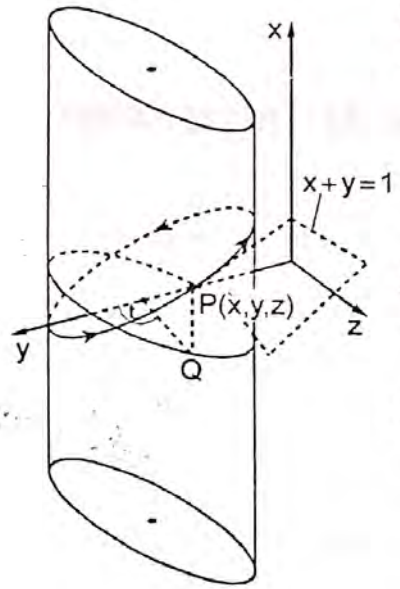
4° **CONCLUSIÓN:** La función vectorial que parametriza a la curva $\mathcal{C}$, es:

$$\vec{\alpha} : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (4\operatorname{sen} t, 2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$$

Ejemplo 2 En $\mathbb{R}^3$ parametrizar la curva $\mathcal{C} : \begin{cases} x + y = 1 \ldots\ldots \text{ PLANO} \\ z^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0 \ldots\ldots \text{ CILINDRO} \end{cases}$

Solución:



En primer lugar debemos completar cuadrados en el cilindro eliptico.

$$z^2 + 4(y^2 - 4y + \ldots) = -12$$

$$z^2 + 4(y^2 - 4y + 4) = -12 + 16 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{z^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1}$$

PASOS A SEGUIR:

1° Proyectar $P(x,y,z) \in \mathcal{C}$ sobre el plano YZ obteniéndose el punto Q(O,Y,Z).

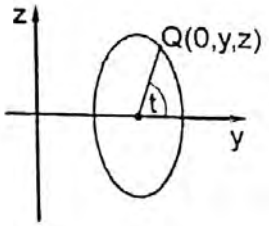
2° Porque Q pertenece a la elipse aplicamos coordenadas polares modificadas.

$$\begin{cases} y - 2 = \cos t \\ z = 2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

3° Como $P(x,y,z)$ pertenece al plano $x = 1 - y$, entonces

$x = 1 - (2 + \cos t)$

$x = -1 - \cos t$



CONCLUSIÓN:

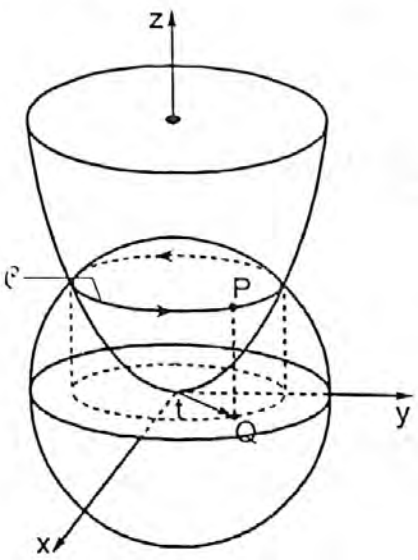
La función vectorial que parametriza a la curva $\mathcal{C}$, es:

$$\vec{\alpha} : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (-1 - \cos t \cdot 2 + \cos t \cdot 2\operatorname{sen} t)$$

Ejemplo 3 Parametrizar la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 6 \ \ldots\ldots\ldots \text{(esfera)} \\ S_2 : z = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(paraboloide)} \end{cases}$

Solución:



1° Hallar la intersección de $S_1 \cap S_2$ reemplazando:

$z = x^2 + y^2$ en S_1, obteniéndose:

$$z + z^2 = 6 \Longleftrightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Longleftrightarrow (z+3)(z-2) = 0$$
$$\Rightarrow z = 2$$

Reemplazando $z = 2$ en $S_2 : Z = x^2 + y^2$

Así, hemos obtenido la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ contenida en el plano $z = 2$.

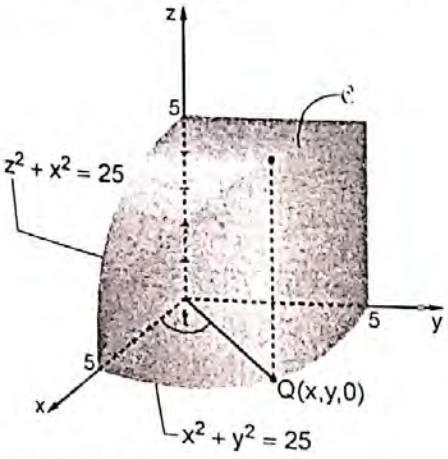
2° Proyectar el punto $P(x,y,z)$ sobre el plano XY obteniéndose el punto $Q(x,y,0)$ perteneciente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

El punto Q en coordenadas polares es $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$ con $0 \le t \le 2$

CONCLUSIÓN: La función vectorial que parametriza $\mathcal{C}$ es: $\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t, 2)$$

Ejemplo 4 Parametrizar la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z^2 + x^2 = 25 \end{cases}$ en el primer octante



1° Elegir el punto P(x,yz) de la curva $\mathcal{C}$ y proyectar sobre el plano XY obteniéndose el punto Q(x,y,0) que pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

2° Las coordenadas polares del punto Q son:

$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\operatorname{sen} t \end{cases}$ con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, por estar en el primer octante.

3° Como $P(x,y,z) \in \mathcal{C}$, entonces la coordenada z se obtiene reemplazando $x = 5\cos t$ en la ecuación $z^2 + x^2 = 25$, obteniéndose: $z^2 + 25\cos^2 t = 25 \Rightarrow z = 5 \operatorname{sen} t$.

CONCLUSIÓN: $\vec{\alpha} : [\alpha, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (5\cos t, 5\operatorname{sen} t, 5\operatorname{sen} t)$$

Ejemplo 5 Parametrizar la curva

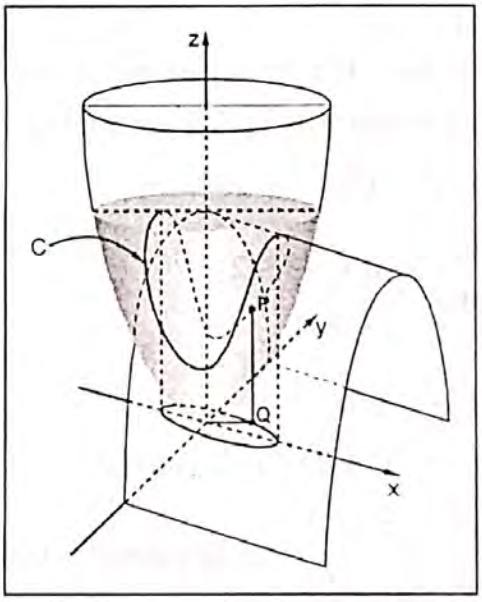
$$C:\begin{cases} z = 4 - y^2 \ \ldots\ldots\ (1)\ \text{Cilindro parabólico} \\ z = x^2 + 3y^2 \ \ldots\ldots\ (2)\ \text{Paraboloide} \end{cases}$$

Solución:

La proyección de la curva C sobre el plano XY es otra curva que se halla reemplazando (1) en (2):

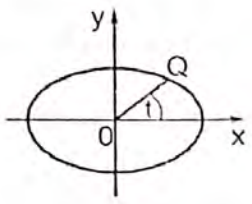
$$4 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \ \ldots\ldots\ (3)\ \text{es una elipse en XY}$$



- Al proyectar un punto $P(x,y,z) \in C$ es otro punto $Q = (x,y,0)$ que pertenece a la elipse (3).
- Las coordenadas polares modificadas del punto $Q = (x,y,0)$ que pertenece a la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Son: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$



- La coordenada "z" del punto P perteneciente a la curva C, se halla reemplazando $y = \operatorname{sen} t$ en (1):
- **CONCLUSIÓN:**

$$\vec{\alpha}:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

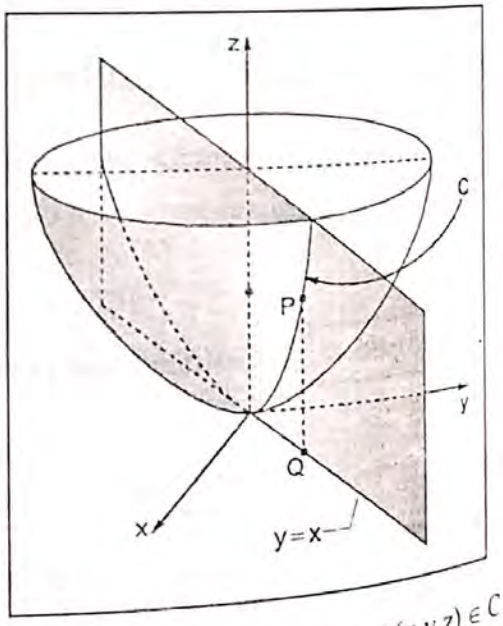
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 4 - \operatorname{sen}^2 t)$$

Ejemplo 6 Parametrizar la curva.

$$C:\begin{cases} y = x \ \ldots\ldots\ (1)\ \text{Plano} \\ x^2 + y^2 = z \ \ldots\ldots\ (2)\ \text{Paraboloide} \end{cases}$$

Solución:

1° En el gráfico observamos que la proyección de la curva C sobre el plano XY es la recta $y = x$.



2° Al proyectar un punto $P(x,y,z) \in C$ sobre el plano XY se obtiene el punto $Q(x,y,0)$ perteneciente a la recta $y = x$. En este caso, hagamos la parametrización natural, que consiste en hacer $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

Por las ecuaciones en (1) y (2), se obtienen $y = t$, $t^2 + t^2 = z \Rightarrow z = 2t^2$.

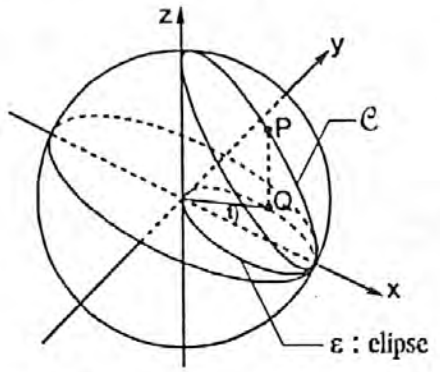
CONCLUSIÓN: La función vectorial que parametriza la curva C es:

$$\vec{\alpha}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (t, t, 2t^2)$$

Ejemplo 7 Parametrizar la curva:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \ \ldots\ldots\ldots \text{(1) Esfera} \\ x + z = 5 \ \ldots\ldots\ldots \text{(2) Plano} \end{cases}$$

Solución: Hacer el gráfico



La proyección de la curva $\mathcal{C}$ sobre el plano XY es otra curva cuya ecuación se halla despejando "z" del plano:

$$x + z = 5 \Rightarrow z = 5 - x \ \ldots\ldots\ldots (3)$$

para reemplazar en la ecuación (1):

$$x^2 + y^2 + (5 - x)^2 = 25$$

Desarrollar, simplificar y completar cuadrados; obteniendo la elipse:

$$\varepsilon: \frac{y^2}{\frac{25}{2}} + \frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

- Como Q(x,y,0) pertenece a la elipse ε, las coordenadas polares modificadas del punto Q son:

$$\begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\cos t \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos t \\ y = \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Luego, la función vectorial que parametriza la curva $\mathcal{C}$ es:

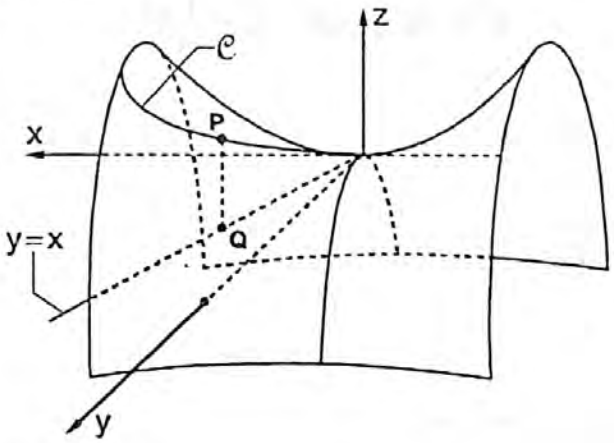
$\vec{\alpha}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$\vec{\alpha}(1) = \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos t, \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cos t\right)$$

Ejemplo 8 Parametrizar la curva:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} z = x^2 - y^2 \ldots\ldots \text{(Paraboloide hiperbólico)} \\ y = x \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Plano)} \end{cases}$$

Solución:



- La proyección de $\mathcal{C}$ sobre el plano XY es la recta $y = x$.
- La proyección del punto P(x,y,z) ∈ $\mathcal{C}$ esl el punto Q(x,y,0) pertenece a la recta $y = x$.
- En este caso, la parametrización será la NATURAL:
  Hacer $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Así obtenemos $y = t$, $z = 0$.

CONCLUSIÓN: $\alpha(t) = (t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 9 Parametrizar la curva:

$$C: \begin{cases} x^2 = 4y \ \ldots\ldots (1) \\ x^3 = 24z \ \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

La ecuación (1), es un cilindro parabólico.

La ecuación (2), es un cilindro cúbico.

Para parametrizar, bastará hacer:

$$x = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sustituir (3) en (1) y (2):

$$t^2 = 4y \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{1}{4}t^2$$

$$t^3 = 24z \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{1}{24}t^3$$

$$\text{Luego, } C: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{4}t^2 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{24}t^3 \end{cases}$$

Ejemplo 10 Parametrizar la curva que es intersección de las superficies:

$$\begin{cases} x^3 + z^3 = a^3 \ldots\ldots (1) \\ y^3 + z^3 = b^3 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

La ecuación (1) en el plano XZ es una curva, por esta razón en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, representa un cilindro.

De manera similar, la ecuación (2) es una curva en el plano YZ, pero es un cilindro en $\mathbb{R}^3$.

Al intersectarse (1) con (2) obtenemos una curva cuya parametrización se consigue, en este caso, haciendo $z = t$ (porque z es variable común en ambas ecuaciones).

Reemplazar $z = t$ en (1) y (2) para luego despejar "x" e "y", respectivamente:

En (1): $x^3 + t^3 = a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{a^3 - t^3}$

En (2): $y^3 + t^3 = b^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{b^3 - t^3}$

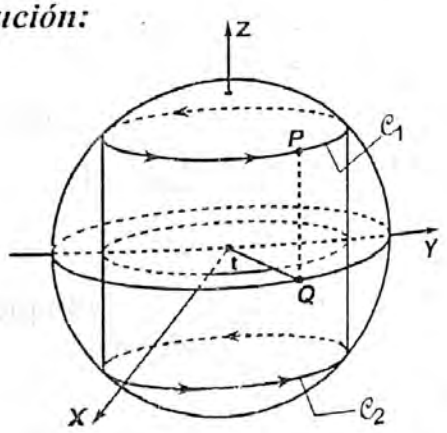
Luego:

$$C: \begin{cases} x = \sqrt[3]{a^3 - t^3} \\ y = \sqrt[3]{b^3 - t^3} \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 11 Parametrizar la curva

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \ldots\ldots (1) \text{ Cilindro} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \ldots\ldots (2) \text{ Esfera} \end{cases}$$

Solución:



(1) en (2): $2 + z^2 = 3 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

son planos paralelos al plano XY.

Para $z = 1$, en (2) obtenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ contenida en el plano $z = 1$. Su parametrización es:

$$\mathcal{C}_1:\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,t \\ z=1 \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

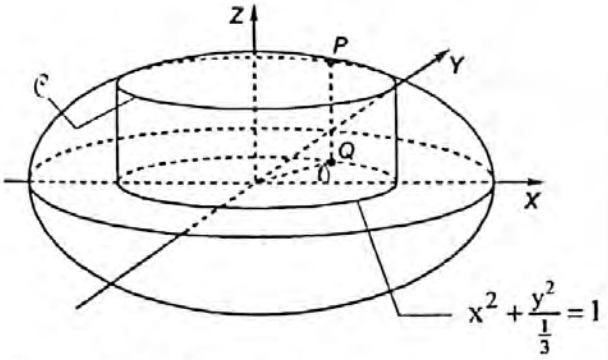
para $z=-1$, en (2), obtenemos:

$$\mathcal{C}_2:\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,t \\ z=-1 \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

Ejemplo 12 Parametrizar la curva

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+3y^2=1 \ \ldots\ldots \text{(1) cilindro elíptico} \\ x^2+3y^2+z^2=5 \ \ldots\ldots \text{(2) elipsoide} \end{cases}$$

Solución:



1° Sustituir (1) en (2):

$1+z^2=5 \Rightarrow z^2=4 \Rightarrow z=\pm 2$.

2° $z=2$, $x^2+3y^2=1$

$$x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$$

es una elipse contenido en el plano $z=2$. Se parametriza con coordenadas polares modificadas:

$$\mathcal{C}_1:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,t \\ z=2 \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

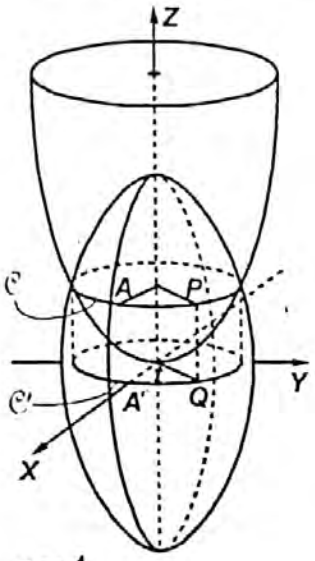
3° $z=-2$, $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$ es una elipse contenido en el plano $z=-2$, su parametrizaciones es:

$$\mathcal{C}_2:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,t \\ z=-2 \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

Ejemplo 13 Parametrizar la curva

$$\mathcal{C}:\begin{cases} 9x^2+4y^2+z^2=36 \text{ (Elipsoide) } \ldots\ldots \text{(1)} \\ 9x^2+4y^2=5z \text{ (Paraboloide) } \ldots \text{(2)} \end{cases}$$

Solución:



En primer lugar hallar la proyección de la curva C sobre el plano XY. Esto se obtiene reemplazando (2) en (1):

$z^2+5z-36=0 \Rightarrow z=4$

Entonces $\mathcal{C}': 9x^2+4y^2=20$

$$\frac{x^2}{\frac{20}{9}}+\frac{y^2}{5}=1$$

En segundo lugar, hallar las coordenadas polares del punto $Q\in\mathcal{C}'$.

$$x=\frac{2\sqrt{5}}{3}\cos t \ ,\quad y=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t$$

con t que varía sobre $[0,2\pi]$

Como $P=(x,y,z)\in\mathcal{C}$, entonces:

$$x=\frac{2\sqrt{5}}{3}\cos t \ ;\quad y=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t \ ;\quad z=4$$

CONCLUSIÓN: La curva C queda definida por: $\vec{\alpha}:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

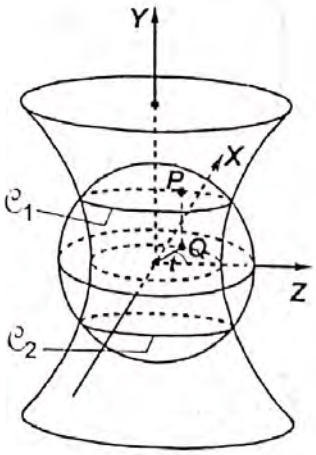
$$\vec{\alpha}(t)=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\cos t,\sqrt{3}\,\text{sen}\,t,4\right)$$

Ejemplo 14 Parametrizar la curva:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \ldots \text{(1) Esfera} \\ x^2-y^2+z^2=4 \ldots \text{(2) Hiperboloide de 1 hoja} \end{cases}$$

Solución:

De (2) : $x^2+z^2=4+y^2$ ..... (3)
(3) en (1) : $y=\pm 1$ ..... (4)
(4) en (2) : $x^2+z^2=5$ ..... (5)



El punto Q pertenece a (5), entonces:

$$\begin{cases} z=\sqrt{5}\cos t \\ x=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

con $0\le t\le 2\pi$

Hay dos curvas: $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

La parametrización de $\mathcal{C}_1$ es con $y=1$ y la de $\mathcal{C}_2$ es con $y=-1$.

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t \\ y=\pm 1 \\ z=\sqrt{2}\cos t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

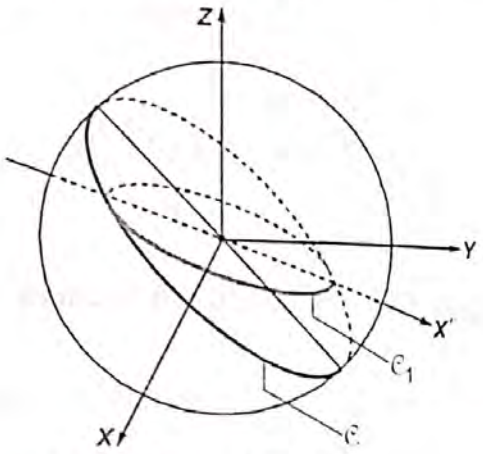
Ejemplo 15 Parametrizar la curva

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \ldots\ldots \text{(1) Esfera} \\ x+y+z=0 \ldots\ldots \text{(2) Plano} \end{cases}$$

Solución:

Al proyectar la curva $\mathcal{C}$ sobre el plano XY se obtiene otra curva, cuya ecuación rectangular se halla despejando z de (2):

$z=-x-y$ ..... (3)



Luego reemplazar (3) en (1):

$$x^2+y^2+(-x-y)^2=R^2$$
$$2x^2+2y^2+2xy=R^2 \ldots\ldots \mathcal{C}_1$$

La parametrización de la curva $\mathcal{C}_1$ contenida en el plano XY, es:

$$\mathcal{C}_1:\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\,\text{sen}\,t \end{cases} \text{ con } 0\le t\le 2\pi$$

donde: $x^2+y^2=r^2$

Hallemos r en $\mathcal{C}_1$:

$$2r^2+2(r\cos t)(r\,\text{sen}\,t)=R^2$$
$$2r^2+r^2\,\text{sen}\,2t=R^2$$
$$r=\frac{R}{\sqrt{2+\text{sen}\,2t}} \ldots\ldots (4)$$

Reemplazando (4) en $\mathcal{C}_1$ y en (3) se obtiene la parametrización de $\mathcal{C}$:

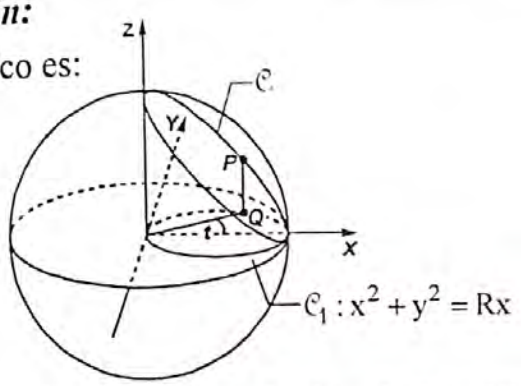
$$\mathcal{C}:\begin{cases} x=\dfrac{R\cos t}{\sqrt{2+\text{sen}\,2t}} \\ y=\dfrac{R\,\text{sen}\,t}{\sqrt{2+\text{sen}\,2t}}, \quad 0\le t\le 2\pi \\ z=-\dfrac{R}{\sqrt{2+\text{sen}\,2t}}(\cos t+\text{sen}\,t) \end{cases}$$

Ejemplo 16 Parametrizar la curva

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 & \ldots\ldots\ldots \text{(1) Esfera} \\ x^2+y^2=Rx & \ldots\ldots\ldots \text{(2) Cilindro} \end{cases}$$

Solución:

El grafico es:



La proyección de la curva $\mathcal{C}$ sobre el plano XY es la curva $\mathcal{C}_1$: $x^2+y^2=Rx$

Sea P(x,y,z) un punto de la curva $\mathcal{C}$.

La proyección de P sobre el plano XY es el punto Q(x,y,0) que pertenece a la curva $\mathcal{C}_1$.

Si elegimos como POLO el origen (0,0) del plano XY, las coordenadas polares del punto Q son:

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Debemos hallar "r":

De: $x^2+y^2=Rx$ obtenemos

$$r^2=Rr\cos t \Rightarrow r=R\cos t \ldots(4)$$

(4) en (3): $\begin{cases} x=R\cos t\cos t=R\cos^2 t \\ y=R\cos t\operatorname{sen} t=\frac{R}{2}\operatorname{sen} 2t \end{cases}$

$$\text{con } -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

Falta hallar la coordenada z del punto P.

(2) en (1): $Rx+z^2=R^2$

$$z^2=R^2-R(R\cos^2 t)$$

$$z=R\operatorname{sen} t$$

La función vectorial que parametriza la curva $\mathcal{C}$, es:

$$\vec{\alpha}:\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t\longmapsto \vec{\alpha}(t)=\left(R\cos^2 t,\tfrac{R}{2}\operatorname{sen} 2t,R\operatorname{sen} t\right)$$

Ejemplo 17 Parametrizar la curva

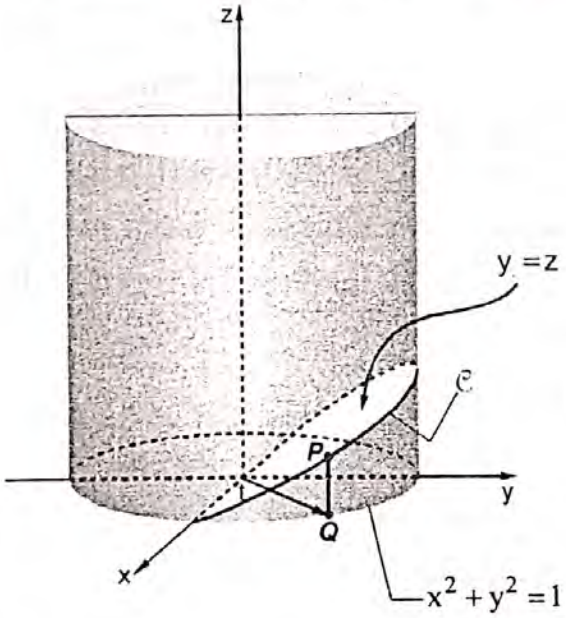
$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+y^2=1 & \ldots\ldots \text{(1) Cilindro} \\ y=z & \ldots\ldots \text{(2) Plano perpendicular al plano YZ.} \end{cases}$$

para $y\le 0$

Solución:

Sea P(X,Y,Z) un punto de la curva $\mathcal{C}$. Al proyectar el punto P sobre el plano XY se obtiene el punto Q(x,y,0) que pertenece a la circunferencia.

$$\mathcal{C}_1 : x^2+y^2=1, \text{ en el plano XY.}$$



Las coodenadas polares del punto Q son:

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases} \text{ en } 0\le t\le\pi$$

Falta hallar la coordenada z de P.

Como $z=y$, donde $y=\operatorname{sen} t$

$$\Rightarrow z=\operatorname{sen} t$$

CONCLUSIÓN: La función vectorial que parametriza la curva $\mathcal{C}$, es:

$$\vec{\alpha}:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t\longmapsto \vec{\alpha}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,\operatorname{sen} t)$$

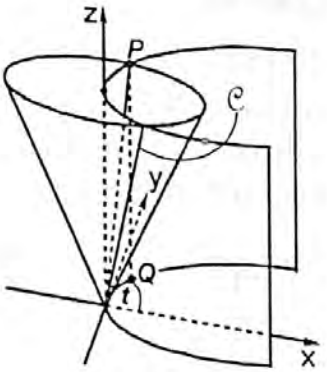
Ejemplo 18 Parametrizar la curva

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \ \ldots\ldots\ldots \text{(1) Cono} \\ y^2=ax \ \ldots\ldots\ldots \text{(2) Cilindro Parabólico} \end{cases}$$

desde el punto (0,0,0) hasta $(a,a,a,\sqrt{2})$.

Solución:

El gráfico es:



t = ángulo desde $\overrightarrow{OX}$ hasta $\overrightarrow{OQ}$

- Sea $P(x,y,z) \in \mathcal{C}$. La proyeccion de P es Q(x,y,0). Si (0,0) es el polo y el ángulo t es desde $\overrightarrow{OX}$ hasta el radio vector $\overrightarrow{OQ}$, entonces las coordenadas polares de Q son:

$$\left.\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\operatorname{sen} t \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Falta hallar r:

Como Q pertenece a la parábola $y^2=ax$ entonces: $r^2\operatorname{sen}^2 t = a\,r\cos t$

$$r=\frac{a\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Reemplazar (4) en (3): $\begin{cases} x=\dfrac{a\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\cos t = a\operatorname{ctg}^2 t \\ y=\dfrac{a\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\operatorname{sen} t = a\operatorname{ctg} t \end{cases}$

Falta hallar z de P:

(3) en (1): $r^2=z^2 \Rightarrow z=r=a\operatorname{ctg} t\cdot\csc t$

- Como $\overrightarrow{OQ}$ corre desde $\overrightarrow{OX}$ hasta (a,a), entonces $\operatorname{tg} t=\frac{a}{a} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

- Entonces $\mathcal{C}$ está parametrizada por:

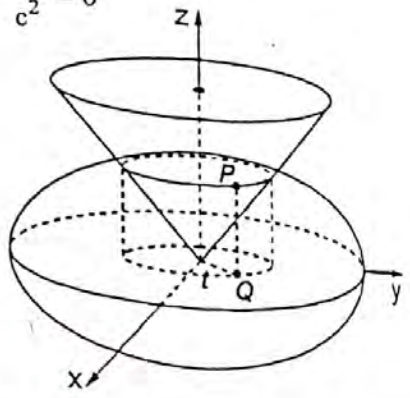
$\vec{\alpha}:[0,4/\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \vec{\alpha}(t)=(a\operatorname{ctg}^2 t, a\operatorname{ctg} t, a\operatorname{ctg} t\cdot\csc t)$$

Ejemplo 19 Parametrizar la curva $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}:\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \end{cases}$$

$z \geq 0$



Solución:

Al resolver las dos ecuaciones se obtiene: $z=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Al reemplazar en la primera ecuación se obtiene la elipse:

$$\varepsilon:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2} \iff \frac{x^2}{a^2/2}+\frac{y^2}{b^2/2}=1$$

Como $Q(x,y,0) \in \varepsilon$, entonces las coordenadas polares modificadas de Q son:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t \ \text{ con } 0\leq t\leq 2\pi$$

CONCLUSIÓN: la parametrización de $\mathcal{C}$ es:

$\vec{\alpha}:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r \mapsto \vec{\alpha}(t)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

Ejemplo 20 Parametrizar la curva:

$x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\operatorname{tg}\alpha\ (0<\alpha<\pi)$

Solución:

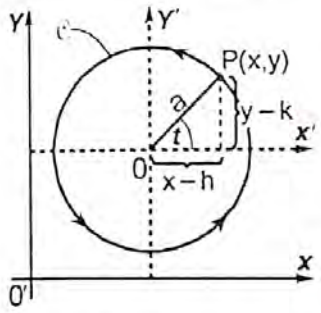
$x=a\cos\alpha\operatorname{sen} t$, $y=a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} t$,

$z=a\cos t$, $0\leq t\leq 2\pi$.

3.7.8.2 Parametrización de curvas planas que tienen centro

♦ La circunferencia, la elipse y la hipérbola son curvas planas que tienen centro.

a) La circunferencia $\mathcal{C}:(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ se parametriza con coordenadas polares, tomando como polo el centro (h,k) y haciendo.



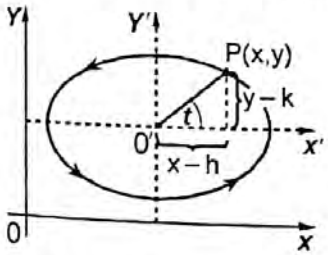
$$\begin{cases} x-h=a\cos t \\ y-k=a\operatorname{sen} t \end{cases}$$

El parámetro "t" varía entre 0 y 2π si el radio vector $\overrightarrow{OP}$ gira una vuelta.

♦ La función vectorial, cuya traza es la circunferencia $\mathcal{C}$, está definida por:

$$\vec{\alpha}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$$
$$t\mapsto\vec{\alpha}(t)=(h+a\cos t,k+a\operatorname{sen} t)$$

b) La elipse $\mathcal{E}:\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ se parametriza con las coordenadas polares modificadas, eligiendo como polo el centro (h,k) de la elipse y haciendo:



$$\begin{cases} x-h=a\cos t \\ y-k=b\operatorname{sen} t \end{cases}$$

el parámetro "t" varía entre $0\le t\le 2\pi$

♦ La función vectorial, cuya traza es la elipse $\mathcal{E}$, está definida por:

$$\vec{a}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$$
$$t\mapsto\vec{\alpha}(t)=(h+a\cos t,k+b\operatorname{sen} t)$$

c) La hipérbola $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ se parametriza con el coseno hiperbólico y el seo hiperbólico. Así:

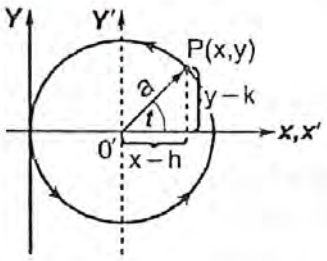
$$\begin{cases} x-h=a\cosh t \\ y-k=b\operatorname{senh} t \end{cases}\Rightarrow \mathcal{H}:\begin{cases} x=h+a\cosh t \\ y=k+b\operatorname{senh} t \end{cases}$$

EJEMPLOS:

1 Parametrizar la circunferencia $x^2+y^2=4x$

Solución: Hay dos formas convenientes de parametrizar esta circunferencia.

FORMA 1: Eligiendo como polo, el centro de la circunferencia. Al completar cuadrados en: $\mathcal{C}:x^2+y^2=4x$; se obtiene $\mathcal{C}:(x-2)^2+y^2=4$.



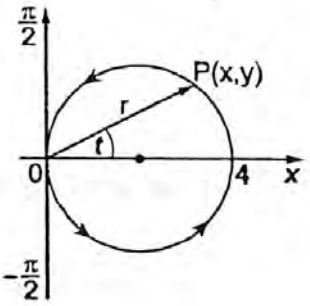
Hacer:

$$\begin{cases} x-2=2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t \end{cases}$$
$$0\le t\le 2\pi$$

♦ La función vectorial que parametriza la circunferencia $\mathcal{C}$ es:

$$\vec{\alpha}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$$
$$t\mapsto\vec{\alpha}(t)=(2+2\cos t,2\operatorname{sen} t)$$

FORMA 2: Eligiendo como polo el origen de coordenadas (0,0).



En este caso, las coordenadas polares del punto (x,y) están dadas por:

$$(1)\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\operatorname{sen} t \end{cases}$$
$$x^2+y^2=r^2$$

Donde "r" se halla sustituyendo "x" e "y" de (1) en: $\underbrace{x^2+y^2}=4x$

$$r^2=4r\cos t\Rightarrow r=4\cos t\ \ldots\ (2)$$

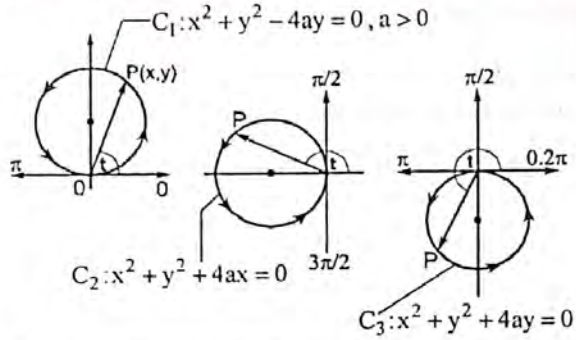
Al reemplazar (2) en (1):

$$\begin{cases} x=4\cos t\cos t \\ y=4\cos t\operatorname{sen} t \end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x=4\cos^2 t \\ y=2\operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

Así, obtenemos: $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\vec{\alpha}:\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$t\longmapsto\vec{\alpha}(t)=(4\cos^2 t,2\operatorname{sen} 2t)$$

2 Parametrizar las siguientes circunferencias:



- Si en cada una de las tres circunferencias elegimos como polo el origen de coordenadas (0,0), entonces las coordenadas polares del punto P(x,y) son:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- De $C_1 : x^2 + y^2 - 4ay = 0$

obtenemos: $r^2 - 4a\operatorname{sen} t = 0$

$r = -4a\operatorname{sen} t$

- De $C_2 : x^2 + y^2 + 4ax = 0$

obtenemos: $r^2 + 4ar\cos t = 0$

$r = -4a\cos t$

- De $C_3 : x^2 + y^2 + 4ay = 0$

obtenemos: $r^2 + 4ar\operatorname{sen} t = 0$

$r = -4a\operatorname{sen} t$

- Las funciones vectoriales que parametrizan a C_1, C_2 y C_3 son, respectivamente:

$C_1)\ \vec{\alpha}:[0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (2a\operatorname{sen} 2t, 4a\operatorname{sen}^2 t)$$

$C_2)\ \vec{\alpha}:\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (-4a\cos^2 t, -2a\operatorname{sen} 2t)$$

$C_3)\ \vec{\alpha}:[\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (-2a\operatorname{sen} 2t, -4a\operatorname{sen}^2 t)$$

- Si elegimos como polo el centro de cada circunferencia, las parametrizaciones de C_1, C_2 y C_3, respectivamente, son:

$C_1 : \vec{\alpha}(t) = (2a\cos t, 2a + 2a\operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$

$C_2 : \vec{\alpha}(t) = (-2a + 2a\cos t, 2a\operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$

$C_3 : \vec{\alpha}(t) = (2a\cos t, -2a + 2a\operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$

3 Parametrizar:

a) El arco de la elipse AB de la fig. 1

b) El arco de la elipse AB de la fig. 2

c) La elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)}{9} = 1$

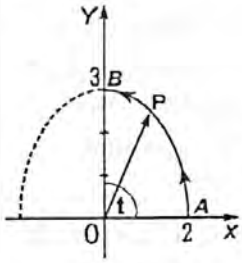


Fig. 1

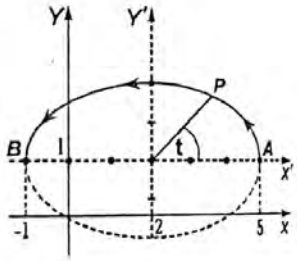


Fig. 2

Solución:

a) En la fig. 1, se tiene una elipse con $a = 2$, $b = 3$ y centro (0,0). La parametrización del arco AB (que tiene sentido antihorario), es:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

b) En la fig. 2 se tiene una elipse con $a = 3$, $b = 2$ y centro (2,1).
La parametrización del arco AB (que tiene sentido antihorario) es:

$$\begin{cases} x - 2 = 3\cos t \\ y - 1 = 2\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi$$

Esto es:

$\vec{\alpha}(t) = (2 + 3\cos t, 1 + 2\operatorname{sen} t), 0 \le t \le \pi$

- El arco BA es el camino inverso del arco AB entonces la parametrización del arco BA es:

$\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(\pi + 0 - t)$

$= \alpha(\pi - t) = (2 + 3\cos(\pi - t), 1 + 2\operatorname{sen}(\pi - t))$

$\beta(t) = (2 - 3\cos t, 1 + 2\operatorname{sen} t), 0 \le t \le \pi$

c) $\alpha(t) = (2\cos t, 3 + 3\operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$

3.7.8.3 Parametrización de algunas curvas planas especiales.

a) La astroide: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ se parametriza haciendo:

$x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$; $0\le t\le 2\pi$

b) El Folium de Descartes:

$x^3+y^3=3axy$, se parametriza haciendo $y=tx$, obteniéndose:

$$x=\frac{3at}{1+t^3}\quad,\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\quad;\quad t\neq -1$$

c) La Lemniscata de Bernoulli:

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ se parametriza de dos formas:

FORMA 1: Haciendo $y=t^2x$ se obtiene:

$$x=\frac{a\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}\ ,\ y=\frac{at^2\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}\ ;\ -1\le y\le 1$$

FORMA 2: Aplicando coordenadas polares:

$$\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\operatorname{sen} t\end{cases}$$

La ecuación:

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, se convierte en

$$(r^2)^2=a^2(r^2\cos^2 t-r^2\operatorname{sen}^2 t)$$

$$r^4=a^2r^2\cos 2t$$

$$r=a\sqrt{\cos 2t}\ ,\ \frac{-\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$$

♦ La parametrización es:

$\vec{\alpha}(t)=(a\sqrt{\cos 2t}\cos t, a\sqrt{\cos 2t}\operatorname{sen} t)$

$-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4}\ \vee\ \frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$

d) La Lemniscata rosa de dos hojas $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$, se parametriza haciendo $y=t^2x$; obteniéndose:

$$x=\frac{\sqrt{2}at}{1+t^4}\quad,\quad y=\frac{\sqrt{2}at^3}{1+t^4}$$

También se puede parametrizar con las coordenadas polares obteniéndose:

$$\begin{cases}x=a\sqrt{\operatorname{sen} 2t}\cos t\\ y=a\sqrt{\operatorname{sen} t}\operatorname{sen} t\end{cases}\quad,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

3.7.8.4 Importancia de la parametrización de curvas.

La representación paramétrica $\vec{\alpha}(t)$, $t\in I\subset\mathbb{R}$, de una curva C es importante por lo siguiente:

1. $\vec{\alpha}(t)$ da información acerca de la posición de una partícula en el instante t. La derivada $\vec{\alpha}'(t)$ es el vector velocidad y $\vec{\alpha}''(t)$ es el vector aceleración.
2. La representación paramétrica de una curva es necesaria para hallar la curvatura y la torsión, que son propiedades intrínsecas de una curva.
3. La representación paramétrica de una curva es necesaria para definir las integrales de línea y poder aplicarlas en los teoremas de Green y de Stokes.

3.8 Diferencias entre camino y curva.

P_1. Un camino es una función continua. Una curva es la traza de dicha función continua.

P_2. Un camino tiene sentido, la traza de un camino no tiene sentido.

P_3. Dos o más caminos pueden tener la misma traza.

P_4. La longitud de un camino no siempre es igual a la longitud de su traza.

3.9 ALGUNOS TEOREMAS SOBRE DERIVADA

3.9.1 Teorema 5

Si la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable sobre el intervalo I, entonces f es continua sobre I. El reciproco no es cierto.

Contraejemplo. La función $f: \langle -\infty , \infty \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(t) = (t , |t|)$ es continua sobre $\langle -\infty , \infty \rangle$, pero no es derivable en $t = 0$

3.9.2 Teorema 6

Si las funciones vectoriales $\mathbf{f} , \mathbf{g} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son diferenciables sobre el intervalo I y la función real $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable sobre el intervalo I, entonces $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\mathbf{f}-\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ y $\varphi\mathbf{f}$ son diferenciables sobre I, y las reglas de derivación son:

P_1. $D(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = D\mathbf{f} + D\mathbf{g}$

P_2. $D(\mathbf{f}-\mathbf{g}) = D\mathbf{f} - D\mathbf{g}$

P_3. $D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\ ) = \mathbf{f}\cdot D\mathbf{f} + D\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$

P_4. $\frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\| = \frac{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|}$

P_5. $D(\varphi\mathbf{f}) = \varphi(D\mathbf{f}) + (D\varphi)\mathbf{f}$

P_6. $D(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = \mathbf{f}\times D\mathbf{g} + D\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ (válido solo en $\mathbb{R}^3$)

Demostración

Prueba de P_1

Sean $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{f}_1(t) , \mathbf{f}_2(t) , \ldots , \mathbf{f}_n(t))$, $t \in I$

y $\mathbf{g}(t) = (\mathbf{g}_1(t) , \mathbf{g}_2(t) , \ldots , \mathbf{g}_n(t))$, $t \in I$

La suma de **f** y **g** es: $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(t) = (f_1(t)+g_1(t), \ldots, f_n(t)+g_n(t)) \quad , \quad t \in I$

Al derivar, obtenemos:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(t) = \left([f_1(t)+g_1(t)]', \ldots, [f_n(t)+g_n(t)]' \right) \quad , \quad t \in I$$

$$= \left(f_1'(t)+g_1'(t), \ldots, f_n'(t)+g_n'(t)\right)$$

$$= \left(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\right)+\left(g_1'(t), \ldots, g_n'(t)\right)$$

$$= \mathbf{f}'(t)+\mathbf{g}'(t)$$

Esto es valido, por que si f es diferenciable en I, entonces cada función real componente $f_i(t)$ es diferenciable en I. Igualmente si g es diferenciable en I , entonces cada función $g_i(t)$ es diferenciable en I. Además, si $f_i(t)$ y $g_i(t)$ son funciones reales diferenciables en I, entonces la suma $f_i + g_i$ es diferenciable en I

Prueba de P_3. $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\right) = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t)+\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}'(t)$

↑ *derivada del producto interno de f por g.*

En primer lugar, hagamos el producto interno de **f** por **g** .

$$\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_i(t)$$

En segundo lugar, derivemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[f_i(t)\, g_i' + f_i'(t)\, g_i(t)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_1'(t) + \sum_{i=1}^{n} f_i'(t)\, g_i(t) = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t)+\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t)$$

■

Prueba de P_4 $\frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\| = \frac{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|}$

Veamos:

En la propiedad $\|\mathbf{f}(t)\|^2 = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}(t)$

derivemos: $\frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}(t)\right]$

$$2\|\mathbf{f}\|\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\| = \mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)$$

$$= 2\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\| = \frac{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|}$$

Prueba de P_6 $\quad (\mathbf{f}\times\mathbf{g})' = \mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}'(t)+\mathbf{f}'(t)\times\mathbf{g}(t).$

Se parte de la definición de producto vectorial:

Sean $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ y $g = (g_1, g_2, g_3)$.

El producto vectorial de f por g, es :

$$\mathbf{f}\times\mathbf{g} = (f_2 g_3 - f_3 g_2\ ,\ f_3 g_1 - f_1 g_3\ ,\ f_1 g_2 - f_2 g_1)$$

Derivemos:

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{g})' = \left(f_2 g_3' + f_2' g_3 - f_3 g_2' - f_3' g_2\ ,\ f_3 g_1' + f_3' g_1 - f_1 g_3' - f_1' g_3\ ,\ f_1 g_2' + f_1' g_2 - f_2 g_1' - f_2' g_1\right)$$

$$= (f_2 g_3' - f_3 g_2'\ ,\ f_3 g_1' - f_1 g_3'\ ,\ f_1 g_2' - f_2 g_1') + (f_2' g_3 - f_3' g_2\ ,\ f_3' g_1 - f_1' g_3\ ,\ f_1' g_2 - f_1' g_1)$$

$$= (f_1, f_2, f_3)\times(g_1', g_2', g_3') + (f_1', f_2', f_3')\times(g_1, g_2, g_3)$$

$$= \mathbf{f}\times\mathbf{g}' + \mathbf{f}'\times\mathbf{g}$$

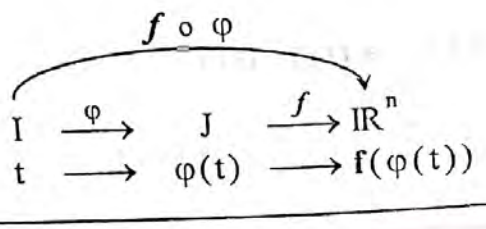
3.9.3 Composición de una Función Real con una Función Vectorial.

Definición

Si φ es una función real de variable real y f es una función vectorial de variable real, la composición de φ con f, denotado por $\mathbf{f}\circ\varphi$ es la función vectorial de variable real con :

a) regla de correspondencia $(\mathbf{f}\circ\varphi)(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$

y b) Dominio $D_{\mathbf{f}\circ\varphi} = \{\, t\in IR \,/\, t\in D_\varphi \ \wedge\ \varphi(t)\in D_f \,\}$



En consecuencia, si $t \in D_{f \circ \varphi}$ y $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$

entonces $[f \circ \varphi](t) = f(\varphi(t)) = (f_1(\varphi(t)), f_2(\varphi(t)), \ldots, f_n(\varphi(t)))$

$= ((f_1 \circ \varphi)(t), (f_2 \circ \varphi)(t), \ldots, (f_n \circ \varphi)(t))$

Por lo tanto $f \circ \varphi = (f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, \ldots, f_n \circ \varphi)$

Nota: La aplicación importante de la composición $f \circ \varphi$, se observa cuando necesitamos reparametrizar un camino, que estudiaremos más adelante.

Ejemplo 1 Sea la función real de variable real $\varphi : [0, 1] \longrightarrow IR$ definido por $\varphi(t) = -\frac{\pi}{2} + \pi t$ y sea la función vectorial $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow IR^2$ definido por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Hallar $f \circ \varphi$.

Solución :

a) $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi t\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \pi t\right)\right)$

$= (\operatorname{sen}(\pi t), -\cos(\pi t))$

b) El dominio de $f \circ \varphi$

$D_{f \circ \varphi} = t \in D\varphi \ \wedge \ \varphi(t) \in D_f$

$= 0 \le t \le 1 \ \wedge \ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi t\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$-\frac{1}{2} \le -\frac{\pi}{2} + \pi t \le \frac{\pi}{2}$

$= 0 \le t \le 1 \ \wedge \quad 0 \le t \le 1$

$= t \in [0, 1]$

Conclusión: $(f \circ y)(t) = (\operatorname{sen} \pi t, -\cos \pi t), \ t \in [0, 1]$.

3.9.3.1 Teorema 7

Si φ es continua en t_0 y $\mathbf{f}$ es continua en $\varphi(t_0)$, entonces $\mathbf{f} \circ \varphi$ es continua en t_0.

Prueba:

Deseando probar que $\mathbf{f} \circ \varphi = (f_1 \circ \varphi \ , \ f_2 \circ \varphi \ , \ \dots \ , \ f_n \circ \varphi)$ es continua en t_0.

Veamos:

- Si φ es continua en t_0 y f_i es continua en $\varphi(t_0)$, entonces $f_i \circ \varphi$ es continua en t_0 (según la teoría de funciones reales de variable real).
- Si $f_i \circ \varphi$ es continua en t_0 para todo $i = 1 , 2 , \dots , n$ entonces $\mathbf{f} \circ \varphi$ es continua en t_0.

3.9.3.2 Teorema 8

Si φ es diferenciable sobre el intervalo I y f es diferenciable sobre un intervalo que contiene a $\varphi(I) = \{ \varphi(t) / t \in I \}$, entonces $\mathbf{f} \circ \varphi$ es diferenciable sobre I y $\frac{d}{dt}\left[(\mathbf{f} \circ \varphi)(t) \right] = \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{escalar}} \ \underbrace{\mathbf{f}'(\varphi(t))}_{\text{vector}}$

Prueba:

1° Defina $\mathbf{f} \circ \varphi$.

2° Derive. En este paso debe derivar cada componente de $\mathbf{f} \circ \varphi$.

3° Factorice $\varphi'(t)$ ■

Ejemplo Si $\mathbf{f}(t) = (2t , t^3 , t^2) , t \in [0 , +\infty\rangle$ y $\varphi(t) = e^{-3t} , t \in [0 , +\infty\rangle$. Hallar $(\mathbf{f} \circ \varphi)'(t)$.

Solución:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \circ \varphi) = \varphi'(t)\, \mathbf{f}'(\varphi(t))$$

$$= -3e^{-3t} (2 , 3e^{-6t} , 2e^{-3t})$$

donde:
$$\begin{cases} \varphi'(t) = -3e^{-3t} \\ \mathbf{f}'(t) = (2 , 3t^2 , 2t) \\ \mathbf{f}'(\varphi(t)) = (2 , 3e^{-6t} , 2e^{-3t}) \end{cases}$$

Nota: Otra forma de hallar $\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \circ \varphi)$ es :

1° Hallar $(\mathbf{f} \circ \varphi)(t) = \mathbf{f}(\varphi(t)) = (2e^{-3t}, e^{-9t}, e^{-6t})$.

2° Derivar y luego factorizar $-3e^{-3t}$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

TEOREMA 9

Sea la función vectorial $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Si $\mathbf{f}$ es continua en $[a, b]$ y es diferenciable sobre $\langle a, b\rangle$, entonces existen $c_i \in \langle a, b\rangle$ tales que: $\mathbf{f}(a) - \mathbf{f}(b) = (b - a)\,(f'_1(c_1), f'_2(c_2), \ldots, f'_n(c_n))$

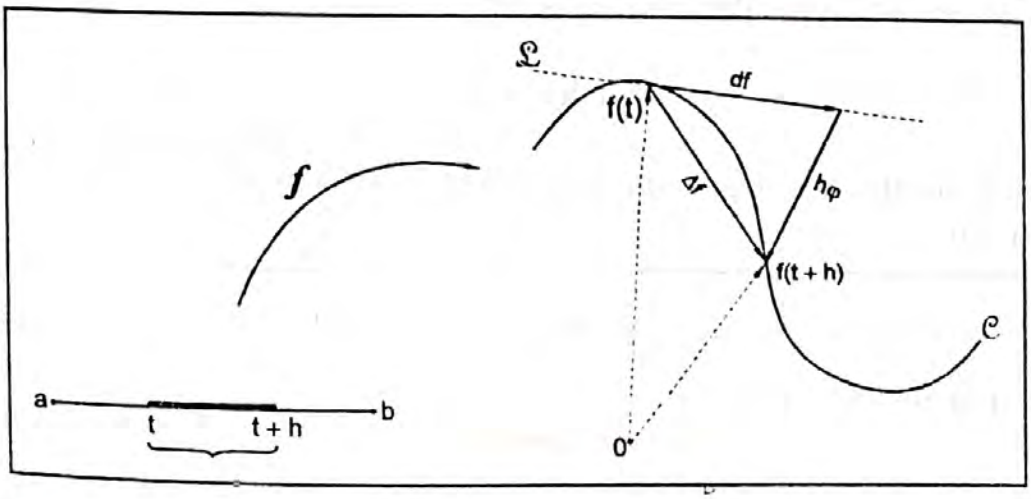
Prueba:

Basta aplicar el teorema del valor medio a cada función componente $f_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

3.10 LA DIFERENCIAL

Sea la función $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longrightarrow f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$



Recordemos las siguientes definiciones.

a) El incremento de **f** es: $\Delta \mathbf{f}(t\,;h) = \mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)$

b) La derivada de **f** en t es : $\mathbf{f}'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{f}(t+h)-\mathbf{f}(t)}{h}$

c) Si h es muy pequeño, podemos escribir $\mathbf{f}'(t) = \dfrac{\mathbf{f}(t+h)-\mathbf{f}(t)}{h}$

$$h\mathbf{f}'(t) = \mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)$$

$$h\mathbf{f}'(t) = \Delta \mathbf{f}(t\,;h)$$

$$0 = \Delta \mathbf{f}(t\,;h) - h\mathbf{f}'(t)$$

Si a esta diferencia le llamamos la función $\phi(t,h)$, tenemos:

$$\phi(t,h) = \Delta \mathbf{f}(t,h) - h\,\mathbf{f}'(t)$$

$$\boxed{\Delta \mathbf{f}(t,h) = h\,\mathbf{f}'(t) + \phi(t,h)}$$

Como $\lim\limits_{h\to 0} \phi(t\,,h) = 0$, entonces $\Delta f(t\,,h) \approx h\,f'(t)$, es decir $\Delta f(t,h)$ es aproximadamente igual a $h\,f'(t)$. Al término $h\,f'(t)$ se llama diferencial.

Definición

El vector $h\,\mathbf{f}'(t)$ se llama diferencial de **f** en t correspondiente al incremento de h en t y se denota por $df(t,h)$; es decir:

$$df(t,h) = h\ \mathbf{f}'(t)$$

Geométricamente, ésta igualdad indica que el $df(t,h)$ es paralelo al vector $f'(t)$, si $\mathbf{f}'(t) \neq 0$.

Para abreviar la notación, hacer $\begin{cases} df(t\,,h) = df \\ h = dt \end{cases}$

así tendremos que la diferencial de $\mathbf{f}$, es:

$$\boxed{df = f'(t)dt}$$

Si tenemos que $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, dx_n)$

$$\Rightarrow \quad d\vec{x}(t) = (dx_1, \ldots, dx_n)$$

$$= \left(x'_1(t), \ldots, x'_n(t)\right)dt \quad , \quad dx_i = x'_1(t)\,dt$$

Ejemplo 1 Sea la función $\vec{x}(t) = (t\,\text{sen}\,t, t\cos t, \sqrt{3}\,t)$, $t \geq 0$

El diferencial de $\vec{x}(t)$, es:

$$d\vec{x}(t) = (\text{sen}\,t + t\cos t, \cos t - t\,\text{sen}\,t, \sqrt{3})\,dt$$

Ejemplo 2 Si $f(t) = (t, e^t, e^t)$

$$\Rightarrow \quad df = f'(t)\,dt$$

$$= (1, e^t, e^t)\,dt$$

3.10.1 Diferencial de Algunas Funciones

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + df \cdot g$$

$$d(f \times g) = f \times dg + df \times g$$

$$d(\phi f) = \phi\,df + (d\phi)\,f$$

$$d(f \circ \phi) = (f' \circ \phi)\,d\phi$$

3.11 INTEGRACIÓN

Motivación:

Dado el vector tangente $x'(t) = at + b$ y uno de sus puntos es $x(0) = (1, 0, 1)$; hallar la ecuación de la curva.

Esto, es un problema de resolver la ecuación diferencial $x'(t) = at + b$ que al integrar, obtenemos:

$$x(t) = \int_0^t (\mathbf{a}t + \mathbf{b})\,dt + \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{c} = \text{vector constante}$$

$$= \mathbf{a}\frac{t^2}{2} + bt\Big|_{t=0}^{t=t} + \mathbf{c}$$

$$x(t) = \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$

Como $x(0) = (1,0,1) \Rightarrow x(0) = \frac{\mathbf{a}}{2}(0)^2 + b(0) + \mathbf{c} \Rightarrow x(0) = \underbrace{(1,0,1)}_{=\ \mathbf{c}}$

Luego, $x(t) = \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 + \mathbf{b}t + (1,0,1)$ es la curva solución.

Definición

Si $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ es una función vectorial definida sobre [a , b] entonces

$$\int_a^b \mathbf{f} = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n \right)$$

o

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt \right)$$

esta integral existe, si cada una de las integrales es $\int_a^b f_i(t)\,dt$ existe para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

TEOREMA 10 Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ es continua sobre un intervalo I y $t_0 \in I$, entonces

$$D_t \int_{t0}^t \mathbf{f} = \mathbf{f}(t) \quad , \quad t \in I$$

TEOREMA 11 Si $\mathbf{F} = (F_1, \ldots F_n)$ tiene una derivada continua sobre un intervalo I, entonces para todo $a, b \in I$.

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

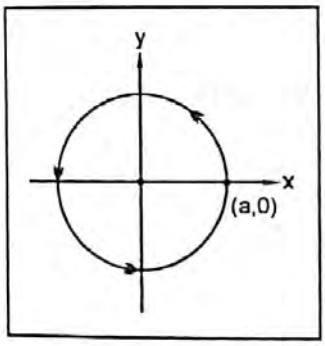
TEOREMA 12 Si **f** es continua sobre un intervalo I, si $t_0 \in I$, y si x_0 es un vector cualquiera, entonces hay una y sólo una solución sobre I de la ecuación diferencial $x' = \mathbf{f}$ que satisface $x(t_0) = x_0$.

La solución es: $x(t) = \int_{t_0}^{t} f + x_0$

3.12 REPARAMETRIZACIÓN DE CAMINOS.

Introducción.

Supongamos que tenemos el camino cerrado:



$$\mathbf{f} : [0 , 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \mathbf{f}(t) = (a \cos t , a \operatorname{sen} t)$$

cuya traza es una circunferencia de radio a . El tiempo que demora en dar una vuelta un punto P partiendo desde **f** (0) y llegar a $\mathbf{f}(2\pi)$, es 2π segundos. ¿Qué hacer, para que el punto P demore sólo 1 segundo para dar una vuelta?

En este caso, conviene aumentar la velocidad del punto P. Para ello debemos "deformar" el intervalo $[0,1]$ y luego "cambiar" el parámetro "t" de **f** por otro parámetro "s:".

Esto sólo es posible, cuando construyamos una función $\phi : [0,1] \longrightarrow [0 , 2\pi]$ tal que la composición $\mathbf{f} \circ \phi$ exprese el mismo camino con otro parámetro y otra velocidad. Ver el diagrama :

$$[0 , 1] \xrightarrow{\phi} [0 , 2\pi] \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^2$$
$$s \longrightarrow t = 2\pi s \longrightarrow (a \cos 2\pi s , a \operatorname{sen} 2\pi s)$$

En el intervalo $\overset{0}{\bullet}\!\!\longrightarrow\!\!\overset{2\pi}{\bullet}$

hacer : $0 + (2\pi - 0)s = t$

$2\pi s = t$

$s = \frac{1}{2\pi}$

En el diagrama tenemos: $\phi(s) = 2\pi s$
$\mathbf{f}(t) = (a \cos t , b \operatorname{sen} t)$

La composición $(\mathbf{f} \circ \phi)(s) = \underbrace{\mathbf{f}(\phi(s))}_{\bar{\mathbf{f}}(s)} = (a \cos 2\pi s , a \operatorname{sen} 2\pi s)$ es la reparametrización de f.

Si $s = 0$ obtenemos = (a , 0), es el punto inicial

Si $s = \frac{1}{2}$ obtenemos = (–a , 0), en medio segundo recorre $\frac{1}{2}$ del camino

Si $s = 1$ obtenemos = (a , 0), en un segundo da una vuelta.

El proceso de variar la velocidad de un proyectil para recorre el mismo camino en menor o mayor tiempo, se llama **REPARAMETRIZAR** un camino. Para ello, bastará construir un **homeomorfismo** de clase C^1. $\phi : I \longrightarrow J$, siendo I y J intervalos cerrados.

Antes de dar la definición matemática de **REPARAMETRIZACIÓN**, daremos la definición de una aplicación **homeomorfa** .

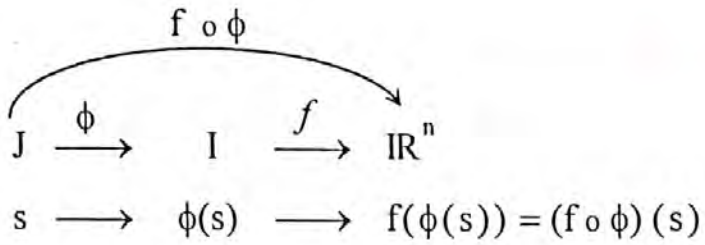
3.12.1 Definición

Una aplicación $\phi : I \longrightarrow J$ es un homeomorfismo de clase C^1 , si ϕ y su inversa $\phi^{-1} : J \longrightarrow I$ son biyectivas y continuas.

Ejemplo [a , b] es homeomorfo a [0 , 1], porque existe una aplicación $\phi : [0 , 1] \longrightarrow [a , b]$ definido por $\phi(s) = a + (b - a)s$ y $\phi^{-1} : [a , b] \longrightarrow [0 , 1]$ definido por $\phi^{-1}(t) = \frac{t - a}{b - a}$ de clase C^1.

3.12.2 Definición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino regular. Sea $\phi : J \longrightarrow I$, $J \subseteq \mathbb{R}$ un homeomorfismo de la clase C^1 tal que $\phi'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Entonces el camino $\bar{f} = f \circ \phi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se llama **reparametrización** del camino f.



Pregunta: ¿Cuándo $f : I \longrightarrow IR^n$ es reparametrizable?

f es reparametrizable si existe $\phi : J \longrightarrow I$, tal que $\bar{f} = f \circ \phi$.

$\bar{f}$ es la reparametrización de f.

Otra Manera de Definir :

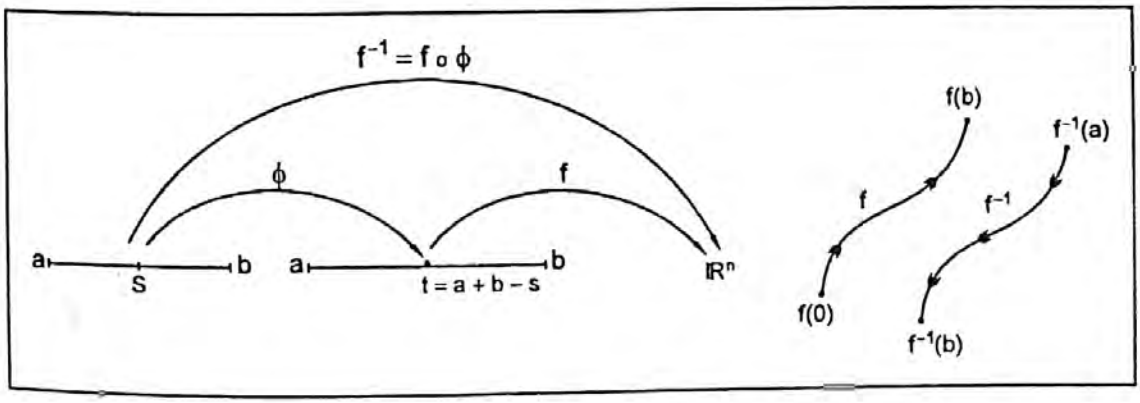
Dado dos caminos $f : [a , b] \longrightarrow IR^n$ y $\bar{f} = [c , d] \longrightarrow IR^n$, decimos que $\bar{f}$ es una **REPARAMETRIZACION** de f, si existe un homeomorfismo de clase C^1 $\phi : [c , d] \to [a , b]$ tal que el homeomorfismo inverso $\phi^{-1} : [a , b] \longrightarrow [c , d]$ es también de clase C^1 y además $\bar{f} = f \circ \phi$.

Si $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$, diremos que $\bar{f}$ es una reparametrización positiva de f.

Algunos Ejemplos :

① ***Camino Inverso.*** Dado un camino $f : [a , b] \longrightarrow IR^n$
$t \longrightarrow f(t)$

El camino inverso de f se obtiene del siguiente modo



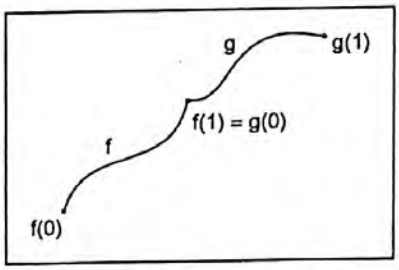
$$f^{-1}(s) = (f \circ \phi)(s) = f(\phi(s)) = f(a + b - s)$$

El camino inverso de $f(t)$ es $\quad f^{-1}(t) = f(a+b-t)$

donde $\quad f^{-1}(a) = b$

$\quad f^{-1}(b) = a$

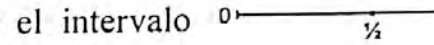
(2) Dado los caminos $f : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deseamos yustaponer los caminos f y g tal que el punto final de f coincida con el punto inicial de g.



La yuxtaposición de f con g la denotamos por $f * g$.

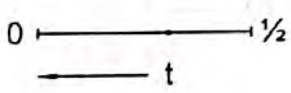
¿ Cómo hallar $f * g$?

En este caso, procedemos del siguiente modo :

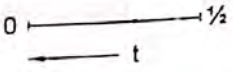
1° Dividir el intervalo 

en dos intervalos de igual longitud

2° Reparametrizar el camino f dentro del intervalo $\left[0\,,\,\frac{1}{2}\right]$ y el camino g en el intervalo $\left[\frac{1}{2}\,,1\right]$.



$$\frac{t-0}{\frac{1}{2}-0} = 2t$$



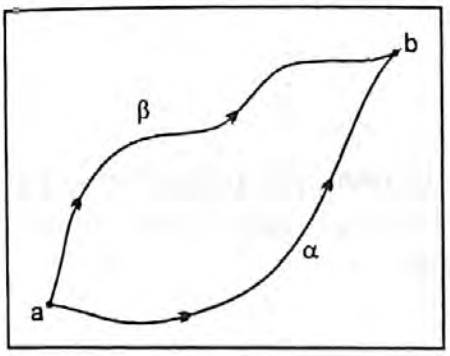
$$\frac{t-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2t-1$$

3° $$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t) \;, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) \;, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

es la yuxtaposición de f con g.
También se dice: el producto del camino f por el camino g.

3.13 HOMOTOPIA DE CAMINOS

Antes de hacer la correspondiente definición de homotopía de caminos, explicaré brevemente de qué se trata.



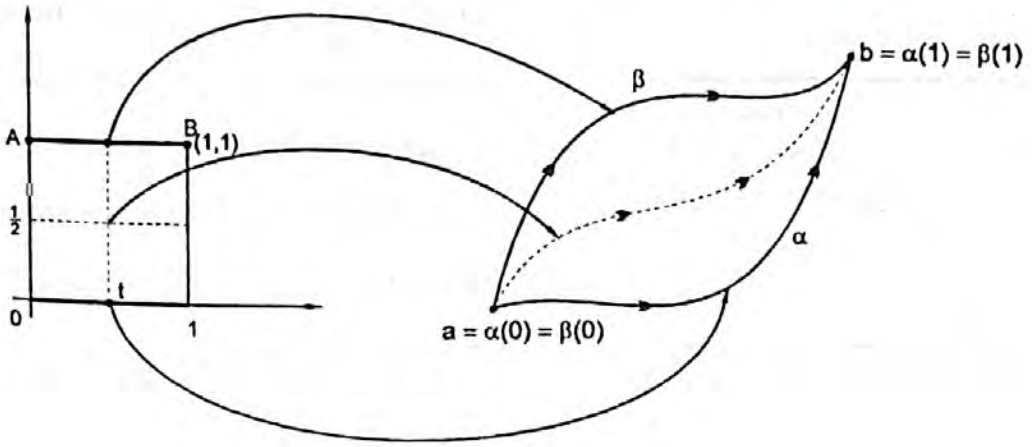
Sobre una tabla rectangular clavar dos clavos "a" y "b". Luego amarrar dos cuerdas deformables α y β como aparece en la figura, tal que "a" es el punto inicial y "b" el punto final de cada cuerda.

Queremos que la cuerda α se acerque hacía la cuerda β hasta que coincidan sin que α se rompa a medida que se va deformando al acercarse a β. La deformación de α acercándose a β sin romperse hasta coincidir, se conoce con el nombre de homotopía de caminos. En este ejemplo, diremos que "α es homotópico a β".

3.13.1 Definición

Sea el espacio topológico X. Dado dos caminos $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ y $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ con origen en $a = \alpha(0) = \beta(0)$ y final $b = \alpha(1) = \beta(1)$, diremos que α es homotópico a β, si existe una aplicación continua H, definido por :

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \text{ , tal que}$$
$$(t,0) \longrightarrow \alpha(t) = H(t,0)$$
$$(t,1) \longrightarrow \beta(t) = H(t,1)$$



NOTA: Podemos elegir $X = \mathbb{R}^2$

La función H es la que "deforma" el camino α hasta hacer coincidir con el camino β. A medida que el intervalo [0 , 1] suba hasta coincidir con el segmento $\overline{AB}$, el camino α va acercándose al camino β, hasta coincidir .

3.13.2 Operaciones con Caminos

Así como en el conjunto de los números reales definimos la operación suma, diciendo : "La suma de dos números reales es otro número real", de manera similar podemos definir una operación $*$ entre dos caminos, diciendo:

"La yuxtaposición $*$ de los caminos α y β es otro camino $\alpha * \beta$"

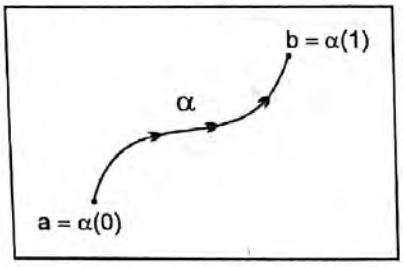
La operación $*$ de dos caminos se define del siguiente modo :

Dado dos caminos $\alpha : [0 , 1] \longrightarrow X$ y $\beta : [0 , 1] \longrightarrow X$ la yustaposición del camino α con el camino β es el camino.

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

3.13.3 Clase de Equivalencia

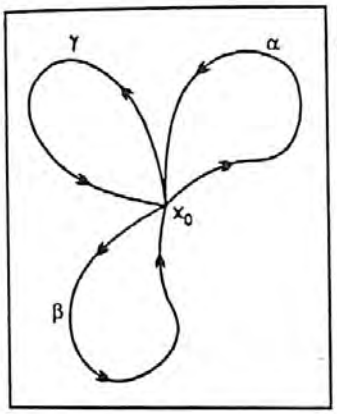
Si elegimos un camino de $\alpha : [0 , 1] \longrightarrow X$, con punto inicial $\alpha(0) = a$ y punto final $\alpha\ (1) = b$, habrán infinidad de caminos que sean homotópicos al camino α. Al ***conjunto de los caminos*** que son homotópicos al camino α le llamaremos "la clase de equivalencia α" y la denotaremos por $[\alpha]$.



Es decir $[\alpha] = \{ \gamma : [0 , 1] \longrightarrow X \ ; \ \gamma$ es homotópico a $\alpha \}$

3.13.4 Operaciones con Clases de Equivalencia de Caminos Cerrados.

Denotemos por $\pi_1(X , x_0)$ el conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base $x_0 \in X$. En este conjunto se definirá el producto $[\alpha] * [\beta]$ del siguiente modo :



$$\pi_1(X , x_0) \times \pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(X , x_0)$$

$$([\alpha] , [\beta]) \longmapsto [\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$

$$\text{donde } (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

El conjunto $\pi_1(X , x_0)$ con la operación $*$ forma un grupo, llamado **GRUPO FUNDAMENTAL** con punto base x_0. Recordar que un conjunto **G** con una operación $*$, es un grupo si es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y elemento inverso.

Aplicaciones:

- La homotopia de caminos se aplica en integrales de línea :

  Si α es homotópico a $\beta \Rightarrow \int_\alpha w = \int_\beta w$, $w = Adx + Bdy$.

- En el estudio de funciones de variable compleja, cuando se integra funciones de variable compleja .

  El estudio de homotopías y el estudio del **GRUPO FUNDAMENTAL**, son temas de la **TOPOLOGÍA ALGEBRAICA.**

3.14 LONGITUD DE UN CAMINO

Definición

Sea $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1. La longitud de f desde $t = a$ hasta $t = b$, denotado por $\ell(f)$, se define como:

$$\textcircled{1} \quad \ell(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

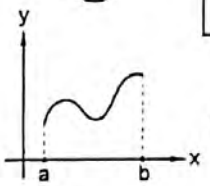
Otras fórmulas:

Si la curva está definida por:

$$f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

La longitud de la curva, está dada por :

$$\textcircled{2} \quad \ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} \, dx$$



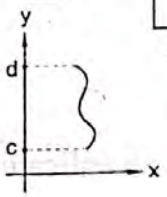
$\frac{dy}{dx}$ es continua en $[a , b]$

Si la curva está definida por:

$$g : [c , d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow x = g(y)$$

La longitud de la curva , está dada por :

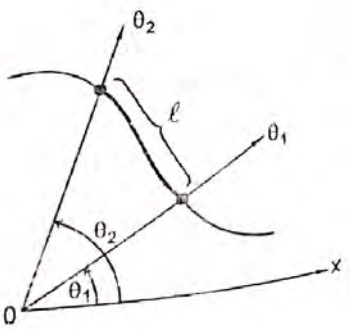
$$\textcircled{3} \quad \ell = \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2}$$



$\frac{dx}{dy}$ es continua en $[c , d]$

Si en $\mathbb{R}^2$ la curva está definida por una ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1 , \theta_2]$ donde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ entonces la longitud de la curva está dada por la fórmula:

$$\textcircled{4} \quad \ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2} \, d\theta$$



donde $\frac{dr}{d\theta}$ es continua en $[\theta_1 , \theta_2]$

Problemas.

01. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$, $x > 0$ desde el vértice hasta el punto $M(x,y)$.

02. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ comprendido dentro de la parábola $y^2 = \frac{x}{3}$.

03. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$.

04. Calcular la longitud del lazo de la línea $9ay^2 = x(x-3a)^2$, $a > 0$.

05. Calcular la longitud total de la curva $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$, $a > 0$.

06. Hallar el perímetro de un jardín que está cercado por paredes con ecuaciones $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$ y $x = 8$.

07. Encontrar la longitud de uno de los arcos de la cicloide, cuyas ecuaciones son : $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

08. Un punto se mueve en un plano sobre la curva con representación paramétrica $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - t \\ y = \frac{4}{3}t^{3/2} \end{cases}$ donde t representa el tiempo en segundos. Encuentre la distancia recorrida en los primeros dos segundos.

09. Hallar la longitud del lazo de la línea $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$

10. Calcular la longitud del arco de la línea $x = \int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz$, $y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$; desde el origen de coordenadas hasta el punto más próximo que tenga la tangente vertical.

11. Demostrar que la longitud del arco de la línea

$$\begin{cases} x = f''(t)\cdot\cos t + f'(t)\cdot \operatorname{sen} t \\ y = f''(t)\cdot\operatorname{sen} t + f'(t)\cdot\cos t \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2] \text{ es igual a } \left[f(t) + f''(t) \right]\Big|_{t_1}^{t_2}$$

12. Hallar longitud de la cardioide $r = a\,(1 + \cos\theta)$

13. Hallar la longitud del arco de la parte de la parábola $r = a\cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, cortada por la recta vertical que pasa por el polo.

14. Hallar la longitud del arco de la curva $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ desde $r = 1$ hasta $r = 3$.

15. Hallar la longitud total de la curva definida por la ecuación $r^2 = 9\cos 2\theta$.

16. Hallar la longitud de la primera espira (una vuelta) de la espiral de Arquímedes: $r = a\theta$, $a > \theta$.

17. Hallar la longitud de la curva $r = a\cdot \operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

18. Hallar la longitud de arco de la curva. $y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \operatorname{arcsen}\left(e^{-x}\right) - 1$, $x \in [0, 4]$.

19. Sea $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\operatorname{sen} t\,\vec{j} + b\,t\,\vec{k}$, para $t \geq 0$, donde a, b son constantes positivas.

a) Dibujar, la traza de $\vec{r}(t)$

b) Calcular la longitud de una curva C entre los puntos $t = 0$ y $t = 2\pi$.

20. Una espiral concoide es una curva C con una parametrización $x = a\,e^{\mu t}\cos t$, $y = a\,e^{\mu t}\operatorname{sen} t$, $z = b\,e^{\mu t}$; $t \geq 0$, donde a, b y u son constantes.

a) demuestre que C se encuentra en el cono $a^2 z^2 = b^2 (x^2 + y^2)$.

b) Calcule la longitud de C correspondiente al intervalo $t \in [0, +\infty\rangle$

Respuestas:

01. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\text{Ln}\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right)$; **02.** $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$; **03.** $\frac{134}{27}$

04. $2a\sqrt{3}$; **05.** $a\pi\sqrt{2}$; **06.** $\frac{32}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)+23$

07. $8a$; **09.** $4\sqrt{3}$; **10.** $\text{Ln}\left(\frac{\pi}{2}\right)$; **11.**

12. $8a$; **13.** $2a\left[\sqrt{2}+\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$; **14.** $\frac{1}{2}(4+\text{Ln}3)$

15. $\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$ **16.** $a\left[\pi\sqrt{4\pi+1}+\frac{1}{2}\ \text{Ln}\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right]$

17. $\ell=\frac{3\pi a}{2}$ **18.** e^4-1 ; **19.** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$; **20.** $4\sqrt{3}$

3.14.1 Reparametrización por Longitud de Arco

Introducción. Deseamos reparametrizar el camino $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t\longmapsto f(t)$

de parámetro "t" por la función $\bar{f}:[0,L]\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $s\longmapsto \bar{f}(s)$

de parámetro "s", que la llamaremos ***longitud de arco***, donde :

i) $L=\int_a^b \|f'(t)\|\,dt$

ii) s es una función real de $[a,b]$ en $[0,L]$ definido por

$$s:[a,b]\longrightarrow[0,L]$$

$$t\longmapsto s(t)=\int_a^t \|f'(\mu)\|\,d\mu$$

Interrogantes:

1. ¿Cómo se reparametriza el camino regular $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, por longitud de arco?

Del siguiente modo:

1° Se define el nuevo parámetro $s(t) = \int_a^t |f'(\mu)|\, d\mu$, $t \in [a , b]$, llamado "longitud de arco" de f desde a.

2° Se halla $L = \int_a^b \| f'(t) \|\, dt$

3° Se construye una aplicación $\phi : [0 , L] \longrightarrow [a , b]$ que sea homeomorfa de clase C^1. $\quad s \longmapsto t = \phi(s)$

4° Luego, hacer la composición:

$$[0 , L] \xrightarrow{\phi} [a , b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \quad (f \circ \phi)$$

$$s \longrightarrow t = \phi(s) \longrightarrow f(\phi(s)) \; ; \; \bar{f}(s) = (f \circ \phi)(s) = f(\phi(s)) ; s \in [0,L]$$

La aplicación $\bar{f} : [0 , L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$s \longrightarrow \bar{f}(s)$$

es la reparametrización de $f(t)$ por longitud de arco.

2. El camino $\bar{f}(s)$ cumple dos propiedades: $\begin{cases} a) & \| \bar{f}'(s) \| = 1 \\ b) & \int_0^L \| \bar{f}'(s) \|\, ds = L \end{cases}$

a) Probar que $\| \bar{f}'(s) \| = 1$

Veamos:

Derivar la función $\bar{f}(s) = (f \circ \phi)(s)$ con respecto a s.

$$\bar{f}'(s) = f'(\phi(s)) \cdot \phi'(s)$$

$$= f'(t) \cdot \phi'(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero $\phi(s) = t$

$\phi(s(t)) = t$

Derivar: $\phi'(s(t)) \cdot s'(t) = 1$

$\phi'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)}$ ..... (2)

Reemplazar (2) en (1) :

$$\bar{f}'(s) = f'(t) \cdot \frac{1}{S'(t)}$$

Aplicar la norma : $\|\bar{f}'(s)\| = \|f'(t)\| \frac{1}{\|s'(t)\|}$, pero $s'(t) = \|f'(t)\|$

$$\|f'(s)\| = \|f'(t)\| \frac{1}{\|f'(t)\|} = 1$$

b) Calcular $\int_0^L |\bar{f}'(s)|\, ds = \int_0^L 1\, ds = L$

Nota: En la práctica, dado el camino $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$t \longrightarrow f(t)$,

la reparametrización de $f(t)$ por longitud de arco se obtiene del siguiente modo:

1° Se halla $s(t) = \int_a^t \|f'(\mu)\|\, d\mu$, $t \in [a , b]$

2° Se despeja t en términos de s : $t = \phi(s)$

3° Calcular la longitud de $f(t)$ para construir el intervalo $[0 , L]$, L = longitud de f.

4° Hacer la composición $\bar{f}(s) = f(\phi(s))$

para obtener $\bar{f} : [0 , L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$s \longrightarrow \bar{f}(s) = f(\phi(s))$

Ejemplo Sea el camino $\alpha : [0 , 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por: $\alpha(t) = (a \cos t , a \operatorname{sen} t , bt)$. Se pide reparametrización el camino α por longitud de arco

Solución:

1° Hallar $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\mu)\| \, d\mu$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\, t$

2° Despejar $t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} s$

3° La longitud de $\alpha(t)$ es $L = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

4° La reparametrización de α por longitud de arco es:

$$\overline{\alpha} : \left[0 , 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} \right] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s \longrightarrow \overline{\alpha}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Se cumplen : a) $\overline{\alpha}'(s)$ es el vector tangente unitario, pues $|\overline{\alpha}'(s)| = 1$

b) $L = \int_0^{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}} |\overline{\alpha}'(s)| \, ds = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si $x^2 + y^2 = a^2$ es la traza de un camino $f(t)$, $t \in [0 , 2\pi]$. Reparametrizar $f(t)$ por la longitud de arco s.

R.: $\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right) , a\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right)$

2. Reparametrizar por la longitud de arco s el camino.

$f(t) = (e^t \cos t , e^t \operatorname{sen} t , e^t)$, $-\infty < t < \infty$

R.: $\alpha(s)=\left(\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),\ \text{sen}\log\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right),1\right),\ -\sqrt{3}<s<\infty$

3. Probar que $g(s)=\left(\frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}\right),\frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)^{-1},\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\log\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\right)\right)$ es una representación natural. Es decir s es el parámetro longitud de arco.

R.: Basta probar que $|g'(s)|=1$

4. Hallar la longitud de arco en función de θ a lo largo de la curva expresada por $f(\theta)=\left((r_0+r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right),(r_0+r)\,\text{sen}\,\theta-r\,\text{sen}\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right)$

R.: $s=\int_0^0|f'(\theta)|\,d\theta=4\frac{(r_0+r)r}{r_0}\left[\cos\left(\frac{r_0}{2r}\theta\right)-1\right]$

5. consideremos la curva $\beta(s)=\left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3},\frac{(1-s)^{3/2}}{3},\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ -1<s<1$. Probar que β tiene rapidez unitaria.

6. Encuentre una reparametrización de rapidez unitaria de $\alpha(t)=(\cos h\,t,\ \text{sen}\,h\,t,\ t)$

R.: $s(t)=\sqrt{2}\,\text{sen}\,ht$, despejar t y reemplazar en α.

7. Dado la curva $\alpha(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},a\,\text{sen}\frac{s}{c},b\frac{s}{c}\right)$, $s\in\mathbb{R}$, donde $c^2=a^2+b^2$. demostrar que el parámetro s es la longitud de arco.

R.: Basta comprobar que $|\alpha'(s)|=1$.

8. Reparametrizar por la longitud de arco s el camino

$$f(t)=\left(\int_0^t\frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta\ ,\ \int_0^t\frac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\theta}}\ ,\ 4\sqrt{t}\right)$$

R.: $s=2\sqrt{5}\sqrt{t}$, $t>0$. despejar t y reemplazar en f para obtener $\alpha(s)$.

9. Si una curva en $\mathbb{R}^2$ tiene como ecuaciones paramétricas $x = \int_0^t \cos\frac{\pi\theta^2}{2}\,d\theta$, $y = \int_0^t \operatorname{sen}\frac{\pi\theta^2}{2}\,d\theta$. Hallar $s(t)$. ***R.:*** $s(t) = t$

10. Sea la curva $\alpha(s) = \left(\operatorname{arctg}(s) , \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Ln}(s^2+1) , s - \operatorname{arctg}(s) \right)$, comprobar que s es la longitud de arco.

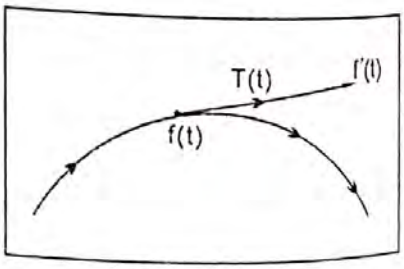
R.: Basta probar que $|\alpha'(s)| = 1$

3.15 TANGENTE UNITARIA, NORMAL PRINCIPAL Y VECTORES BINORMALES.

Sea $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longrightarrow f(t) = (x(t) , y(t) , z(t))$ un camino regular sobre $[a , b]$. Es decir $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a , b]$.

3.15.1 Definiciones:

1) $f'(t)$ es el vector tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $f(t)$ y sigue la dirección de la curva.



2) $\boxed{T(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}}$ es el vector tangente unitario en el punto $f(t)$.

3) $\ell(t) = \int_a^t \|f'(\mu)\|\,d\mu$, para todo $t \in [a , b]$; es la longitud de arco.

4) $\ell'(t) = \|f'(t)\|$

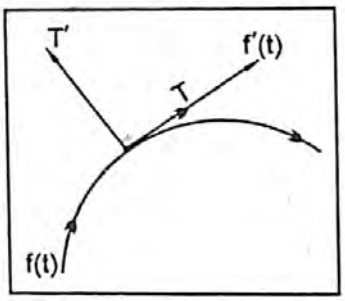
4) en 2): $T(t) = \dfrac{f'(t)}{\ell'(t)}$

5) $f'(t) = \ell'(t)\, T(t)$. Si f' es derivable en $\langle a , b \rangle$

obtenemos: $\boxed{f''(t) = \ell''\, T + \ell'\, T'}$ —(5*)

6) Se cumple que **T'(t) es Ortogonal al vector T(t)**, es decir $T'(t) \cdot T(t) = 0$

Prueba :



Como $T(t)$ es unitario, entonces $\| T \| = 1 \Rightarrow \| T \|^2 = 1$

Pero $\| T \|^2 = T \cdot T$

Ahora, derivemos la ecuación $T \cdot T = 1$

$$T' \cdot T + T \cdot T' = 0$$

$2\, T' \cdot T = 0 \Rightarrow T' \cdot T = 0$.

Lo cual implica que T' es ortogonal a T, para todo $t \in [a , b]$

7) *VECTOR NORMAL.*

Cualquier vector que pasa por el punto $f(t)$ de una curva $\mathcal{C}$ y es **ORTOGONAL** a la tangente $f'(t)$ en ese punto, se llama **NORMAL** a la curva.

El vector $T'(t)$, se llama **NORMAL PRINCIPAL** a la curva $\mathcal{C}$ en el punto f t).

Si $T'(t) \neq 0$, entonces $\boxed{N(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|}}$ es el vector unitario normal principal.

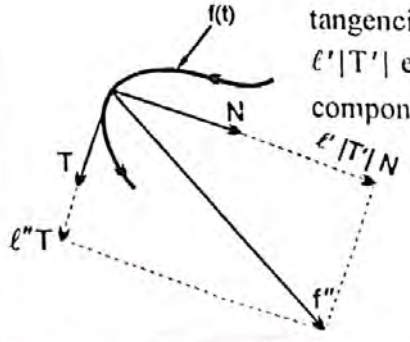
$$T'(t) = | T'(t) |\, N(t)$$

Reemplazar en (5*)

$\boxed{f'' = \ell''\, T + \ell'\, |T'|\, N}$

Esta ecuación expresa que: el vector aceleración es combinación lineal de T y N

Geométricamente: f'' se encuentra en el plano determinado por T y N



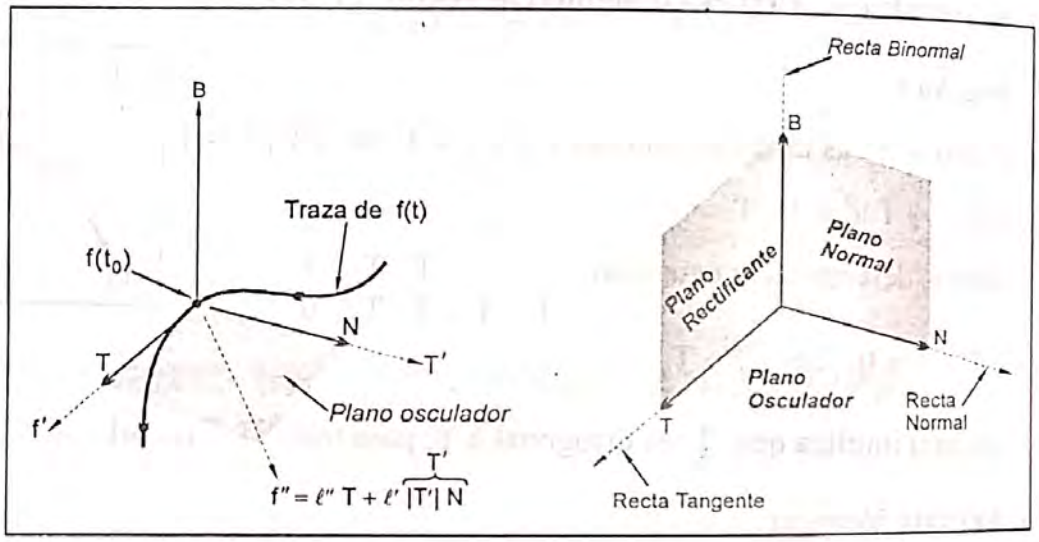
ℓ'' es la componente tangencial.

$\ell'|T'|$ es la componente normal.

8) El Vector $\boxed{B(t) = T(t) \times N(t)}$ se llama **VECTOR BINORMAL.**

9) El plano que pasa por $f(t)$ determinado por los vectores $T(t)$ y $N(t)$ se llama plano osculador de $\mathcal{C}$ en $f(t)$.

10) En cada punto $f(t)$ de $\mathcal{C}$ = traza de f, los vectores $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ forman una base ortonormal de IR^3.



La ecuación del plano osculador es: $\boxed{B(t_0) \cdot (P - f(t_0)) = 0}$

$P = (x, y, z)$

NORMAL AL PLANO OSCULADOR

3.15.2 Proposición

Si $\mathcal{C}$ es una curva en IR^3 descrita por el camino $f(t)$ demostrar que :

a) $B = \dfrac{f' \times f''}{|f' \times f''|}$, b) $N = B \times T = \dfrac{(f' \times f'') \times f'}{|(f' \times f'') \times f'|}$

Prueba de a:

Por definición de vector Binormal se tiene: $B = T \times N$

Pero: $T = \dfrac{f'}{|f'|} \Rightarrow f' = |f'|\, T$, $|f'| = \ell'$

$\Rightarrow \boxed{f' = \ell'\, T}$

Derivar: $f'' = \ell'' T + \ell' T'$, donde $N = \frac{T'}{|T'|} \Rightarrow T' = |T'| N$

$$\boxed{f'' = \ell'' T + \ell |T'| N}$$

Hacer el producto vectorial $f' \times f''$:

$$f' \times f'' = \ell' T \times (\ell'' T + \ell' |T'| N)$$

$$= \ell' \ell'' \underbrace{(T \times T)}_{\vec{0}} + \ell'^2 |T'| \underbrace{(T \times N)}_{B}$$

$$f' \times f'' = \ell'^2 |T'| B$$

El número real $\ell'^2 |T'|$ es positivo, entonces el vector $f' \times f''$ tiene la misma dirección de B y además: $|f' \times f''| = \ell'^2 |T'|$, entonces $\frac{f' \times f''}{|f' \times f''|} = B$

Prueba de b:

Al vector $f' \times f'' = \ell'^2 |T'| B$ multiplicar vectorialmente el vector f' :

$$(f' \times f'') \times f' = \ell'^2 |T'| B \times f' . \quad \text{Pero } f' = \ell' T$$

$$= (\ell')^2 |T'| B \times (\ell' T)$$

$$= (\ell')^3 |T'| \underbrace{B \times T}_{N}$$

$$= (\ell')^3 |T'| N$$

El número $(\ell')^3 |T'|$ es no negativo (positivo o cero), entonces el vector $(f' \times f'') \times f'$ tiene la misma dirección de N, por lo tanto:

$$N = \frac{(f' \times f'') \times f'}{|(f' \times f'') \times f'|}$$

Ejemplo Dado el camino $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \frac{1}{2} t)$. Determine los componentes tangenciales y normal de $f''(t)$ en el punto $f(t)$.

Solución:

Se pide hallar: a) $\text{Comp}_T\, f''$ y b) $\text{Comp}_N\, f''$

1° Hallar $T = \frac{f'}{|f'|}$

De $f(t) = \left(\cos t\ ,\ \text{sen}\, t\ ,\ \frac{1}{2}t\right)$, obtenemos:

$$f'(t) = \left(-\text{sen}\, t\ ,\ \cos t\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$|f'| = \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Luego: $\boxed{T = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\text{sen}\, t\ ,\ \cos t\ ,\ \frac{1}{2}\right)}$

2° Hallar $N = \frac{T'}{|T'|}$, donde $\begin{cases} T'(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}(-\cos t\ ,\ -\text{sen}\, t\ ,\ 0) \\ |T'| = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}(-\cos t, -\text{sen}\, t, 0)}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{N = (-\cos t\ ,\ -\text{sen}\, t\ ,\ 0)}$$

3° Hallar $\boxed{f''(t) = (-\cos t\ ,\ -\text{sen}\, t\ ,\ 0)}$

4° $\text{Comp}_T f''(t) = \frac{f'' \cdot T}{|T|} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}(\text{sen}\, t \cos t - \text{sen}\, t \cos t + 0)}{1} = 0$

5° $\text{Comp}_N\, f'' = f''(t) \cdot N$

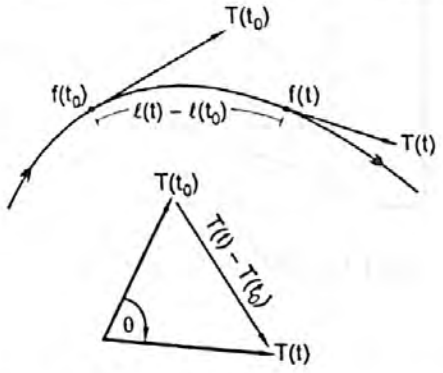
$= \cos^2 t + \text{sen}^2 t + 0$

$= 1$

3.16 CURVATURA Y TORSIÓN

Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camino regular en $[a, b]$.
$t \longrightarrow f(t)$

Eligiendo dos puntos: $f(t_0)$, $f(t)$ de la curva $\mathcal{C}$, nos interesa estudiar la razón $\frac{|T(t)-T(t_0)|}{|\ell(t)-\ell(t_0)|}$ que es el cambio promedio de dirección por unidad de distancia sobre el arco $\overset{\frown}{f(t_0)\,f(t)}$. donde $|T(t) - T(t_0)|$ es el cambio de dirección de la curva entre $f(t_0)$ y $f(t)$, $|\ell(t) - \ell(t_0)|$ es la longitud de arco desde $f(t_0)$ hasta $f(t)$.



$$|T(t)-T(t_0)|^2 = |T(t)|^2 - 2T(t)\cdot T(t_0) + |T(t_0)|^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta + 1$$
$$= 2(1-\cos\theta)$$
$$= 4\,\mathrm{sen}^2\tfrac{\theta}{2}$$
$$= \left(2\,\mathrm{sen}\tfrac{\theta}{2}\right)^2 \approx \theta^2 \quad \text{para } \theta \text{ pequeña.}$$

La razón $\frac{|T(t)-T(t_0)|}{\ell(t)-\ell(t_0)}$ es la medida de cuánto se "curva" la curva $\mathcal{C}$. La razón "instantánea" de $\frac{|T(t)-T(t_0)|}{|\ell(t)-\ell(t_0)|}$ se obtiene tomando límite cuando t tiende a t_0. Así:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\left|\frac{T(t)-T(t_0)}{t-t_0}\right|}{\left|\frac{\ell(t)-\ell(t_0)}{t-t_0}\right|} = \frac{|T'(t_0)|}{|\ell'(t_0)|} = \frac{|T'(t_0)|}{|f'(t_0)|}$$

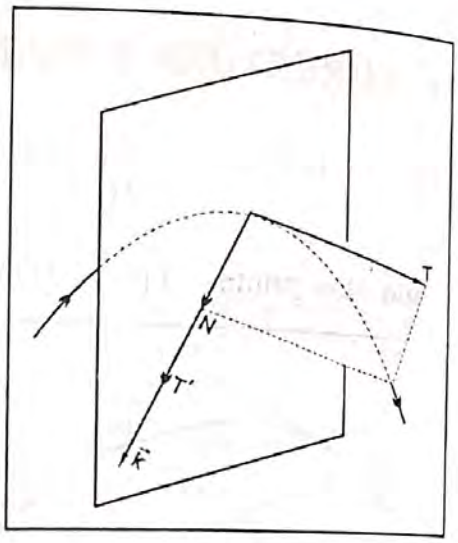
, donde $\begin{cases} \ell(t) = \displaystyle\int_a^t \|f'(\mu)\|\,d\mu \\ \ell'(t) = \|f'(t)\| \end{cases}$

El número $\boxed{k(t_0) = \frac{|T'(t_0)|}{|f'(t_0)|}}$ — (1)

se llama curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto $f(t_0)$

3.16.1 Definición

El vector $\boxed{\vec{k}(t)=\frac{T'}{|f'|}}$ se denomina **VECTOR CURVATURA** de $\mathcal{C}$ en el punto f(t). El escalar $k = |\vec{k}(t)|$ se llama ***curvatura.***



Ejemplo Dado el camino f(t) = (a cos t , a sen t), hallar el vector curvatura y la curvatura de $\mathcal{C}$ en $f(t_0)$.

Solución:

a) Calculo de la curvatura:

Definición de curvatura: $k(t_0)=\frac{|T'(t_0)|}{|f'(t_0)|}$, donde $T(t)=\frac{f'(t)}{|f'(t)|}$

- Hallemos primero, $f'(t) = (-a\,\text{sent}\ ,\ a\cos t)$

$$f''(t) = (-a\cos t\ ,\ -a\,\text{sen}\ t)$$

- $$|f'(t)| = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t} = a$$

- $$T(t) = \frac{1}{a}f'$$

donde $T'(t) = \frac{1}{a}f''(t)$

$$|T'(t)| = \frac{1}{a}|f''(t)| = \frac{1}{a}\,.\,a = 1$$

Luego $k(t_0)=\frac{1}{a}$

b) Cálculo del vector curvatura : $\vec{k}=\frac{T'}{|f'|}=\frac{\frac{1}{a}f''(t)}{a}=\frac{1}{a^2}f''(t)$

$$= \frac{1}{a^2}(-a\cos t\ ,\ -a\,\text{sen}\ t)$$

$$= -\frac{1}{a}(\cos t\ ,\ \text{sen}\ t)$$

Donde $k = |\vec{k}| = \frac{1}{a}$

Observación: Para problemas específicos, la fórmula 1 no es recomendable ni práctico para hallar la curvatura de una curva. Según sea el caso, son recomendables aplicar las siguientes fórmulas :

3.16.2 Proposiciones

PROPOSICIÓN 1

Si $f : I \subset IR \longrightarrow IR^3$

$t \longrightarrow f(t) = (x(t) , y(t) , z(t))$

es un camino regular con segunda derivada continua, entonces la curvatura k de la curva C tiene dos fórmulas:

$$k = \frac{\sqrt{|f'|^2 |f''|^2 - (f' \cdot f'')^2}}{|f'|^3} \quad (2) \qquad k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3} \quad (3)$$

PROPOSICIÓN 2

Si $\alpha(t) = (x(t) , y(t))$ es una curva regular en IR^2, demuestre que su curvatura es :

$$k = \frac{|x' y'' - x'' y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Sugerencia: Aplicar la formula 3 haciendo la tercera componente igual a cero.

PROPOSICIÓN 3

Si una curva $\mathcal{C}$ está definida por la función polar $g : [\alpha , \beta] \longrightarrow IR$

$\theta \longrightarrow r = g(\theta)$

que tiene segunda derivada, la curvatura de $\mathcal{C}$ es:

$$k = \frac{|g^2 + 2g'^2 - gg''|}{(g^2 + g'^2)^{3/2}} \quad (5)$$

PROPOSICIÓN 4

Si la curva $\mathcal{C}$ es la gráfica de la función real de variable real $y = g(x)$ que tiene segunda derivada, la curvatura de $\mathcal{C}$, es:

$$\boxed{k = \frac{|g''|}{[1+(g')^2]^{3/2}}} \quad (6)$$

Demostración de la Proposición 1: Fórmula (2)

1. Partir de la ecuación: $f'' = \ell'' T + \ell' |T'| N \quad , \quad \ell(t) = \int_a^t |f'(\mu)|\, d\mu$

$$\ell' = |f'|$$

2. por definición de curvatura se tiene : $k = \frac{|T'|}{\ell'} \Rightarrow |T'| = \ell' k$

3. Reemplazar en el paso 1.

$$f'' = \ell'' T + \ell' (\ell' k) N$$
$$= \ell'' T + k\, \ell'^2 N$$
$$\Rightarrow \quad k\, \ell'^2 N = f'' - \ell'' T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3*)$$

4. Necesitamos expresar ℓ'' en términos de f'' y T.

Se tiene : $\ell'(t) = |f'(t)|$

y $T = \frac{f'}{|f'|} \Rightarrow f' = |f'| T$

$$f' = \ell' T$$

Derivar: $f'' = \ell'' T + \ell' T'$, multiplicar escalarmente por T:

$$f'' \cdot T = \ell'' T \cdot T + \ell' T' \cdot T \quad . \text{Pero : } T \cdot T = 1 \ , \ T' \cdot T = 0$$
$$f'' \cdot T = \ell'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4*)$$

5. sustituir (4*) en (3*):

$$k\, \ell'^2 N = f'' - (f'' \cdot T) T \quad , \quad \text{pero} \quad T = \frac{f'}{|f'|}$$
$$= f'' - \left(f'' \cdot \frac{f'}{|f'|} \right) T$$
$$= f'' - \frac{f'' \cdot f'}{|f'|} T$$

Aplicar norma en ambos miembros y elevar al cuadrado:

$$|k\,\ell'^2\,N|^2 = \left| f'' - \frac{f''\cdot f'}{|f'|}T \right|^2$$

$$k^2\,\ell'^4\underbrace{|N|^2}_{1} = |f''|^2 - 2f''\cdot\left[\frac{(f''\cdot f')}{|f'|}T\right] + \left[\frac{f''\cdot f'}{|f'|}\right]^2 \underbrace{|T|^2}_{1}$$

$$k^2\,\ell'^4 = |f''|^2 - 2f''.\left[\frac{(f''\cdot f')}{|f'|}\;\frac{f'}{|f'|}\right] + \left[\frac{f''\cdot f'}{|f'|}\right]^2$$

$$= |f''|^2 - 2\frac{(f''\cdot f')}{|f'|}\;\frac{(f''\cdot f')}{|f'|} + \left[\frac{f''\cdot f'}{|f'|}\right]^2$$

$$= |f''|^2 - 2\frac{(f''\cdot f')^2}{|f'|^2} + \frac{(f''\cdot f')^2}{|f'|^2}$$

$$k^2\ell'^4 = \frac{|f''|^2|f'|^2 - (f''\cdot f')^2}{|f'|^2} \qquad \text{donde } \ell' = |f'| \Rightarrow \ell'^4 = |f'|^4$$

$$k^2 = \frac{|f''|^2\,|f'|^2 - (f''\cdot f')^2}{|f'|^6}$$

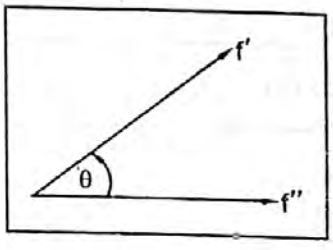
$$k = \frac{\sqrt{|f''|^2|f'|^2 - (f''\cdot f')^2}}{|f'|^3}$$

Demostrar la fórmula **(3)**:

1. Partir de: $k = \dfrac{\sqrt{|f'|^2|f''|^2 - (f'\cdot f'')^2}}{|f'|^3}$

2. Pero $f'\cdot f'' = |f'|\;|f''|\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad (f'\cdot f'')^2 = |f'|^2\,|f''|^2\cos^2\theta$$



3. Reemplazar en 1.

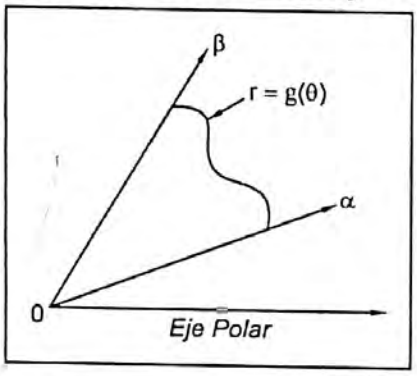
$$k = \frac{\sqrt{|f'|^2|f''|^2 - |f'|^2|f''|^2\cos^2\theta}}{|f'|^3}$$

$$k = \frac{\sqrt{|f'|^2|f''|^2(1-\cos^2\theta)}}{|f'|^3}, \quad 1-\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= \frac{|f'||f''||\operatorname{sen}\theta|}{|f'|^3} \quad , \quad \text{pero } |f'||f''||\operatorname{sen}\theta| = |f' \times f''|$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

Demostración de la proposición 3 .



Aplicaremos la fórmula $k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$. Para ello, formemos la función vectorial $f(\theta) = (r\cos\theta , r\operatorname{sen}\theta)$ donde $r = g(\theta)$.

Así tendremos $f(\theta) = (g(\theta)\cos\theta , g(\theta)\operatorname{sen}\theta)$

$f(\theta) = g(\theta)(\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$

donde $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$, $\mu^{\perp} = (-\operatorname{sen}\theta , \cos\theta)$

Ahora, hallar $f'(\theta) = \frac{df}{d\theta}$, $f''(\theta) = \frac{d^2 f}{d\theta^2}$ y calcular $f' \times f''$.

Veamos:

1. $f'(\theta) = g'(\theta)(\cos\theta , \operatorname{sen}\theta) + g(\theta)(-\operatorname{sen}\theta , \cos\theta)$

$$\boxed{f'(\theta) = g'(\theta)\vec{\mu} + g(\theta)\vec{\mu}^{\perp}}$$

$$\Rightarrow |f'| = \sqrt{g'^2 + g^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1*)$$

2. de $f'(\theta) = g'\vec{\mu} + g\vec{\mu}^{\perp}$, hallar f''

$$f'' = g''\vec{\mu} + g'(\vec{\mu})' + g'\mu^{\perp} + g(\vec{\mu}^{\perp})' \quad , \text{ donde}$$

$$= g''\vec{\mu} + g'\vec{\mu}^{\perp} + g'\vec{\mu}^{\perp} - g\vec{\mu}$$

$$\boxed{f'' = (g'' - g)\vec{\mu} + 2g'\vec{\mu}^{\perp}}$$

$$\begin{cases} \vec{\mu}' = (-\operatorname{sen}\theta , \cos\mu) \\ \quad = \vec{\mu}^{\perp} \\ (\vec{\mu}^{\perp})' = (-\cos\mu , -\operatorname{sen}\theta) \\ \quad = -(\cos\mu , \operatorname{sen}\theta) \\ \quad = -\vec{\mu} \end{cases}$$

3. Hacer el producto vectorial $f' \times f''$

$$f' \times f'' = g'(g''-g)\underbrace{(\vec{\mu}\times\vec{\mu})}_{\vec{0}} + 2g'^2(\vec{\mu}\times\vec{\mu}^{\perp}) + g(g''-g)(\vec{\mu}^{\perp}\times\vec{\mu}) + 2gg'\underbrace{(\vec{\mu}^{\perp}\times\vec{\mu}^{\perp})}_{\vec{0}}$$

$$= 2g'^2(\vec{\mu}\times\vec{\mu}^{\perp}) + g(g''-g)(\vec{\mu}^{\perp}\times\mu)$$

conmutar

$$= 2g'^2(\vec{\mu}\times\vec{\mu}^{\perp}) + g(g-g'')(\vec{\mu}\times\vec{\mu}^{\perp})$$

$$f' \times f'' = [2g'^2 + g(g-g'')](\vec{\mu}\times\vec{\mu}^{\perp})$$

$$\Rightarrow \|f' \times f''\| = |2g'^2 + g(g-g'')| \underbrace{\|\vec{\mu}\times\vec{\mu}^{\perp}\|}_{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3*)$$

4. Sustituir (1*) y (3*) en la fórmula $k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$ obteniéndose :

$$k = \frac{|2g'^2 + g(g-g'')|}{(g'^2+g^2)^{3/2}} = \frac{|2g'^2 + g^2 - gg''|}{(g^2+g'^2)^{3/2}}.$$

Demostración de la Proposición 4:

La función $y = g(x)$ la podemos parametrizar, con parámetro "x", y expresar en forma vectorial por la función $f(x) = (x, g(x))$.

Hallar : f' , f'' y el producto vectorial $f' \times f''$ para sustituir en la fórmula : $k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$

Veamos:

De $f(x) = (x, g(x))$ obtenemos:

$f'(x) = (1, g'(x)) \quad \Rightarrow |f'(x)| = \sqrt{1+g'^2}$

$f''(x) = (0, g''(x))$

$$f' \times g'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & g' & 0 \\ 0 & g'' & 0 \end{vmatrix} = (0\,,0\,,g'')$$

$$\Rightarrow |f' \times f''| = |g''|$$

Reemplazar en la fórmula : $$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3} = \frac{|g''|}{(1+g'^2)^{3/2}}$$

3.16.3 Radio de Curvatura, Centro de Curvatura, Círculo de Curvatura (o Círculo Osculador) de C.

Definición

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camino regular dos veces diferenciable. Para los puntos $f(t) \in GRAF(f)$ en los cuales $k(t) \neq 0$, se definen :

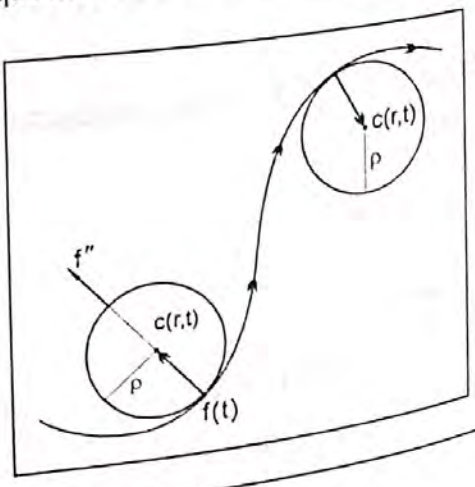
a) El radio de curvatura $\rho(t)$ de la curva $\mathcal{C} = GRAF(f)$ en el punto $f(t)$, es el recíproco de la curvatura en ese punto :

$$\boxed{\rho(t) = \frac{1}{K(t)}}$$

ρ : radio de curvatura (es el radio de una circunferencia que tiene la curvatura)
k : curvatura.

b) El punto $c(t) = f(t) + \rho(t)\, N(t)$ se llama **CENTRO DE CURVATURA** de la curva $\mathcal{C}$ correspondiente al punto $f(t)$.

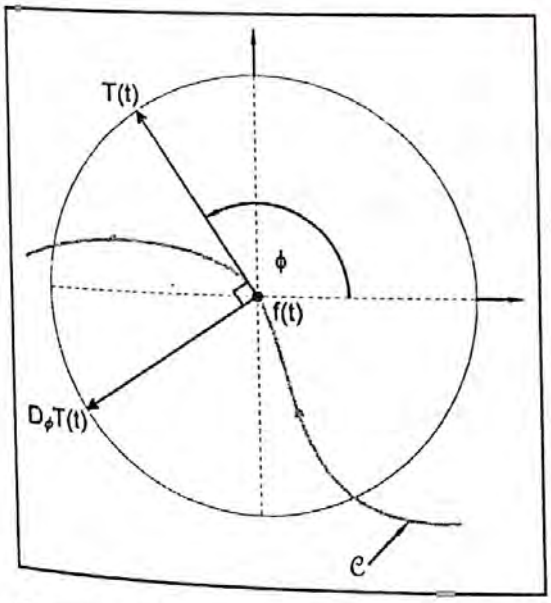
c) El círculo de curvatura (o círculo osculador) de $\mathcal{C}$, correspondiente a $f(t)$, es la circunferencia de radio $\rho(t)$ y centro, el centro de curvatura.



3.16.4 Torsión

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva en $\mathbb{R}^3$ descrita por la traza de la función vectorial $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ y que el vector binormal $\mathbf{B}(t)$ es diferenciable en todos los puntos $f(t)$. En $f(t)$ el vector $\frac{B'(t)}{\ell'(t)}$ describe la razón de cambio del vector binormal respecto a la distancia a lo largo de la curva. Como el vector $\frac{B'(t)}{\ell'(t)}$ es paralelo a $N(t)$, entonces existe un número real que multiplica a $N(t)$, tal que $\frac{B'(t)}{\ell'(t)} = (\text{número real})\, N(t)$. El inverso aditivo de este número real se llama **TORSIÓN** de $\mathcal{C}$ en $f(t)$ y se denota por $\tau(t)$. Esto es, la torsión τ está definida por la relación $B' = -\tau\, \ell'\, N$.

3.16.4.1 Otra forma de abordar el estudio de la curvatura y torsión.



I. Si "t" es el parámetro, deducimos :
Sea T(t) un vector tangente unitario en el punto f(t). Si ϕ es el ángulo entre la horizontal y el vector T(t), y si además $\phi = \phi(t)$, entonces el vector T(t) queda definida por $T(t) = (\cos\phi(t), \operatorname{sen}\phi(t))$.

Como $T \longrightarrow \phi \longrightarrow t$, aplicamos la regla de la cadena para obtener: $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}$, donde:

$$\frac{dT}{d\phi} = (-\operatorname{sen}\phi(t), \cos\phi(t))$$

$$\left|\frac{dT}{d\phi}\right| = 1$$

El vector $\frac{dT}{d\phi} = (-\operatorname{sen}\phi, \cos\phi) = (\cos(\phi + \frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(\phi + \frac{\pi}{2}))$ es ortogonal al vector T(t).

Como podemos apreciar: ϕ es el ángulo que da la dirección de T(t).

y $\frac{\pi}{2} + \phi$ es el ángulo que da la dirección del vector $\frac{dT}{d\phi}$.

El vector $\frac{dT}{dt}$ sigue la dirección del **VECTOR NORMAL PRINCIPAL** y como el vector $\frac{dT}{d\phi}$ es unitario, entonces $\frac{dT}{dt} = \begin{cases} N(t) & , \text{si } \frac{d\phi}{dt} > 0 \\ -N(t) & , \text{si } \frac{d\phi}{dt} < 0 \end{cases}$

II. Si "s" es el parámetro "Longitud de arco" definido por $s(t) = \int_{t_0}^{t} |f'(t)|\,dt$, $\frac{ds}{dt} = |f'(t)|$ y si además $\phi = \phi(s)$, entonces el vector T(s) queda definido por $T(s) = (\cos \phi(s)\,,\, \text{sen}\, \phi(s))$.

Como: $T \longrightarrow \phi \longrightarrow s$, aplicamos la regla de la cadena: $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}$, donde

$\frac{dT}{d\phi} = (-\text{sen}\, \phi(s)\,, \cos \phi(s))\,,\ \left|\frac{dT}{d\phi}\right| = 1$

$\left|\frac{dT}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \longleftarrow$ *mide la rapidez de cambio de la medida del ángulo que dá la dirección de T con respecto a la longitud de arco s.*

III. *DEFINICIÓN.* Si $T = T(t)$ y $T \longrightarrow \phi \longrightarrow s$, definimos :

a) $\vec{k}(t) = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}$ se llama **VECTOR CURVATURA** de $\mathcal{C}$ en $P = f(t)$.

b) El número real $k = |\vec{k}| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$ se llama **CURVATURA** de $\mathcal{C}$ en $P = f(t)$.

"La curvatura es la variación del ángulo ϕ respecto a la longitud de arco s"

IV. Probar que: $k(t) = \frac{|T'(t)|}{|f'(t)|}$

Prueba: A partir de $T(t) = (\cos s(t)\,,\, \text{sen}\, s(t))$ donde $T \to s \to t$ obtenemos $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}$, donde $\frac{dT}{dt} = T'$, $\frac{dT}{dt} = \vec{k}$, $\frac{ds}{dt} = |f'(t)|$.

Entonces $T' = \vec{k}|f'| \Rightarrow |T'| = |\vec{k}||f'|$, $|\vec{k}| = k$

$$|T'| = k\,|f'| \Rightarrow k = \frac{|T'|}{|f'|}$$

V. Derivando de igualdad $B = T \times N$ y sabiendo que $\ell' = |f'|$, $T' = k\,\ell'\,N$

se prueba que $B' = T \times N'$

de donde $N \times B' = N \times (T \times N')$

$= (N \cdot N')T - (N \cdot T)N'$, como $N \cdot N' = 0$, $N \cdot T = 0$

$= \vec{0}$

Si $N \times B' = \vec{0}$ entonces B' es paralelo a N.

Considerando el vector B como función de s y s es función de t, esto es $B \to S \to t$; al derivar obtenemos :

$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{ds}\frac{ds}{dt}$ (1) , donde $\frac{dB}{dt} = B'$ y $\frac{ds}{dt} = \ell'$

Si $\frac{ds}{dt} > 0$, entonces el vector $\frac{dB}{ds}$ tiene la misma dirección del vector $\frac{dB}{dt}$.

Como el vector B' es paralelo al vector normal N, entonces existe un número real, que la llamaremos $-\tau$, tal que $\frac{dB}{ds} = -\tau N$ ... (2)

Conclusión:

a) Si en $\frac{dB}{ds} = -\tau N$ aplicamos **NORMA** : $\left|\frac{dB}{ds}\right| = \tau$, lo cual define la torsión, como "la razón de cambio de la **BINORMAL** respecto a la longitud de arco s"

b) En (1) tendremos : $B' = (-\tau N)\,\ell' = -\tau\,\ell'\,N$.

3.16.5 Proposiciones

Proposición 1

Probar que: a) $T' = k\,\ell'\,N$ b) $N' = -k\,\ell'\,T + \tau\,\ell'\,B$

Proposición 2

Si $\mathcal{C}$ es una curva en IR^3 definida por $f(t) = (x(t) , y(t) , z(t))$

demostrar que: $f''' = (\ell''' - k^2\,\ell'^3)\,T + (3\,k\,\ell'\,\ell'' + |k|'\,\ell'^2)\,N + k\,\tau\,\ell'^3\,B$

Proposición 3

Si $\mathcal{C}$ es una curva en IR^3 definida por $f(t)$, probar que: $\boxed{\tau = \frac{(f' \times f'') \cdot f'''}{|f' \times f''|^2}}$

Demostración de la proposición 1 :

Parte a)

Partir de $N = \frac{T'}{|T'|}$

$\Rightarrow \quad T' = |T'|\, N \quad , \quad$ pero $\quad |T'| = \ell'\, k$

$\Rightarrow \quad T' = k\, \ell'\, N$

De: $\vec{K} = \frac{T}{|f'|}$

$T' = \underbrace{|f'|}_{\ell'}\vec{K}$

$T' = \ell'\vec{K}$

$|T'| = \ell'|\vec{K}|, |\vec{K}| = k$

$|T'| = \ell'\, k$

Parte b)

Partir de: $N = B \times T$

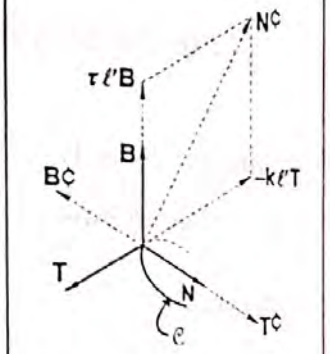
Derivar: $N' = B' \times T + B \times T' \quad ,$ pero $\begin{cases} B' = -\tau\, \ell'\, N \\ T' = K\, \ell'\, N \end{cases}$

$= (-\tau\, \ell'\, N) \times T + B \times (k\, \ell'\, N)$

$= -\tau\, \ell'\, (N \times T) + k\, \ell'\, (B \times N)$

$= -\tau\, \ell'\, (-B) + k\, \ell'\, (-T)$

$= \tau\, \ell'\, B - k\, \ell'\, T$



$T \times N = B$
$N \times B = T$
$B \times T = N$

Fórmulas de Frenet:

$T' = k\, \ell'\, N$

$N' = \tau\, \ell'\, B - k\, \ell'\, T$

$B' = -\tau\, \ell'\, N$

Demostración de la Proposición 2 :

En : $f'' = \ell''\, T + \ell'\, T'$

Derivar : $f''' = \ell'''\, T + \ell''\, T' + \ell''\, T' + \ell'\, T''$

$= \ell'''\, T + 2\ell''\, T' + \ell'\, T'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

De : $T' = k\, \ell'\, N$

derivar : $T'' = k'\, \ell'\, N + k\, \ell''\, N + k\, \ell'\, N'$ $\Big\}$ ..... (2)

Pero : $N' = -k\, \ell'\, T + \tau\, \ell'\, B$

Al reemplazar (2) en (1), obtenemos:

$$\boxed{f''' = (\ell''' - k^2\, \ell'^3)\, T + (3\, k\, \ell'\, \ell'' + k'\, \ell'^2)\, N + k\, \tau\, \ell'^3\, B}$$

esta igualdad nos dice que, f''' es combinación lineal de los vectores ortonormales $\{T, N, B\}$

Demostración de la proposición 3 :

Bastará multiplicar escalarmente el vector B por el vector f ‴, obteniéndose :

$$\frac{f' \times f''}{|f' \times f''|} \cdot f''' = k\,\tau\,\ell'^{3} \quad , \qquad \text{donde} \begin{cases} T \cdot B = 0 \\ N \cdot B = 0 \\ B \cdot B = 1 \end{cases}$$

Pero: $k = \dfrac{|f' \times f''|}{|f'|^3} = \dfrac{|f' \times f''|}{\ell'^3}$

Reemplazar:

$$\frac{f' \times f''}{|f' \times f''|} \cdot f''' = \frac{|f' \times f''|}{\ell'^3}\,\tau\,\ell'^3$$

$$= |f' \times f''|\,\tau$$

$$\tau = \frac{(f' \times f'') \cdot f'''}{|f' \times f''|^2}$$

Ejemplo 1 Dado el camino $f(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar :

a) La curvatura k , b) la torsión τ.

Solución:

a) Fórmula : $k = \dfrac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$

Se tiene : $f'(t) = (1, 2t, 2t^2) \Rightarrow |f'| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = (1 + 2t^2)$

$$f''(t) = (0, 2, 4t) \Rightarrow f'''(t) = (0, 0, 4)$$

$$f' \times f'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{vmatrix} = (4t^2, -4t, 2) = 2(2t^2, -2t, 1)$$

$$|f' \times f''| = 2\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} = 2(1 + 2t^2)$$

Luego $k = \dfrac{2(1 + 2t^2)}{(1 + 2t^2)^3}$

$$\boxed{k(t)=\frac{2}{(1+2t^2)^2}}$$

b) $\tau=\dfrac{(f'\times f'').f'''}{|f'\times f''|^2}$

$$=\frac{2(2t^2,-2t,1)\cdot(0,0,4)}{4(1+2t^2)^2}$$

$$\boxed{\tau(t)=\frac{2}{(1+2t^2)^2}}$$

Ejemplo 2 Con referencia al ejemplo 1, hallar los vectores T, N y B cuando $t=1$. Hallar también las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante.

Solución:

a) $T=\dfrac{f'}{|f'|}$ en $t=1$. se tiene $\begin{cases} f'(t)=(1,2t,2t^2) \\ f'(1)=(1,2,2) \end{cases}$

$=\frac{1}{3}(1,2,2)$ $\qquad |f'(1)|=\sqrt{1+4+4}=3$

b) $N=\dfrac{T'}{|T'|}$ en $t=1$. se tiene $\begin{cases} T=\dfrac{f'}{|f'|} \\ \quad =\dfrac{1}{(1+2t^2)}(1,2t,2t^2) \end{cases}$

Al derivar T, obtenemos:

$$T'=\left[\frac{1}{(1+2t^2)}\right]'(1,2t,2t^2)+\frac{1}{1+2t^2}\left[(1,2t,2t^2)\right]'$$

$$=\frac{-4t}{(1+2t^2)^2}(1,2t,2t^2)+\frac{1}{1+2t^2}(0,2,4t)$$

$$T'(1)=\frac{-4}{9}(1,2,2)+\frac{1}{3}(0,2,4)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{-4}{3}(1,2,2)+(0,2,4)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3},\frac{-2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{9}(-2,-1,2)$$

$|T'(1)| = \frac{2}{9}\sqrt{4+1+4} = \frac{2}{3}$. Luego $N = \frac{\frac{2}{9}(-2,-1,2)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$

c) $B = T \times N = \frac{1}{3}(1,2,2) \times \frac{1}{3}(-2,-1,2)$

$$= \frac{1}{9}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(6,-6,3) = \frac{1}{3}(2,-2,1)$$

d) Para hallar las ecuaciones de los planos: osculador, normal y rectificante se requiere el punto $P_0 = f(1) = \left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$.

Plano Osculador : $(P - f(1)) \cdot B(1) = 0 \Rightarrow (x-1, y-1, z-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}(2,-2,1) = 0$

$$6x - 6y + 3z - 2 = 0$$

Plano Normal : $(P - f(1)) \cdot T(1) = 0 \Rightarrow (x-1, y-1, z-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}(1,2,2) = 0$

$$3x + 6y + 6z - 13 = 0$$

Plano Rectificante: $(P - f(1)) \cdot N(1) = 0 \Rightarrow (x-1, y-1, z-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3}(-2,-1,2) = 0$

$$6x + 3y - 6z - 5 = 0$$

Ejemplo 3 Determinar la curvatura de la parábola $y = 4px^2$.

Solución:

Como la curva está expresada como función real de variable real, $g(x) = 4px^2$, aplicar la fórmula:

$$k = \frac{|g''|}{\left[1+(g')^2\right]^{3/2}}$$

De $g(x) = 4px^2$, obtenemos:

$g'(x) = 8px$

$g''(x) = 8p$

$$\Rightarrow k = \frac{8|p|}{\left[1+(8px)^2\right]^{3/2}}$$

Ejemplo 4 Determinar la curvatura de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Solución:

En este caso aplicar la fórmula $k = \dfrac{|g^2 + 2g'^2 - gg''|}{(g^2 + g'^2)^{3/2}}$

donde $g(\theta) = 1 + \cos\theta \Rightarrow g^2 = 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta$

$g'(\theta) = -\text{sen}\,\theta \Rightarrow g'^2 = \text{sen}^2\theta$

$g''(\theta) = -\cos\theta$

$gg'' = -\cos\theta - \cos^2\theta$

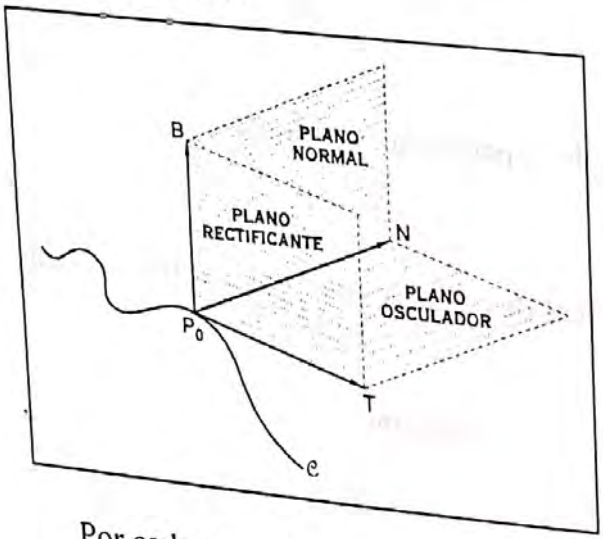
Luego, $k = \dfrac{|1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + 2\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta|}{(1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \text{sen}^2\theta)}$

$$= \frac{|3 + 3\cos\theta|}{(2 + 2\cos\theta)^{3/2}} = \frac{3|1 + \cos\theta|}{2^{3/2}(1 + \cos\theta)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\theta}}$$

$$0 < 1 + \cos\theta < 2.$$

3.16.6 Triedro Móvil

Por cada punto $P_0 = f(t_0)$ perteneciente a la curva $\mathcal{C}$ = traza de f, existe el triedro móvil $\{T, N, B\}$.



Este triedro es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ intrínseco a una curva parametrizada.

Definición:

$\{T, N, B\}$ es ortonormal si son ortogonales entre sí y son unitarios.

Por cada punto $P_0 = f(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ de la curva $\mathcal{C}$, pasan tres rectas y tres planos bien definidos:

RECTA TANGENTE	:	$P = P_0 + sT$	, $s \in IR$
RECTA NORMAL PRINCIPAL	:	$P = P_0 + r\,N$	, $r \in IR$
RECTA BINORMAL	:	$P = P_0 + t\,B$	, $t \in IR$
PLANO NORMAL	:	$(P - P_0) \cdot T = 0$	
PLANO RECTIFICANTE	:	$(P - P_0) \cdot N = 0$	
PLANO OSCULADOR	:	$(P - P_0) \cdot B = 0$	

3.16.7 Fórmulas de Frenet - Serrel

A las Fórmulas:

$$T' = k\,\ell'\,N$$

$$N' = \tau\,\ell'\,B - k\,\ell'\,T$$

$$B' = -\tau\,\ell'\,N$$

Se les conocen como "fórmulas de Frenet" y describen el movimiento del triedro $\{T, N, B\}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$. Las fórmulas de Frenet constituyen unas de las herramientas fundamentales en el estudio de la **GEOMETRIA DIFERENCIAL** de las curvas en el espacio IR^3.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dado el camino $f(t) = (t, t^2, t^3)$. Hallar la ecuación de la recta tangente y del plano normal en $t = 1$.

   R: a) $x = 1 + s$, $y = 1 + 2s$, $z = 1 + 3s$; b) $x + 2y + 3z - 6 = 0$

2. Dado el camino $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

   a) verificar que $\vec{k}(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in IR$

   b) Hallar la ecuación del vector normal principal en $t = \frac{\pi}{2}$

   c) Hallar la ecuación del plano osculador en $t = \frac{\pi}{2}$

R: a) $\vec{K}(t) = -\frac{1}{2}(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$

b) $x = 1 - s \ , \ z = \frac{\pi}{2}$

c) $x + z = \frac{\pi}{2}$

3. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal al camino $f(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3)$, en $t = 1$.

R: a) $x = 2 + s \ , \ y = -1 - 2s \ , \ z = 2 + 3s$; b) $x - 2y + 3z - 10 = 0$

4. Hallar las intersecciones del plano X Y con las rectas tangentes a la hélice descrita por el camino. $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \ , \ t > 0$.

R: a) La tangente en el punto $f(t)$ es : $x = \cos t - s \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} t + s \cos t$, $z = t + s \ , \ s \in \mathbb{R}$.

b) $s = -t$

c) $x = \cos t + t \operatorname{sen} t \ , \ y = \operatorname{sen} t - t \cos t \ , \ z = 0$.

5. Hallar el vector curvatura $\vec{K}$ y la curvatura k de la curva definido por el camino $f(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$ en el punto $t = 1$

R: a) $\vec{K} = -\frac{1}{3}(1, 0, -1)$ b) $k = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

6. Hallar una normal principal unitaria y una binormal unitaria a todo lo largo del camino $f(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

R: $N = \frac{1}{1+t^2}(-2t, 1 - t^2, 0)$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(t^2 - 1, -2t, 1 + t^2)$

7. Demostrar que los puntos de la hélice $f(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ cuyos planos osculadores pasan por un punto fijo $f(t_0)$, están en un plano.

SUGERENCIA: Hallar la ecuación del plano osculador, que es $(P - f(t_0)) \cdot (f' \times f'') = 0$ y luego reemplazar $f(t_0)$.

8. Hallar la curvatura y la torsión del camino $f(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

R: $k = \frac{2}{3(1+t^2)^2}$, $\tau = k$

9. Hallar la curvatura en cualquier punto del camino $f(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t)$.

R: $k = \dfrac{\sqrt{1+4\operatorname{sen}^4 \frac{t}{2}}}{\sqrt{(1+4\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2})^3}}$

10. Dado el camino $\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & , \ t > 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & , \ t < 0 \\ (0,0,0) & , \ t = 0 \end{cases}$

a) Probar que α es una curva diferenciable .

b) Probar que α es regular para todo t y que la curvatura $k(t) \neq 0$, para $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $k(0) = 0$

11. En el punto $t = 1$ de la cúbica alabeada $x = 2t, y = t^2, z = \frac{t^3}{3}$; encontrar T, N, B, k, τ, y la ecuación de su plano osculador.

R: $T = \frac{1}{2}(2,2,1)$, $B = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, $N = \frac{1}{3}(-2,1,2)$

Plano osculador : $3x - 6y + 6z - 2 = 0$, $k = \frac{2}{9}$, $\tau = \frac{2}{9}$.

12. Sea $R = R(t)$ una curva alabeada sobre una esfera unitaria. Si t es su longitud de arco, demostrar que la curva.

i) $r = a \int_0^t R(t)\,dt$ tiene curvatura constante $k = \frac{1}{|a|}$. y, si t es un parámetro arbitrario, la curva.

ii) $r = a \int_0^t R(t) \times \frac{dR}{dt}\,dt$ tiene torsión constante $\tau = \frac{1}{a}$

13. En los puntos $t = 0$ y $t = 1$ de la cúbica $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ encontrar :

a) T , N , B

b) k y τ.

c) Las ecuaciones de los planos normal y osculador.

R: a) $T = \vec{i}$, $N = \vec{j}$, $B = \vec{k}$; $T = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $N = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$

$B = \frac{1}{3}(2,-2,1)$; $k = \tau = \frac{2}{3}$; $k = \tau = \frac{2}{27}$

donde: $k = \tau = \frac{2}{3}(1+2t^2)^2$

14. Encontrar k y τ en cualquier punto t del camino con ecuaciones paramétricas: $x = a(3t - t^3)$, $y = 3at^2$, $z = a(3t + t^3)$.

R: $k = \tau = \frac{1}{2}a(1+t^2)^2$

15. Demostrar que la curvatura y torsión de la curva $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}\,t$ son: $k = -\tau = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

16. Demuestre que la curva $f(t) = (a \cos h\, t\,,\ a \operatorname{sen} h\, t\,,\ bt)$ tiene curvatura y torsión iguales en todos sus puntos, sí y sólo si $a = b$.

17. Hallar la curvatura del camino $f(t) = (e^t \operatorname{sen} 2t\,,\ e^t \cos 2t\,,\ 2e^t)$ en $t = 0$.

R: $k = \frac{2\sqrt{5}}{9}$

18. Hallar la curvatura del camino $f(t) = \left(2\cos h\,\frac{t}{2}\,,\ 2\operatorname{sen} h\,\frac{t}{2}\,,\ 2t\right)$ en $t = 0$

R: $k = \frac{1}{10}$.

19. Hallar la curvatura y la torsión del camino $\alpha(s) = \left(\frac{4}{s}\cos(s)\,,\ 1 - \operatorname{sen}(s)\,,\ -\frac{3}{s}\cos(s)\right)$ en $s = \pi$, siendo s la longitud de arco.

R: $k = 1$, $\tau = 0$.

20. Hallar la curvatura de la curva en IR^2, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \int_0^t \cos\frac{\pi\theta^2}{2}\,d\theta$, $y = \int_0^t \operatorname{sen}\frac{\pi\theta^2}{2}\,d\theta$

R: $k = \pi t$. Aplicar la formula 4 en 16.2

21. Calcule la curvatura de la espiral logarítmica $r = e^{-\theta}$ para todo t. ¿Qué resultado se obtiene si θ tiende al infinito.

R: $k = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\theta}$

22. Hallar la curvatura de la espiral de Arquímedes $r = \theta$ en un punto cualquiera.

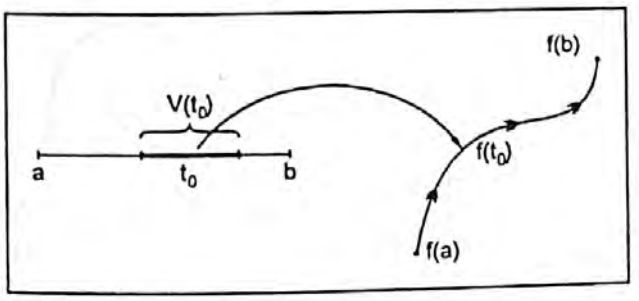
R: $K = \frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}$

23. Calcular el radio de curvatura de la carioide $r = 1 + \cos\theta$, en $\theta = 0$.

R: $\frac{4}{3}$

3.17 LA TEORÍA LOCAL DE CURVAS, PARAMETRIZADAS POR LA LONGITUD DE ARCO

Introducción. Hasta el momento hemos definido un camino $f(t)$, con parámetro arbitrario $t \in [a, b]$ y sobre ella hemos definido su curvatura $k(t)$ y su torsión $\tau(t)$. Esta vez, deseamos analizar la curva en cada entorno $V(t_0) \subset \langle a, b \rangle$. Es decir, queremos hacer un análisis local.



Para hacer análisis local del camino $f(t)$ es necesario reparametrizar dicho camino por la longitud de arco s. Supongamos que $\alpha(s)$, $s \in [0, L]$ es la reparametrización de $f(t)$ por longitud de arco, entonces $\alpha(s)$ tiene ciertas características que no tiene $f(t)$:

1. El parámetro de $\vec{f}$ es t, $t \in [a, b]$. El parámetro de α es s, donde $s = \int_a^t |f'(\mu)|\, d\mu$.

2. Traza $\vec{\alpha}(s) = \text{traza}\, \vec{f}(t)$

3. $|\alpha'(s)| = 1 \quad , \quad \forall s \in [0, L] \quad , \quad |f'(t)| \neq 1$ salvo excepción.

4. $\int_0^s |\alpha'(\mu)|\, d\mu = s \ , \ s \in [0, L]$, $\int_0^t |f'(\mu)|\, d\mu = s(t) \ , \ t \in [a, b]$

Función longitud de arco

Al derivar con respecto a s

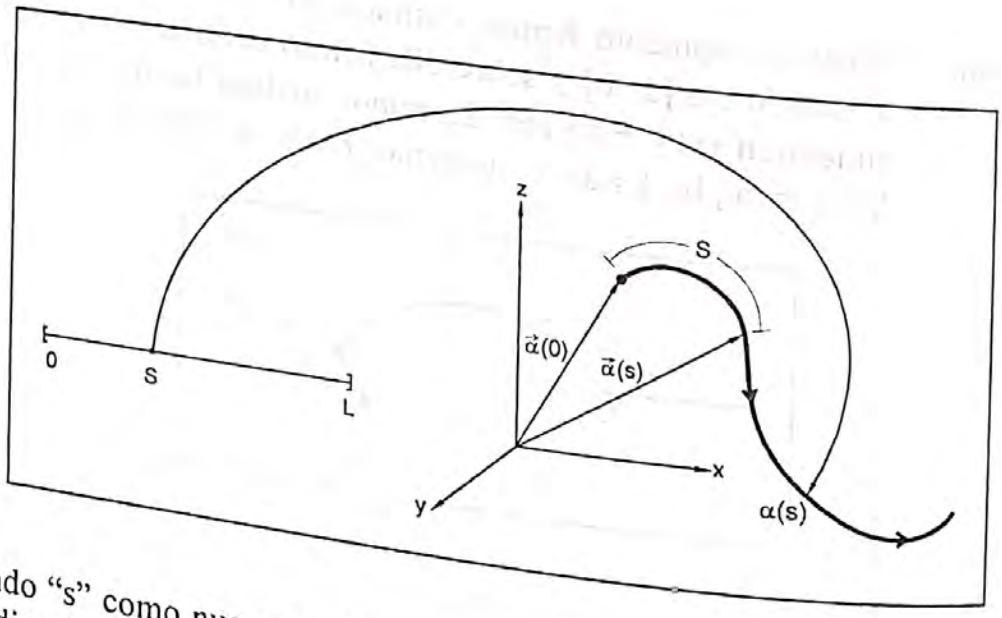
$|\alpha'(s)| = 1$

ésta igualdad nos dice que la rapidez en todo instante s es la unidad..

Al derivar con respecto a t

$|f'(t)| = s'(t) \quad , \quad s' = \frac{ds}{dt}$

La igualdad en 4 nos indica que un proyectil que es mueve de $\alpha(0)$ hasta $\alpha(s)$ recorreré una longitud s en un tiempo s



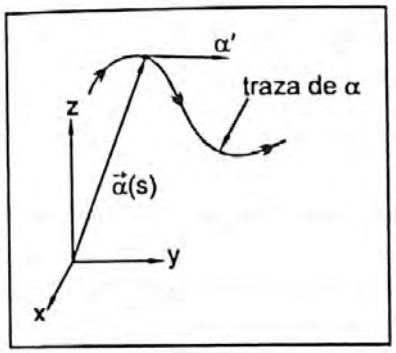
Eligiendo "s" como nuevo parámetro para reparametrizar el camino f(t), se puede hacer estudios de carácter local de una curva.

Definición 1

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizadas por la longitud de arco s,
$s \longrightarrow \alpha(s)$

definimos:

a) $\alpha'(s)$ es el ***vector tangente unitario*** en el sentido del camino $\alpha(s)$.



La longitud de $\alpha'(s)$ es la unidad para todo s, es decir:

$$|\alpha'(s)| = 1$$

NOTACIÓN: $\boxed{T(s) = \alpha'(s)}$

es la notación del vector tangente.

b) $\alpha''(s)$ es el vector aceleración y es ortogonal a $\alpha'(s)$.
Prueba: α'' es ortogonal a $\alpha' \iff \alpha' \cdot \alpha'' = 0$

Como: $|\alpha'(s)| = 1 \iff |\alpha'(s)|^2 = 1$
$\iff \alpha' \cdot \alpha' = 1$

Al derivar: $\alpha'' \cdot \alpha + \alpha' \cdot \alpha'' = 0$
$2\,\alpha' \cdot \alpha'' = 0 \Rightarrow \alpha' \cdot \alpha'' = 0$

NOTACIÓN: $\boxed{\alpha''(s) = T'(s)}$

Definición 2

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco $s \in I$. El vector $\vec{K}(s) = \alpha''(s)$ se llama **VECTOR CURVATURA** y el número $k(s) = |\alpha''(s)|$ se denomina la curvatura de α en s.

Nota. Si comparamos con la definición 3.16.1: $k = \frac{|T'|}{|\alpha'|}$ donde $T' = \alpha''$ y $|\alpha'| = 1$, obtenemos $k = |\alpha''|$.

Proposición 1 $\alpha''(s)$ y k son invariantes bajo cambios de orientación.

Prueba:

Supongamos que el parámetro s lo cambiamos por $-s$, y suponer que:

$\alpha(s) = \beta(-s)$. Al derivar respecto a s , obtenemos:

$\alpha'(s) = (-1)\,\beta'(-s)$

$\alpha''(s) = (-1)(-1)\,\beta''(-s)$

$= \beta''(-s) \quad \Rightarrow \quad \beta''(-s) = |\alpha''(s)| = k$.

Definición 3

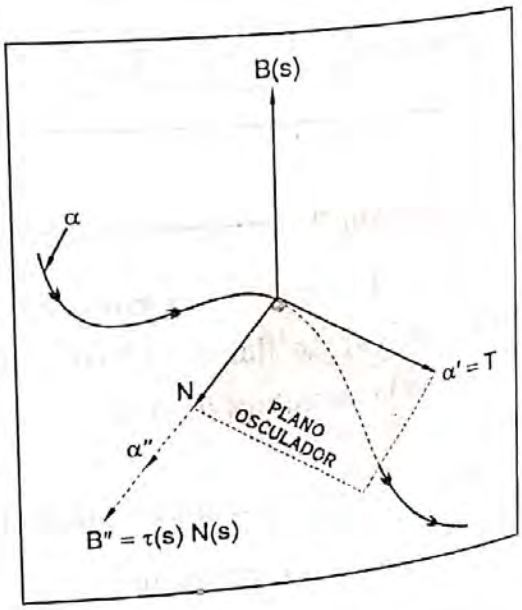
En los puntos donde $k(s) \neq 0$, está bien definido un vector unitario N(S) en la dirección de $\alpha''(s)$ mediante la ecuación $\boxed{\alpha''(s) = k(s)\,N(s)}$

El vector N(s) se llama vector normal a $\alpha(s)$ en s.

Como $\alpha'' = T'$ $\Rightarrow$ $\boxed{T'(s) = k(s)\;N(s)}$

Definición 4

El plano determinado por T(s) y N(s), se denomina el **PLANO OSCULADOR** en s.



Definición 5

El vector unitario $\boxed{B(s) = T(s) \times N(s)}$ es normal al plano osculador y se llama **VECTOR BINORMAL** en s.

Definición 6

Si $\alpha''(s) \neq \vec{0}$, el número $\tau(s)$ definido por $\boxed{B'(s) = \tau(s)\, N(s)}$ se denomina la TORSIÓN de α en s.

Proposición 2 Si $\alpha(s)$ es una curva plana ($\alpha(I) \subset$ PLANO), entonces el plano de la curva coincide con el plano osculador.

Dicho de otra manera: Si $\alpha(s)$ es una curva plana, entonces $\tau \equiv 0$.

Proposición 3 (Recíproco de la Proposición 2) Si $\tau \equiv 0$ y $k \equiv 0$ entonces $\alpha(s)$ es una curva plana.

Prueba: Por demostrar que: $\langle \alpha(s) , b_0 \rangle$ = constante

1. Por la definición 6 se tiene: $B'(s) = \tau(s)\, N(s)$
2. Si $\tau \equiv 0$, entonces $B'(s) = \mathbf{0}$
3. Integrar : $B(s) = b_0$ ⟵ *vector binormal constante.*
4. Ahora, derivemos el producto escalar $\langle \alpha(s) , b_0 \rangle$, respecto a s :
   $\langle \alpha(s) , b_0 \rangle' = \langle \alpha'(s) , b_0 \rangle + \langle \alpha(s) , b'_0 \rangle$. Pero $b'_0 = 0$, entonces
   $\langle \alpha(s) , b_0 \rangle' = \langle \alpha'(s) , b_0 \rangle$ · Como $\alpha'(s)$ es ortogonal a b_0, $\langle \alpha'(s) , b_0 \rangle = 0$
5. $\langle \alpha(s) , b_0 \rangle' = 0$. Que al integrar obtenemos:
6. $\langle \alpha(s) , b_0 \rangle$ = constante.

Proposición 4 Probar que $N' = -k\,T - \tau\,B$

Prueba:

Teniendo en cuenta que : $T' = k\,N$, $B' = \tau\,N$ y derivando

$$N = B \times T \text{ , obtenemos :}$$
$$N' = B' \times T + B \times T'$$
$$N' = (\tau\,N) \times T + B\,(k \times N)$$
$$= \tau\,(N \times T) + k\,(B \times N)$$
$$= \tau\,(-B) + k\,(-T)$$
$$= -\tau\,B - k\,T$$

Proposición 5 Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por

$$S \longrightarrow \alpha(s)$$

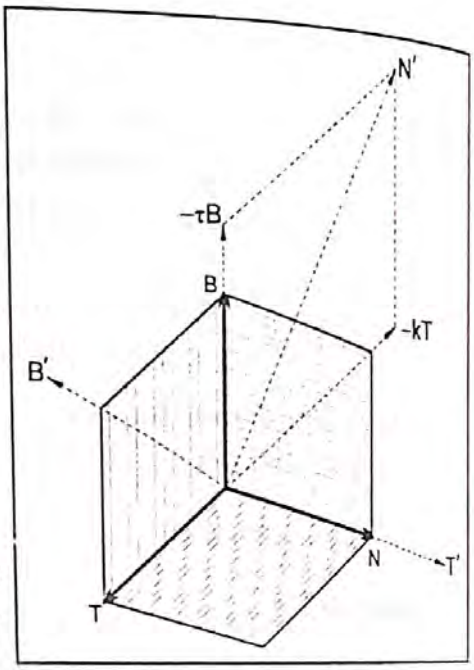
la longitud de arco s, entonces la torsión está dada por:

$$\tau(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s)\|^2}$$

FÓRMULAS DE FRENET

TEOREMA En cualquier punto de una curva $\alpha(s)$, los vectores T, N y B verifican el siguiente sistema de tres ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden en T, N y B

$$\begin{cases} T' = k\,N \\ N' = -k\,T - \tau\,B \\ B' = \tau\,N \end{cases}$$



k y τ son entidades geométricas que nos proporcionan información sobre el comportamiento de α en un entorno de s.

3.17.1 Ecuaciones Intrínsecas

En base a las fórmulas de Frenet podemos afirmar que una curva queda bien determinada por su curvatura $k(s)$ y su torsión $\tau(s)$. Esta afirmación se condensa en el siguiente teorema.

TEOREMA Toda curva queda bien definida por las ecuaciones $k = k(s)$, $\tau = \tau(s)$ llamadas ecuaciones naturales o intrínsecas.

Ejemplos

1. Las ecuaciones intrínsecas de una recta son: $k \equiv 0$ y $\tau \equiv 0$.
2. Las ecuaciones intrínsecas de una circunferencia de radio ρ son $\rho = \frac{1}{|k|}$, $k \neq 0$, $\tau = 0$.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE CURVAS EN $\mathbb{R}^3$

Dadas las funciones diferenciables $k(s) > 0$ y $\tau(s)$, $s \in [a, b]$ existe una y sólo una curva C cuya curvatura es $k(s)$ y su torsión es $\tau(s)$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Unidad: si C y C* son dos curvas tales que $k(s) = k^*(s)$ y $\tau(s) = \tau^*(s)$, entonces $C = C^*$.

($\Leftarrow$) Existencia (consultar el libro: Geometría diferencial de curvas y superficies; autor Manfredo P. do Carmo).

Observación:

Por el teorema fundamental, podemos hallar la ecuación vectorial $\alpha(s)$ de una curva, cuando se conocen sus ecuaciones intrínsecas. Para ello, se tiene que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales que se presentan en el Triedro de Frenet.

Para curvas planas, es posible lograr la integración de las ecuaciones de Frenet según el siguiente corolario.

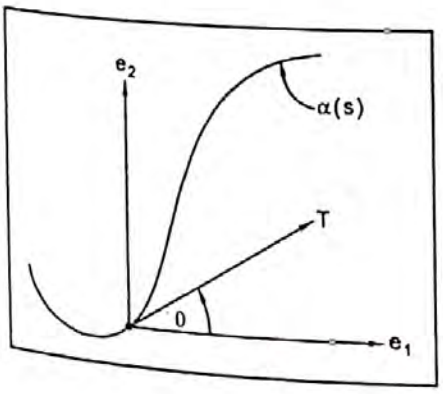
COROLARIO Dada una función diferenciable k(s), $s \in I$. Si $k = k(s)$ es la curvatura de una curva plana y $\theta(s) = \int k(s)\,ds + \varphi$ es el ángulo entre el vector tangente T y $e_1 = (1, 0)$, entonces la curva plana parametrizada está definida por:

$$\alpha(s) = \int \frac{1}{k(0)} (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))\,ds + \bar{C},\ \bar{c} = (a, b).$$

Demostración:

1. Como hipótesis se tiene: $\tau = 0$ y $k = k(s)$

2. Si $\theta(s)$ es el ángulo entre T y el vector $e_1 = (1, 0)$, entonces.



$$\mathbf{T} = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$$

$$\text{y} \quad \mathbf{N} = (-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s))$$

3. Al derivar respecto a s, obtenemos :

a) $$\begin{aligned} T' &= (-\theta'(s)\operatorname{sen}\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s)) \\ &= \theta'(s)(-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s)) \\ &= \theta'(s)\,\mathbf{N} \end{aligned}$$

b) $N' = (-\theta'(s)\cos\theta(s), -\theta'(s)\,\text{sen}\,\theta(s))$

$= -\theta'(s)(\cos\theta(s), \text{sen}\,\theta(s))$

$= -\theta'(s)\,\mathbf{T}$

4. Reemplazar $\tau = 0$ en el triedro de Frenet $\begin{cases} T' = kN \\ N' = -kT - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$

obteniéndose: $\begin{cases} T' = kN \\ N' = kT \end{cases}$

Al comparar éstas ecuaciones diferenciales con los resultados obtenidos en 3. a) y b) se obtiene que: $k = \theta'(s)$.

5. Al resolver la ecuación diferencial : $\theta'(s) = k(s)$

obtenemos : $\boxed{\theta(s) = \int k(s) + \varphi}$

φ es una constante

6. Por otro lado, el vector tangente T es igual a $\alpha'(s)$. Es decir $\alpha'(s) = T$

Integrar: $\alpha(s) = \int T\,ds + C$, $C = (a, b)$ vector constante

$= \int (\cos\theta(s), \text{sen}\,\theta(s))\,ds + C$

$= \int (\cos\theta(s), \text{sen}\,\theta(s))\frac{ds}{d\theta}\cdot d\theta + C$

$= \int \left(\cos\theta(s), \text{sen}\,\theta(s)\frac{1}{\frac{d\theta}{ds}}d\theta\right) + C$

Pero: $\frac{d\theta}{ds} = k(\theta) \Rightarrow \alpha(s) = \int \frac{1}{k(\theta)}(\cos\theta(s), \text{sen}\,\theta(s))\,d\theta + C$ //

PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES INTRÍNSECAS

A continuación ensayemos algunos problemas referentes a las ecuaciones intrínsecas de una curva. Lo cual consiste en hallar k y τ en función de s.

Problema 1 Hallar las ecuaciones intrínsecas de la catenaria $f(t)=\left(a\cdot\cosh\frac{t}{a}\ ,\ t\right)$, a es una constante.

Solución:

Hallar k y τ:

1. Como la traza de $f(t)$ es una curva plana, entonces $k\equiv 0$

2. Hallar $s=\int_0^t |f'(\mu)|\,d\mu$, donde $f'(t)=\left(\text{sen h}\frac{t}{a},1\right)$

$$=\int_0^t \cos h\frac{\mu}{a}d\mu \qquad |f'(t)|=\sqrt{\text{sen h}^2\frac{t}{a}+1}$$

$$\boxed{s=a\,\text{sen h}\frac{t}{2}} \quad .....(1) \qquad =\cos\frac{t}{a}$$

3. Hallar τ aplicando la formula $\tau=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

En $f(t)$ tenemos: $x(t)=a\cos h\frac{t}{a}$, $y(t)=t$

$$x'(t)=\text{sen h}\frac{t}{a} \quad , \quad y'(t)=1$$

$$x''(t)=\frac{1}{a}\cos h\frac{t}{a} \quad , \quad y''(t)=0$$

Reemplazar en $\tau=\dfrac{\left|0-\frac{1}{a}\cos\frac{t}{a}\right|}{\left(\text{sen h}^2\frac{t}{a}+1\right)^{3/2}}=\frac{1}{a}\dfrac{1}{\cos h^2\frac{t}{a}}$ ..... (2)

4. Podemos relacionar (2) con (1) del siguiente modo:

De (2) obtenemos : $\tau=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+\text{sen h}^2\frac{t}{a}}$ ..... (3)

5. De (1) obtenemos: $s^2 = a^2 \operatorname{sen} h^2 \frac{t}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} h^2 \frac{t}{a} = \frac{s^2}{a^2}$ ..... (4)

6. (4) en (3) : $\tau = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{s^2}{a^2}} \iff \tau = \frac{a}{a^2+s^2}$

Conclusión: Las ecuaciones intrincas de la catenaria son : $k \equiv 0$,

$$\tau = \frac{a}{a^2+s^2}$$

Problema 2 ***(Dado las ecuaciones intrincas de una curva, hallar la curva).*** Hallar la ecuación vectorial de una curva cuyas ecuaciones intrínsecas son: $k = \sqrt{\frac{1}{2as}}$, $\tau = 0$, $a > 0$, $s > 0$.

Solución:

Aplicar directamente el Corolario:

1. Resolver la ecuación diferencial: $\theta(s) = \int k(s)\, ds + \varphi$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{2as}}\, ds + \varphi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} 2\sqrt{s} + \varphi$$

$$= \sqrt{\frac{2s}{a}} + \varphi$$

Considerando $\theta(0) = 0$, obtenemos: $\theta = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

2. Despejar s en función de θ : $s = \frac{a\theta^2}{2}$ y reemplazar en k :

$$k^2 = \frac{1}{2as} \iff k^2 = \frac{1}{2a\left(\frac{a\theta^2}{2}\right)} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{a^2\theta^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{a\theta}}$$

3. Resolver: $\alpha(s) = \int \frac{1}{k(\theta)} (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)\, d\theta + C$

$$= \int a\theta\, (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)\, d\theta + C$$

$$= a\left(\int \theta\cos\theta\, d\theta , \int \theta \operatorname{sen}\theta \right) + C$$

$$\alpha(s) = a\,(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta , \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) + C$$

Problemas:

1. Dadas las ecuaciones intrínsecas $k = \frac{1}{s}$, $\tau = 0$, $s > 0$; hallar $\alpha(s)$, haciendo $\varphi = \frac{\pi}{4}$ y $c = \vec{0}$.

   R.: $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta} (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta) , \theta = \theta(s)$

2. Dado: $k = 0$, $\tau = 0$; hallar $\alpha(s)$

3. Si $\tau = 0$, $k = \frac{1}{a}$, $k \neq 0$; hallar $\alpha(s)$

4. Hallar la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son $k = \frac{1}{as + b}$, $\tau = 0$, $s > 0$, $a > 0$.

   R.: $r = c\, e^{\gamma\theta}$

5. Encuéntrese la ecuación vectorial de una curva tal que $k(s) = \frac{1}{1+s^2}$

6. Hallar una curva plana tal que $k(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$

7. Hallar las ecuaciones intrínsecas de la curva $f(t) = (ae^t \cos t , ae^t \operatorname{sen} t , be^t)$

   R.: $k = \frac{a\sqrt{2}}{s(2a^2 + b^2)^{1/2}}$, $\tau = \frac{b}{S(2a^2 + b^2)^{1/2}}$

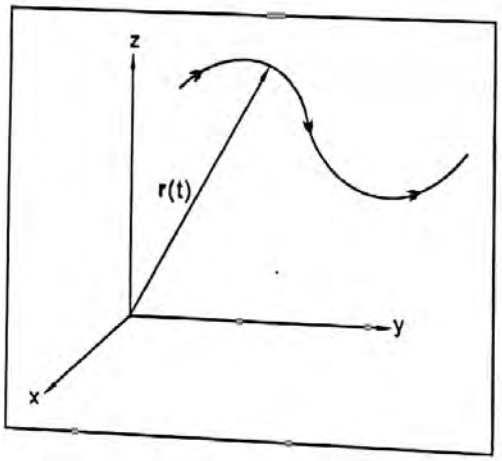
8. Hallar las ecuaciones intrínsecas de la hipocicloide .

$$f(t)=\left((r_0-r_1)\cos\theta - r_1\cos\frac{(r_0-r_1)\theta}{r_1}, (r_0-r_1)\operatorname{sen}\theta - r_1\operatorname{sen}\frac{(r_0-r_1)\theta}{r_1} \right)$$

R.: $\frac{S^2}{A^2}+\frac{1}{k^2B^2}=1$, $\tau=0$, $A<B$, $A=\frac{4r_1(r_0+r_1)}{r_0}$, $B=\frac{4r_1(r_0+r_1)}{r_0+2r_1}$

3.18 APLICACIONES A LA DINÁMICA

3.18.1 Movimiento de un Cuerpo



Supongamos que al moverse un cuerpo (partícula, planeta o una mosca) en el plano o en el espacio describe un camino (trayectoria) que está definido por $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ siendo t el tiempo, entonces $\mathbf{r}(t)$ describe la posición del cuerpo en el tiempo t.

Además:

a) $r'(t)$ es el vector velocidad.

b) $|r'(t)| = v(t)$ es la rapidez del movimiento en el instante t

Como $\ell(t)=\int_a^t |r'(\mu)|\,d\mu \Rightarrow \ell'(t) = |r'(t)| = v(t)$

c) $r''(t)$ es la aceleración del movimiento en el instante t .

d) $T(t)=\frac{r'(t)}{v(t)}$ es el vector tangente unitario $\Rightarrow$ $\boxed{r'(t) = v(t)\,T(t)}$

e) $N(t)$ es el vector normal principal, donde $N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$

f) T y N son ortogonales y unitarios

g) T y N determinan el plano osculador.

h) Si en d) derivamos, obtenemos :

$$r''(t) = v'(t)\ T(t) + v(t)\ T'(t)\ , \quad \text{pero} \quad T' = k\,\ell'\,N$$

$$\text{y} \quad \ell' = v(t)$$

$$\Rightarrow r''(t) = v'(t)\ T(t) + v(t)\,(k\,v(t)\ N(t))$$

$\Rightarrow$

DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL DE LA ACELERACIÓN

$$r''(t) = \boxed{v'(t)}\ T(t) + \boxed{k(t)\,(v(t))^2}\ N(t)\ , \quad k \neq 0$$

componente tangencial de r "(t) y está comprometida con la variación de la rapidez

componente normal de r" y está comprometida con la curvatura k y con la rapidez v.

i) Si el movimiento se produce en línea recta, entonces $k = 0$. Por lo tanto, el vector aceleración es :

$r''(t) = v'(t)\ T(t)$ y el módulo de $r''(t)$ es

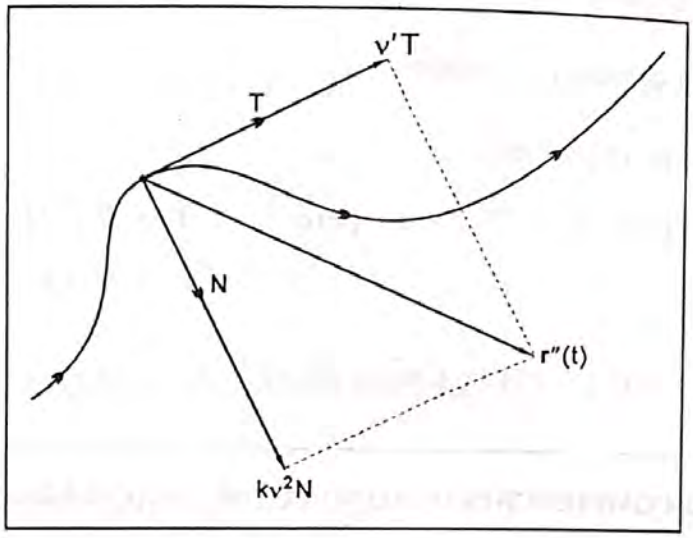
$$|r''(t)| = |v'(t)| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \text{variación de la rapidez del movimiento respecto a t.}$$

j) Si $v(t) = \text{constante}$, $v'(t) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{r''(t) = k(t)\ v^2\ N}$

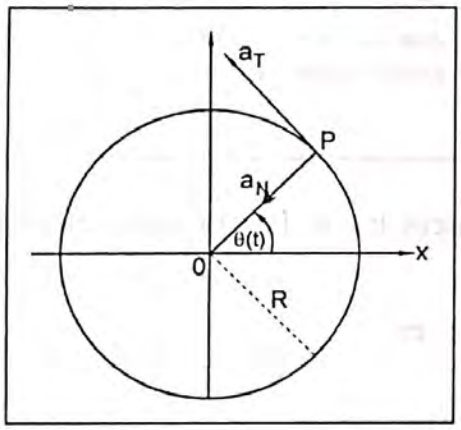
En el caso de la circunferencia $k = \frac{1}{R}$, R = radio de la circunferencia, entonces

$$\underbrace{r''(t)} = \frac{1}{R} v^2 N$$

$$a(t) = \frac{v^2}{R} N \ , \quad \text{donde } v \text{ es la magnitud de la velocidad del cuerpo moviéndose en el círculo } x^2 + y^2 = R^2$$



3.18.2 Movimiento Circular:



Supongamos que un cuerpo se mueve en el plano por la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ y que el ángulo entre el eje OX y el radio vector $\overrightarrow{OP}$ es $\theta(t)$ que es función del tiempo

Al parametrizar la circunferencia obtenemos:

a) $r(t) = (R\cos\theta(t)\ ,\ R\,\text{sen}\,\theta(t))$ que describe el movimiento del cuerpo.

b) $r'(t) = (-R\,\theta'(t)\,\text{sen}\,\theta(t)\ ,\ R\theta'(t)\cos\theta(t))$

$= R\,\theta'(t)\ (-\text{sen}\,\theta(t)\ ,\ \cos\theta(t))$

c) Definimos la velocidad angular por $w(t) = \theta'(t)$ del punto P que expresa la rapidez de variación del ángulo θ respecto a t.

Además $v(t) = |r'(t)| = R\,\theta'(t)$

$= R\,w(t)$, es la rapidez del movimiento.

d) La aceleración es:

$$r''(t) = v'(t)\ T(t) + k(t)(v(t))^2\ N(t) \quad , \quad \text{obtenemos:}$$

$$r''(t) = Rw'(t)\ T(t) + \frac{1}{R}R^2\ w^2(t)\ N(t) \quad , \quad k = \frac{1}{R}$$

$$r''(t) = \underbrace{Rw'(t)\ T(t)}_{a_T} + \underbrace{R\,w^2(t)\ N(t)}_{a_N}$$

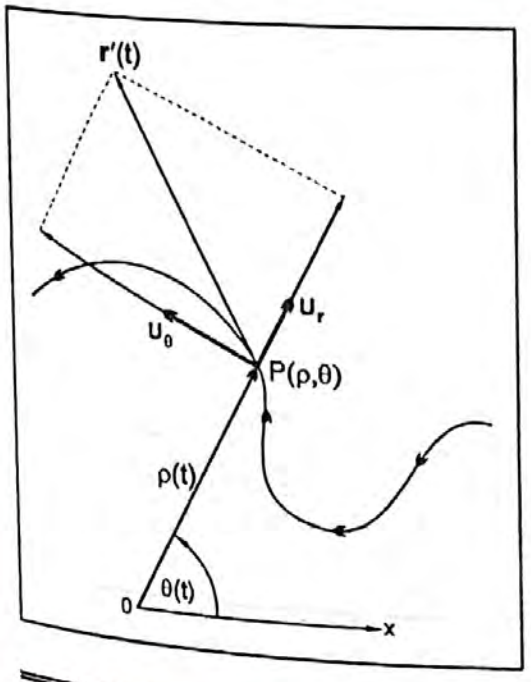
donde: $\begin{cases} a_T = Rw'(t)\ T(t) & \text{es la aceleración tangencial} \\ a_N = Rw^2(t)\ N(t) & \text{es la aceleración normal} \end{cases}$

$w'(t)$ se llama **ACELERACION ANGULAR.**

$Rw'(t)$ es la magnitud de la aceleración tangencial.

$Rw^2(t)$ es la magnitud de la aceleración normal.

3.18.3 Movimiento de un Cuerpo sobre una Curva cuyas Ecuaciones Paramétricas están Expresadas en Coordenadas Polares.



Consideremos el camino:

$$\mathbf{r}: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow (x(t), y(t))$$

donde las coordenadas polares de $x(t)$ y $y(t)$ son:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho(t)\operatorname{sen}\theta(t) \end{cases}$$

Entonces el camino $r(t)$ podemos expresar por:

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t)\,\underbrace{(\cos\theta(t)\,,\,\operatorname{sen}\theta(t))}_{\mathbf{U_r}}\,,\quad t \in I$$

donde: $\mathbf{U_r} = (\cos\theta(t)\,,\,\operatorname{sen}\theta(t))$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$

y $\mathbf{U_\theta} = (-\operatorname{sen}\theta(t)\,,\,\cos\theta(t))$ es su ortogonal.

Los vectores $\{\mathbf{U_r}\,,\,\mathbf{U_\theta}\}$ forman una base ortonormal. Queremos expresar el vector velocidad $r'(t)$ como combinación lineal de los vectores $\{\mathbf{U_r}\,,\,\mathbf{U_\theta}\}$, para ello derivemos con respecto a t, la función:

$$r(t) = \rho(t)\big(\cos\theta(t)\,,\operatorname{sen}\theta(t)\big)$$

$$r'(t) = \rho'(t)\big(\cos\theta(t)\,,\operatorname{sen}\theta(t)\big) + \rho(t)\big(-\theta'(t)\operatorname{sen}\theta(t)\,,\,\theta'(t)\cos\theta(t)\big)$$

$$= \rho'(t)\underbrace{\big(\cos\theta(t)\,,\operatorname{sen}\theta(t)\big)}_{\mathbf{U_r}} + \rho(t)\,\theta'(t)\underbrace{\big(-\operatorname{sen}\theta(t)\,,\cos\theta(t)\big)}_{\mathbf{U_\theta}}$$

$$\boxed{r'(t) = \underbrace{\rho'(t)}\,\mathbf{U_r} + \underbrace{\rho(t)\,\theta'(t)}\,\mathbf{U_\theta}}$$

componente transversal.

componente radial.

esta igualdad expresa "la descomposición ortogonal del vector $r'(t)$".

La rapidez del movimiento es: $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[\rho'(t)]^2 + [\rho(t)\,\theta'(t)]^2}$

El vector aceleración se obtiene derivando el vector velocidad:

$$\mathbf{r}''(t) = \rho''(t)\,U_r + \rho'(t)\,\underbrace{U_r'} + \rho'(t)\,\theta'(t)\,U_\theta + \rho(t)\,\theta''(t)\,U(\theta) + \rho(t)\,\theta'(t)\,\underbrace{U_\theta'}$$

Pero: $\begin{cases} U'r = \theta'(t)\,U_\theta \\ U_\theta' = -\theta'(t)\,U_r \end{cases}$

Al reemplazar y factorizar, obtenemos:

$$\boxed{r''(t) = \underbrace{(\rho''(t) - \rho(t))\,(\theta'(t))^2}_{a_r(t)}\,\mathbf{U_r}(t) + \underbrace{(\rho(t)\,\theta''(t) + 2\rho'(t)\,\theta'(t))}_{a_\theta(t)}\,\mathbf{U_\theta}(t)}$$

componente radial.

componente transversal.

PROBLEMAS PROPUESTOS

TALLER 1

I. DOMINIO DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Hallar el dominio de las siguientes funciones vectoriales:

1. $\vec{f}(t)=\left(2t\ ,\ -3t\ ,\ \frac{1}{t}\right)$

2. $\vec{h}(t)=(\text{Lnt}\ ,\ t)$

3. $\vec{f}(t)=(\text{sen}\,t\ ,\ \cos t\ ,\ \text{tg}\,t)$

4. $\vec{F}(t)=-\vec{G}(t)$, donde $\vec{F}(t)=(\text{Ln}\,t)\,\mathbf{i}+5t\,\mathbf{j}-2t^2\,\mathbf{k}$

   $\vec{G}(t)=\quad\mathbf{i}+3t\,\mathbf{j}+t^2\,\mathbf{k}$

5. $\vec{f}=\left(t\ ,\ \frac{t}{t^2-4}\right)$

6. $\vec{g}(t)=\left(t\ ,\ \sqrt{4-t^2}\ ,\ 5\right)$

7. $\vec{f}(t)=\left(t+1\ ,\ \frac{t-1}{t+3}\ ,\ \frac{5}{t-1}\right)$

8. $\vec{f}(t)=\left(\text{Ln}\,(4-t^2)\ ,\ \sqrt{t^2-3t+2}\ \right)$

9. $\vec{f}(t)=\left(e^{-t}\ ,\ \text{Ln}\,(4-t)^2\ ,\ t\,\text{Ln}\left(\frac{2}{t-3}\right)\right)$

10. $\vec{f}(t)=\left(-t\sqrt{9-t^2}\ \ ,\ \frac{t}{t-3}\ \ ,\ \text{Ln}\,(2+t)\right)$

II. TRAZA DE UN CAMINO

Describa la traza de los siguientes caminos:

11. $\vec{f}(t, at+b)$, $t \in \langle -\infty, +\infty \rangle$

12. $\vec{f}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $\vec{f}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$

13. $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definido por $\vec{f}(t) = (a, b)$

14(a). $\vec{f}(t) = (at+b, ct+d)$, $t \in \mathbb{R}$ a, b, c, d son constantes

14(b). $\vec{f}(t, t^2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$

15(a). $\vec{f}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$

15(b). $\vec{f}(t) = (5 \cos t, 5 \operatorname{sen} t, 4)$, $t \in [0, 2\pi]$

16. $\vec{f}(t) = (2+3 \cos t, -3+3 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

17. $\vec{f}(t) = (5 \cos t+2, 2 \operatorname{sen} t-2)$, $t \in [0, 2\pi]$

18. $\vec{f}(t) = (3+2 \operatorname{tg} t, 1+3 \sec t)$, $t \in \left[0 \ \frac{\pi}{2} \right\rangle$

19. $\vec{f}(t) = (\cos h\, t, \operatorname{sen} h\, t)$, $t \in \mathbb{R}$

20. $\vec{f}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$

21. $\vec{f}(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$

22. $\vec{f}(t) = (t^3, t^2 |t|)$, $t \in \mathbb{R}$

III. LÍMITES

Calcular los siguientes límites :

23. $\lim\limits_{t \to 1} \left[\frac{t^2-1}{t-1} \mathbf{i} + \frac{t^2-3t+2}{t^2+t-2} \mathbf{j} + (t^2+2)\, e^{t-1} \mathbf{k} \right]$

24. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen} t}{t}; \frac{1-\cos t}{t}, e^{t^2-1}\right)$

25. $\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^3-1}{t-1}, \frac{t^4-1}{t-1}\right)$

26. $\lim_{t\to \pi}\left(\frac{1+\cos t}{t-\pi}, \frac{\operatorname{sen} t}{t-\pi}, \frac{\operatorname{tg}(t-\pi)}{t-\pi}\right)$

27. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{4^t-2^t}{14^t-7^t}, \frac{\operatorname{tg} t}{t}, \frac{2\operatorname{sen} t}{t}\right)$

28. $\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 5t}, \frac{\operatorname{tg} 7t}{\operatorname{tg} 3t}, \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{tg} 2t}\right)$

29. $\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t-1}, \frac{t^5-1}{t-1}, \frac{t^7-1}{t-1}\right)$

30. $\lim_{t\to 1^+}\left(1-[t], \frac{1+\cos \pi t}{1-t}, \sqrt{t-1}\right)$

IV. CONTINUIDAD

31. Calcular el límite y analizar la continuidad de las siguientes funciones vectoriales, en los puntos indicados :

(a) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\vec{j} & , \quad t \neq 3 \\ \vec{0} & , \quad t = 3 \end{cases}$

en $t = 0$, $t = 3$

(b) $\vec{f}(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t}\vec{i} + \cos t\,\vec{j} & , \quad t \neq 0 \\ \vec{j} & , \quad t = 0 \end{cases}$

en $t = 0$

(c) $\vec{f}(t)=\begin{cases} t\,\vec{i}+\dfrac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{t}\,\vec{j} & , \ t\neq 0 \\ \sqrt{2}\ \vec{j} & , \ t=0 \end{cases}$

en $t=0$

(d) $\vec{f}(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{t-1}\,\vec{i}+\dfrac{4}{t-2}\,\vec{j}-5\,\vec{k} & , \ t\neq 1 \ , \ t\neq 2 \\ \vec{0} & , \ t=1 \ , \ t=2 \end{cases}$

en $t=1$, $t=2$

32. En las siguientes funciones vectoriales halle los valores de t para los que las funciones dadas sean continuas :

(a) $\vec{f}(t)=(t\ ,\ 3\ ,\ t-1)$

(b) $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{1}{t^2+t}\ ,\ \dfrac{2}{t^2+t}\right)$

(c) $\vec{f}(t)=e^t\left[t\,\vec{i}+\dfrac{1}{t}\,\vec{j}+3\,\vec{k}\right]$

33.

$$\vec{f}(t)=\begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{sen}2t}{t}\ ,\ \dfrac{\operatorname{tg}3t}{t}\quad \dfrac{\operatorname{sen}2t}{\operatorname{sen}3t}\right) & , \ t\neq 0 \\ \left(2\ ,3\ ,\dfrac{2}{3}\right) & , \ t=0 \end{cases}$$

¿Es $\vec{f}(t)$ continua en $t=0$?

34. Indicar los intervalos de continuidad de las siguientes funciones vectoriales :

(a) $\vec{f}(t)=\dfrac{t}{t^2-4}\,\vec{i}+t\,\vec{j}+3t^2\,k$

(b) $\vec{g}(t)=\dfrac{1}{t}\,\vec{i}+(t^2-1)\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}$

(c) $\vec{h}(t)=e^{-t}\,\vec{i}+\operatorname{Ln}(1-t)\,\vec{j}+\cos 2t\,\vec{k}$

(d) $\vec{v}(t)=\left(\text{Ln}(t+1),\frac{1}{t},t\right)$

(e) $\vec{w}(t)=\left(\text{sen}\,t,e^t,\text{tg}\,t\right)$

(f) $\vec{r}(t)=\left(e^t,\frac{t^2-1}{t-1},\text{Ln}(t+1)\right)$

(g) $\vec{f}(t)=\left(\sqrt[3]{t},\frac{-1}{t^2-1},\frac{1}{t^2-4}\right)$

(h) $\vec{g}(t)=\left(t^2+1,\frac{2-t^2}{t^2-2t+1},\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

35.

$$\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(2t-1,2t,\sqrt{-t-1}\right) & t\le -1\\ \left(\frac{2t^2+t-1}{t+1},-2,0\right) & -1<t\le 0\\ \left(\frac{t^2-t}{t},-2\frac{\text{sen}\,t}{t},\frac{t^2-1}{5}\right) & t>0\end{cases}$$

En $t=-1$ y $t=0$ ¿Es continua la función vectorial $\vec{f}(t)$?

V. CAMINOS SIMPLES

36. Demostrar que todo camino $\vec{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(t)=(at+b,ct+d)$ es simple, donde $a\neq 0$, $c\neq 0$.

37. Dado el camino $\vec{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(t)=(t^2-1,t^2+1)$. Pruebe que $\vec{f}$ no es simple.

38. (a) Dado el camino $\vec{\alpha}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $\alpha(t)=(t^3-4t,t^2-4)$, pruebe que $\vec{\alpha}$ no es simple.

(b) En el intervalo $-2\le t<2$, $\vec{\alpha}(t)$ es simple y cerrado. Pruebe.

39. Demuestre que el camino $\vec{f}:[-1,1]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(t)=(t^2-1,t^3+2t^2-t-2)$, es cerrado pero no es simple ¿En qué caso es simple?

40. Demostrar que el camino $\vec{\alpha}(t)=(a\cos t, b\,\text{sen}\,t)\quad t\in[0,2\pi\rangle$ es simple y cerrado.

VI. PROBLEMAS TEÓRICOS

41. Encontrar una curva parametrizada $\alpha(t)$ cuya traza sea el círculo $x^2+y^2=1$ y tal que $\alpha(t)$ recorra el círculo a favor de las agujas del reloj con $\alpha(0)=(0,1)$

42. Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano a origen y $\alpha'(t_0)\neq 0$, demuestre que la posición del vector $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$

43. Una curva parametrizada tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero . ¿Qué puede decirse de α ?

44. Sea $\alpha : I\longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sea $v\in\mathbb{R}^3$ un vector fijado. Supóngase que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t\in I$ y que $\alpha(0)$ también es ortogonal a v. Demostrar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t\in I$.

45. Sea $\alpha : I\longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada, con $\alpha'(t)\neq 0$ para todo $t\in I$. Demostrar que $|\alpha(t)|$ es una constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t\in I$.

46. Demuéstrese que las rectas tangentes a la curva parametrizada regular $\alpha(t)=(3t,3t^2,2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y=0,\ z=x$.

47. Un disco circular de radio 1 en el plano XY rueda sin deslizar a lo largo del eje X. La figura que describe un punto de la circunferencia del disco se llama cicloide.

a) Obténgase una curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya traza es la cicloide y determínese sus puntos singulares.

b) Calcúlese la longitud de arco de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

VII. GRÁFICO, PARAMETRIZACIÓN, IDENTIFICACIÓN DE CURVAS

48. Esbozar el gráfico de la curva descrita por un móvil P (x , y) , cuando el parámetro t varía en el intervalo dado. Determinar la ecuación cartesiana de la curva en cada caso:

(a) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $\vec{\alpha}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 2) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

(c) $\vec{f}(t) = (2 + 4\operatorname{sen} t, 3 - 2\cos t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

(d) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 4 \\ z = 2 \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$

(e) $\begin{cases} x = 2(1 + \cos t) \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$

(f) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \ , \ t \neq -1$

(g) $\begin{cases} x = 3\cos t + 2 \\ y = 2\operatorname{sen} t - 3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

(h) $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} 3t \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x = 2\sec t - 1 \\ y = \operatorname{tg} t + 2 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x = a\operatorname{sen}^4 t \\ y = a\cos^4 t \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x = a\operatorname{sen}^3 t \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$

(m) $\begin{cases} x = a\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

(n) $\begin{cases} x = \operatorname{sen}\dfrac{t}{2} \\ y = \cos t \end{cases}$

(o) $\begin{cases} x = tg\,2t \\ y = tg\,t \end{cases}$

(p) $\begin{cases} x = t + \text{sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

49. Hallar la ecuación cartesiana de las siguientes curvas:

(a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t, 3t+5\right)$

(b) $\vec{r}(t) = (t-1, t^2-2t+2)$

(c) $\vec{r}(t) = (t^2-1, t^2+1, 2)$

50. Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias y luego escribir la ecuación vectorial para cada una:

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

(c) $x^2 + 2y^2 - 5y - 2 = 0$

51. Identificar cada una de las ecuaciones y parametrizar. Esbozar su gráfico.

(a) $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2y - 3 = 0$

(b) $2x^2 + 5y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$

(c) $x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 0$

(d) $x^2 - 8y + 4 = 0$

(e) $y - \frac{1}{x-1} = 0 \quad , \quad x > 0$

52. Parametrizar las siguientes circunferencias de dos maneras: tomando como polo el centro y tomando como polo el origen de coordenadas.

(a) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 2ax = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

(d) $x^2 + y^2 + 2ay = 0$

53. Encontrar una ecuación vectorial de la recta representada por:

(a) $y = 5x - 1$, $z = 2$

(b) $2x - 5y + 4z = 1$, $3x - 2y - 5z = 1$

(c) $2x - 5y + z = 5$, $y - x = 4$

54. Encontrar una ecuación vectorial de las siguientes curvas:

(a) $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$

(b) $y = 4x^2$, $z = x^3$

(c) $4(x+1)^2 + y^2 = 4$, $z = 2$

(d) $y = x^{1/2}$, $z = 3$

(e) $x = e^y$, $z = e^{2x}$

(f) $y = x$, $z = 2(x^2 + y^2)$

(g) Segmento de recta de $A(3, -1, 2)$ a $B(-1, 1, 3)$

(h) Circunferencia de centro en $(3,3)$ y radio 3 en sentido antihorario

(i) Circunferencia de centro en $(3,3)$ y radio 3 en sentido horario.

(j) Parábola $y = \pm 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

(k) $x + y + z = 2$, $z = y - 2x$

(l) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3x - 3y$

(m) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, $z = y$

55. CONCATENACIÓN DE CAMINOS

Uniendo el punto final de un camino con el punto inicial del siguiente camino, determine una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que parametrice la curva indicada.

a) El cuadrado $|x|+|y| = 2$, recorrido en sentido antihorario empezando del punto $(2,0)$.

b) El triángulo de vértices : $A = (0, 0)$, $B = (2, 3)$, $C = (-2, 5)$, con el recorrido $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$.

c) El gráfico de la ecuación $y = \big|\, 2 - |x| \,\big|$ comprendido entre $x = -4$ y $x = 4$ recorrido de izquierda a derecha.

En los ejercicios desde (d) hasta (n), hallar la función que parametriza a los siguientes caminos :

d) La frontera de la región limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$, $y = |x|$, en sentido antihorario para $y \geq 0$.

e) Intersección de las superficies : $2z = xy$, $x^2 + y^2 = 4$

f) Intersección de las superficies : $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$, $z + 4 = 0$

g) Frontera de la región limitada por las gráficas de : $y = x$, $x^2 + y^2 = 4$, y el eje X.

h) Intersección de las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 2x$, $z \geq 0$; $x^2 + y^2 = 2x + 1$

i) Intersección de los planos coordenados en el primer octante con el cono $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$

j) $C : x^2 + y^2 = 3\,(x^2 + y^2)^{1/2} - 3x$

k) Contorno del rectángulo de vértices : A (0,0) , B(1,0) , C(1 , $\frac{\pi}{2}$) , D(0 , $\frac{\pi}{2}$) ; con recorrido $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$.

l) Borde de la región R limitada por las curvas : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $2y = 3\sqrt{3}\,x$, $9x^2 + 4y^2 = 144$, $2y = \sqrt{3}\,x$.

m) Intersección de las superficies : $z = x^2$, $y = x$, desde el punto $A(-2, -2, 4)$ hasta el punto $B(2,2,4)$.

n) Intersección de las superficies : $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$

VIII. VECTOR VELOCIDAD, LA ACELERACIÓN Y LA RAPIDEZ

56. (a) Sea $\alpha(t) = (2\cos^2 t\,,\ \text{sen}\ 2t\,,\ 2\text{sen}\ t)$, $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$. Calcular el vector velocidad en $t = \frac{\pi}{4}$.

(b) Si t tiene un valor fijo, la recta tangente a una curva regular α en $\alpha(t)$ es la recta $f(u) = \alpha(t) + u\,\alpha'(t)$, donde hemos omitido el señalamiento del punto de aplicación de $\alpha'(t)$. Encuéntrese la recta tangente a la hélice:

$\alpha(t) = (2\cos t\,,\ 2\,\text{sen}\ t\,,\ t)$ en los puntos $\alpha\,(0)$ y $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

57. Si $\vec{r}(t)=(t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, determinar todos los puntos de la curva descrita por $\vec{r}(t)$, en los cuales el vector tangente es paralelo al vector (4 , 4 , 3). Existen algunos puntos en los cuales la tangente es perpendicular a (4 , 4, 3) ?

58. En los siguientes casos determinar la velocidad, la aceleración y rapidez de la partícula en el tiempo t .

a) $\vec{r}(t)=(2t, 4t^2+1)$, $t=1$

b) $\vec{r}(t)=\left(\frac{2}{t}, \frac{3}{t+1}\right)$, $t=2$

c) $\vec{r}(t)=(\operatorname{sen} t, 4\cos 2t)$, $t=\frac{\pi}{6}$

d) $\vec{r}(t)=(e^{2t}, e^{-t})$, $t=0$

e) $\vec{r}(t)=(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, $t=0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$

59. Demostrar que si un punto P se mueve sobre una circunferencia de radio b con rapidez v constante, entonces el vector aceleración tiene una magnitud constante $\frac{v^2}{b}$ y está dirigido de P hacia el centro de la circunferencia .

60. Se dispara una bala con una velocidad inicial v_0 con un rifle cuyo cañón tiene su boca a una altura de h_0 metros sobre el suelo. La única fuerza que actúa sobre la bala es debida a la gravedad, que produce la aceleración **g** . Determinar la posición a los **t** segundos.

61. Supongamos que la boca del cañón del rifle del problema 60 está en el origen de coordenadas y que el vector velocidad inicial $\vec{v}_0$ forma un ángulo α con la horizontal.

a) Obtener las ecuaciones paramétricas y una ecuación en coordenadas rectangulares para la trayectoria de la bala.

b) Calcular la distancia horizontal a la que cae al suelo, ¿Cuál es el alcance máximo?

c) Calcular la altura máxima que alcanza la bala.

62. Se dispara una bala con rapidez inicial 1500 pie/s y ángulo de elevación de 30°. Calcule (a) la velocidad al tiempo t, (b) la altura máxima, (c) el alcance y (d) la rapidez con la que la bala llega al suelo.

63. Un jugador de béisbol lanza una pelota a una distancia de 250 pie. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota si fue lanzada a un ángulo de 45° con respecto al suelo?

RESPUESTAS TALLER 1

I. *Dominio de una función vectorial:*

1) $t \neq 0$
2) $t > 0$
3) $t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$
4) $t > 0$
5) $t \neq \pm 2$
6) $-2 \leq t \leq 2$
7) $t \neq -3\ ,\ t \neq 1$
8) $t \in \langle -4\ ,1\ ] \cup [2\ ,\ 4\rangle$
9) $t \in \langle 3\ ,\ +\infty\rangle - \{4\}$
10) $\langle -2\ ,\ 3\rangle$.

II. *Traza de un camino:*

11. Es una recta en el plano de pendiente a y ordenada en el origen b,
12. Es un circulo de centro en $(0,0)$ y radio a .
13. Es un punto,
14a. Es una recta en $\mathbb{R}^2$,
14b. Es una parábola contenida en el plano $z = 2$,
15a. Es una elipse,
15b. Es una circunferencia contenida en el plano $z = 4$
16. Circunferencia de centro en $(-2\ ,\ 3)$ y radio 3 ,
17. Elipse ,
18. Rama de hipérbola ,
19. Hipérbola (rama derecha)
20. Una hélice de paso $2\pi b$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$,
21. $y = |x|$.
22. $y = |x|$.

III. *Límites:*

23. $(2\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ 3)$
24. $(2\ ,\ 0\ ,\ 1)$
25. $(2\ ,\ 4)$
26. $(0\ ,\ -1\ ,\ 1)$
27. $(1\ ,\ 1\ ,\ 2)$
28. $(\frac{2}{5}\ ,\ \frac{7}{3}\ ,\ \frac{1}{2})$
29. $(2\ ,\ 5\ ,\ 7)$
30. $(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$

IV. Continuidad:

31. (a) En $t = 0$ es continua , en $t = 3$ no es continua.

(b) Es continua en $t = 0$

(c) No es continua en $t = 0$

(d) No es continua en $t = 1$ ni en $t = 2$

32. (a) Es continua en todo $t \in \mathbb{R}$

(b) Es continua en $\mathbb{R} - \{0 , -1\}$

(c) Es continua en $\mathbb{R} - \{ 0 \}$

33. Si , es continua en $t = 0$.

34. a) $\langle -\infty , -2\rangle \cup \langle -2 , 2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$

b) $\langle -\infty , 0\rangle \cup \langle 0 , +\infty\rangle$

c) $\langle -\infty , 1\rangle$

d) $\langle -1 , 0\rangle \cup \langle 0 , +\infty\rangle$

e) $\bigcup_{n \in Z} \left\langle \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right\rangle$

f) $\langle -1 , 1\rangle \cup \langle 1 , +\infty\rangle$

g) $\langle -\infty , -2\rangle \cup \langle -2 , -1\rangle \cup \langle -1 , 1\rangle \cup \langle 1 , 2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$

h) $\langle 0 , 1\rangle \cup \langle 1 , +\infty\rangle$

35. Es continua en $t = -1$ y en $t = 0$

V. Caminos simples:

39. Es simple en $[-1 , 1\rangle$.

VI. Problemas teóricos.

41. $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t , \cos t) \quad , \quad t \in [0 , 2\pi]$

42. Basta elegir un radio pequeño ε, tal que $\varepsilon \to 0$ y un camino $\alpha(t) = (\varepsilon \cos t , \varepsilon \operatorname{sen} t)$.

43. Si $\alpha''(t) = \vec{0} \Rightarrow \alpha'(t) = \vec{a}$, $\vec{a}$ = vector constante

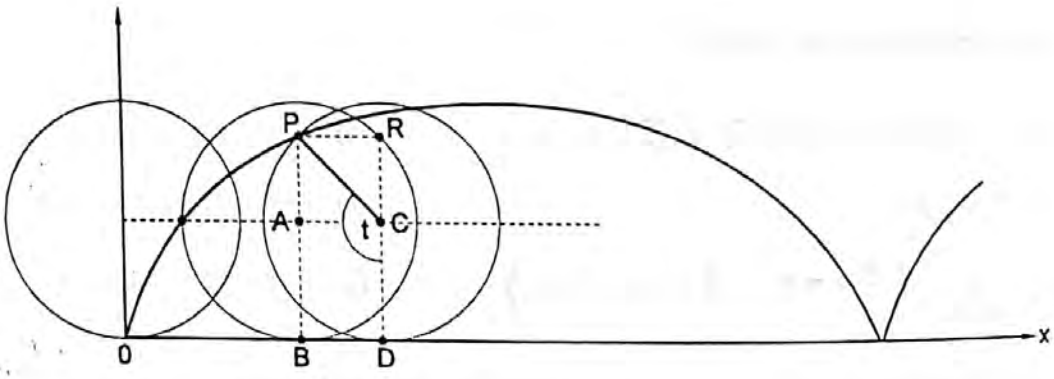
entonces $\alpha(t) = \vec{a}\, t + \vec{b}$ (es una línea recta).

44. $\alpha'(t) \cdot v = 0$, $\forall\, t \in I$ y $\alpha(0) \cdot v = 0$, entonces $\alpha(0) \times \alpha'(t) = V$, además $\alpha(t)$ es combinación lineal de $\alpha'(t)$ y $\alpha(0)$, esto es, existen escalares **s** y **r** tal que $\alpha(t) = r\,\alpha'(t) + s\alpha(0)$. Hacer $\alpha(t) \cdot v = r\,(\alpha'(t) \cdot v) + s\,(\alpha\,(0) \cdot v) = 0$.

45. Si $|\alpha(t)| = a$, $a =$ constante positiva, entonces $|\,\alpha(t)\,|^2 = a^2$, entonces $\alpha(t) \cdot \alpha(t) = a^2$ al derivar obtenemos $\alpha'(t) \cdot \alpha(t) = 0$. Si $\alpha'(t) \cdot \alpha(t) = 0$, probar que $|\alpha\ (t)|$ es una constante.

46. La parametrización de la recta $y = 0$, $z = x$ es $\beta(t) = (t\,,\,0\,,\,t)$, $\beta'(t) = (1\,,\,0\,,\,1)$. Además $\alpha'(t) = (3\,,\,6t\,,\,6t^2)$. Aplicar la fórmula: $\alpha'(t) \cdot \beta'(t) = |\alpha'(t)|\,|\beta'(t)|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores tangentes.

47.



a) $\begin{cases} x = \overline{OB} = \overline{OD} - \overline{BD} \\ y = \overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP} \end{cases}$

Al rotar, la longitud de $\overline{OD}$ es igual al arco $\overset{\frown}{BP}$.

El valor del arco $\overset{\frown}{DP}$ es $\overset{\frown}{DP} = t$, esto es $\overline{OD} = t$

Además: $\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{PR} = 1\ \operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$

$\overline{BA} = \overline{DC} = 1$, $\overline{AP} = \overline{CR} = 1\ \cos(\pi - t) = -\cos t$

Luego: $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$

Puntos singulares: $t = 2\pi n$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\,\alpha'(t)\,\|\,dt$.

VII. Gráfico, Parametrización, Identificación de Curvas:

48. (a) $x^2 + y^2 = 4$; (b) $x^2 + y^2 = 16$, $z = 2$

(c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$; (d) $y = x^2 - 2x + 5$, $z = 2$

(e) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; (f) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

(g) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$; (h) $20x^2 - 4xy + 13y^2 = 256$

(i) $4x^3 - 3x + y = 1$; (j) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$

(k) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$; (ℓ) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

(m) $x^2 + y^2 = a^2$; (n) $2x^2 + y - 1 = 0$

(o) $xy^2 - x + 2y = 0$; (p) $x = \arccos(1-y) \pm \sqrt{2y - y^2}$

49. (a) $y = 6x + 5$; (b) $y = x^2 + 1$; (c) $y = x + 2$, $z = 2$, $x \geq -1$

50. (a) $(1, \frac{5}{2}), \frac{\sqrt{41}}{2}$; $(1 + \frac{\sqrt{41}}{2}\cos t , \frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\operatorname{sen} t)$

(b) $(3 , -4) , 5$; $(3 + 5\cos t , -4 + 5\operatorname{sen} t)$

(c) $(0 , -\frac{5}{2}), \frac{\sqrt{33}}{2}$; $(\frac{\sqrt{33}}{2}\cos t , -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\operatorname{sen} t)$

51. (a) $x = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{53}}{4}\cos t$, $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{53}}{4}\operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(b) una elipse : $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{7}{20}}\cos t$, $y = \frac{1}{5} + \sqrt{\frac{7}{50}}\operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(c) Una elipse: $x = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(d) parábola : $x = t$, $y = \frac{t^2 + 4}{8}$

(e) hipérbola : $x = t$, $y = \frac{1}{t-1}$, $t > 1$

52. (a) $\begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\begin{cases} x = 2a\cos^2\theta \\ y = a\,\text{sen}\,2\theta \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(b) $\vec{\alpha}(t) = (-a + a\cos t\,,\, a\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\beta}(\theta) = (-2a\cos^2\theta\,,\, -a\,\text{sen}\,2\theta) \quad , \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

(c) $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a + a\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\beta}(\theta) = (a\,\text{sen}\,2\theta\,,\, 2a\,\text{sen}^2\theta) \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi$

(d) $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t\,,\, -a + a\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\beta}(\theta) = (-a\,\text{sen}\,2\theta, -2a\,\text{sen}^2\theta) \quad , \quad \pi \le \theta \le 2\pi$

53. (a) $\vec{\alpha}(t) = (t\,,\, 5t-1\,,\, 2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$

(c) $\vec{\alpha}(t) = (t\,,\, 4+t\,,\, 3t+24) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$

54. **a)** $(3\cos t\,,\, 3\,\text{sen}\,t\,,\, 3) \quad 0 \le t \le 2\pi$ **b)** $(t\,,\, 4t^2\,,\, t^3) \quad , \quad t \in \mathbb{R};$

c) $(-1 + \cos t\,,\, 2\,\text{sen}\,t\,,\, 2) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$ **d)** $(t\,,\, \sqrt{t}\,,\, 3) \quad , \quad t \ge 0$

e) $(t\,,\, \text{Ln}\,t\,,\, e^{2t}) \quad , \quad t > 0$ **f)** $(t\,,\, t\,,\, 4t^2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$

g) $(3 - 4t\,,\, -1 + 2t\,,\, 2 + t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$

h) $(3 + 3\cos t\,,\, 3 + 3\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

i) $(3 + 3\cos t\,,\, 3 - 3\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ **j)** $(t^2\,,\, t\,,\, 0) \quad , \quad -1 \le t \le 1$

k) $(2t - 2\,,\, t\,,\, -3t + 4) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

l) $(2\cos t\,,\, 2\,\text{sen}\,t\,,\, 6\cos t - 6\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

m) $(2 + 2\cos t\,,\, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,,\, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$

55.

(a) $\vec{f}:[0,4]\longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\vec{f}(t)=\begin{cases}(2-2t\ ,\ 2t) & ,\ 0\le t<1\\ (-2t+2,4-2t) & ,\ 1\le t<2\\ (2t-6,-2t+4) & ,\ 2\le t<3\\ (2t-6\ ,\ 2t-8) & ,\ 3\le t\le 4\end{cases}$

(b) $\vec{f}:[0,3]\longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\vec{f}(t)=\begin{cases}(2t\ ,\ 3t) & ,\ 0\le t<1\\ (-4t+6\ ,2t+1) & ,\ 1\le t<2\\ (2t-6,-5t+15) & ,\ 2\le t\le 3\end{cases}$

(c) $\vec{f}:[-4,4]\longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\vec{f}(t)=\begin{cases}(t,-t-2) & ,\ -4\le t<-2\\ (t,-t-2) & ,\ -4\le t<0\\ (t,2-t) & ,\ 0\le t<2\\ (t,t-2) & ,\ 2\le t\le 4\end{cases}$

(d) Unión de las funciones :

$\vec{f}_1(t)=(\frac{\sqrt{2}}{2}t,\frac{\sqrt{2}}{2}t)\ ,\ 0\le t<1$

$\vec{f}_2(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)\ ,\ \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3}{4}\pi$

$\vec{f}_3(t)=(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t)\quad ,\quad 0\le t\le 1\ .$

(e) $\vec{f}:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $\vec{f}(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t,\operatorname{sen}2t)$

(f) $\vec{f}:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{f}(t)=(2\sqrt{2}\cos t,2\sqrt{2}\operatorname{sen} t,-4),0\le t\le 2\pi$

(g) Unión de los caminos : $\vec{f}_1(t)=(2t,0)\quad ,\quad 0\le t\le 1$

$\vec{f}_2(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t),0\le t\le\frac{\pi}{4}$

$\vec{f}_3(t)=(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t,\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\ ,\ 0\le t\le 1$

(h) $\vec{f}(t) = (1+\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\, t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

(i) Unión de los caminos : $\vec{f}_1(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 0) \quad , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$f_2(t) = (0, 1-t, t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$

$f_3(t) = (t, 0, 1-t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$

(j) $\vec{f}(t) = (3(1-\cos t)\cos t, 3(1-\cos t)\,\text{sen}\, t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

(k) $\vec{f} : [0, 3+\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por :

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} (t, 0) & , \ 0 \le t < 1 \\ (1, t-1) & , \ 1 \le t < \frac{\pi}{2}+1 \\ (-t+2+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & , \ \frac{\pi}{2}+1 \le t < \frac{\pi}{2}+2 \\ (0, \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}t) & , \ \frac{\pi}{2}+2 \le t \le 3+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(ℓ) aplicar : $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\, t$ a las elipses.

(m) $\vec{f}(t) = (t, t, t^2) \quad , \quad -2 \le t \le 2$

(n) $\vec{f}(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 1-\cos t-\text{sen}\, t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$.

VIII. Vector Velocidad, la aceleración y la rapidez:

56. (a) $(-2, 0, \sqrt{2})$ en $P = (1, 1, \sqrt{2})$

(b) $\alpha(0) : t \longrightarrow (2, 2t, t)$.

57. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$, no existe .

58. (a) $(2, 8t)$, $2\sqrt{1+16t^2}$, $(2, 8)$, $(0, 8)$

(b) $(-\frac{2}{t}, -\frac{3}{(t+1)^2})$, $(\frac{4}{t^3}, \frac{6}{(t+1)^3})$, $\sqrt{\frac{4}{t^4} + \frac{9}{(t+1)^4}}$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$.

(c) $(\cos t, -8 \operatorname{sen} 2t)$, $(-\operatorname{sen} t, -16 \cos 2t)$, $\sqrt{\cos^2 t + 64 \operatorname{sen}^2 2t}$,
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 4\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -8\right)$.

(d) $(2e^{2t}, e^{-t})$, $(4e^{2t}, e^{-t})$, $\sqrt{4e^{4t} + e^{-2t}}$, $(2,-1)$, $(4,1)$.

(e) $(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t, e^t)$
$(-2e^t \operatorname{sen} t, 2e^t \cos t, e^t)$, $\sqrt{3}\, e^t$.

59. Si la posición inicial de P es $(b,0)$ y θ es el ángulo de inclinación del radio vector $\overrightarrow{OP}$

Si P se mueve con rapidez constante sobre la circunferencia, implica que la rapidez angular es una constante $w \left(\frac{d\theta}{dt} = w\right)$.

Las coordenadas de P son $(b \cos wt, b \operatorname{sen} wt)$, $v = wb$.

Se debe probar que $\vec{a}(t) = -w^2 \vec{r}(t)$, $\vec{r}(t)$ es el radio vector $\overrightarrow{OP}$ y probar que $|\vec{a}(t)| = \frac{v^2}{b^2}$.

60. En el sistema de coordenadas XY, la boca del cañón está en $(0, h_0)$. Si $P(x,y)$ es la posición de la bala en t segundos y $\vec{r}(t)$ es el vector posición de P, donde $\vec{g} = (0, -g)$, $\|\vec{g}\| = 9.8\ m/s^2$. Como $r''(t) = \vec{g}$ ($\vec{g}$ = vector aceleración), $v_0 = \vec{r}(0) = c$. Se prueba que $\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} t^2 g + h_o\right) \vec{j} + t \vec{v}_o$

61. Elegir $\vec{\mu} = (\cos \alpha , \operatorname{sen} \alpha)$, $v_o = |\vec{v}_o|$, $\vec{v}_o = v_o \vec{\mu}$,
$\vec{r}(t) = \left(t(v_o \cos \alpha) , -\frac{1}{2} gt^2 + t\, v_o \operatorname{sen} \alpha\right)$

b) $t = \frac{2 v_o \operatorname{sen} \alpha}{g}$. La distancia es $\frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$, el alcance máximo para $\alpha = 45°$, $\frac{v_o^2}{g}$ c) $h = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$.

62. (a) $(750\sqrt{3} , -gt + 750)$, b) $(1500)^2 \sqrt{3}/(2g)$ pie , d) 1500 pie/s

63. $40\sqrt{5}$ pie/s .

PROBLEMAS PROPUESTOS

TALLER 2

I. DESCRIPCIÓN DE UNA CURVA

(1) Una circunferencia de radio "a" se mueve teniendo su centro sobre el eje X a la vez que una recta pasa por el centro de la circunferencia y por un punto fijo del eje Y. Tomando como parámetro el ángulo formado por la recta y el eje Y, encuéntrece las ecuaciones paramétricas de las curvas descritas por los puntos de intersección de la recta y la circunferencia móvil.

(2) Una partícula parte del punto $(2,0)$ en el instante $t=1$ y se mueve sobre la curva $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}-x=0$ en sentido antihorario, volviendo a su posición inicial si su rapidez es constante e igual a 4, definir una función vectorial que describe el movimiento.

Solución:

$r=1+\cos\theta$, $s=\int_0^{\theta}|2\cos\frac{\alpha}{2}|\,d\alpha$; si $\theta\in[0,\pi]$ $s=4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$; si $\theta\in[\pi,2\pi]$, $s=8-4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. La curva es $\vec{g}(\theta)=(1+\cos\theta)(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta);\theta\in[0,2\pi]$. En función del tiempo es $\vec{f}(t)=(1+\cosh(t))(\cosh(t),\operatorname{senh}(t))$, donde

$$h(t)=\begin{cases}2\operatorname{arcsen}(t-1) & , \quad 1\le t\le 2\\ 2\operatorname{arcsen}(3-t) & , \quad 2<t\le 3\end{cases}$$

(3) Una proyectil se lanza en un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{6}$ radianes y con velocidad inicial de 480 pies/seg. Determinar una función $\vec{F}(t)$ que describa la posición del proyectil, en función del tiempo. Hallar, asimismo, el tiempo de recorrido.

Sugerencia: Usar la segunda ley de Newton y usar el vector aceleración de gravedad: $\vec{g}=(0,-g)$

Solución:

Si $t=0$, $\vec{v}_0 = 480\left(\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, $\vec{g}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (0,-g)$ entonces

$\vec{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$, $c_1 = 240\sqrt{3}$, $c_2 = 240$, $\vec{v}(t) = (240\sqrt{3}, -gt + 240)$,

$\vec{f}(t) = (240\sqrt{3}\,t, -gt + 240)$, $\vec{f}(t) = (240\sqrt{3}\,t, -gt^2 + 240t)$, $t \in \left[0, \frac{240}{g}\right]$.

④ Empezando en $t=0$, una abeja vuela de tal manera que su vector posición era $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$ hasta $t = 4\pi$, en ese momento continuó su vuelo en la dirección tangente a la rapidez que llevara . ¿ En qué lugar chocará la abeja con el plano $x + y = 30$?

Solución: $r'(4\pi) = \vec{i} + 4\pi\vec{j} + \vec{k}$, $L: \begin{cases} x = 4\pi + s \\ y = 4\pi s \\ z = 4\pi + s \end{cases}$

Chocará en: $x = \frac{16\pi^2 + 30}{4\pi + 1}$, $y = \frac{120\pi - 16\pi^2}{1 + 4\pi}$, $z = \frac{16\pi^2 + 30}{4\pi + 1}$

⑤ Dado $\vec{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2|\operatorname{sen} t|)$

a) Bosqueje el gráfico de la curva descrita por $\vec{f}$

b) Si $g(t) = t^2$; $\vec{h}(t) = (1, 2g(t), 0)$

Calcular $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{g(t)}(\vec{f}(g(t)) - \vec{h}(t))$

Solución: a) Graficar en $[0, \pi]$, donde $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2|y|$

b) $(0, -1, 2)$

⑥ a) Si $\vec{f}(t) = \frac{d}{1-\cos t}(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $d > 0$, describe una parábola, hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{f}'(t_1)$ y $\vec{f}'(t_2)$, donde $\vec{f}(t_1)$ es el vértice y $\vec{f}(t_2)$ el extremo del lado recto.

b) Sea la curva $C: \vec{x} = \vec{r}(t)$ tal que $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$, para todo t, y $\vec{r}'(t)$ es paralelo a $\vec{r}(t)$. Demostrar que el vector $\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$ es constante y que la curva descrita por $\vec{r}$ está contenida en una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

a) hacer $x = \frac{d\cos t}{1-\cos t}$, $y = \frac{d\,\text{sen}\,t}{1-\cos t}$, se obtiene: $y^2 = 2d\left(x + \frac{d}{2}\right)$

$f(t_1) = (-\frac{d}{2}, 0)$, $f(t_2) = (0, d)$, $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t_1) = f'(\pi) = (0, \frac{d}{2})$,

$\vec{f}'(t_2) = \vec{f}'(\frac{\pi}{2}) = (-d, -d)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) Se debe probar que: $D_t\left[\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}\right] = 0$, sabiendo que $\vec{r}'(t)$ es paralelo a $\vec{r}(t)$.

Se debe probar que $\vec{x} = \vec{r}(t)$ es la curva C.

(7) Dos partículas se mueven de acuerdo a los vectores posición. $\vec{f}(t) = (1+t, 2+3t)$ y $\vec{g}(t) = (1-t, 3-t^3)$ respectivamente, donde t es parámetro tiempo, partiendo de $t = 0$

i) ¿Colisionan las partículas una a otra? . En caso positivo ¿en qué punto?

ii) Hallar las ecuaciones de las rectas normales a ambas trayectorias en el punto donde estos sean paralelos.

Solución:

i) No colisionan, porque al resolver $\vec{f}(t_1) = \vec{g}(t_2)$ no tiene solución, tampoco $\vec{f}(t) = \vec{g}(t)$ tiene solución.

ii) $L: \vec{P} = (0, 2) + r(-3, 1)$, $r \in \mathbb{R}$.

(8) a) Graficar la curva descrita por la siguiente función:

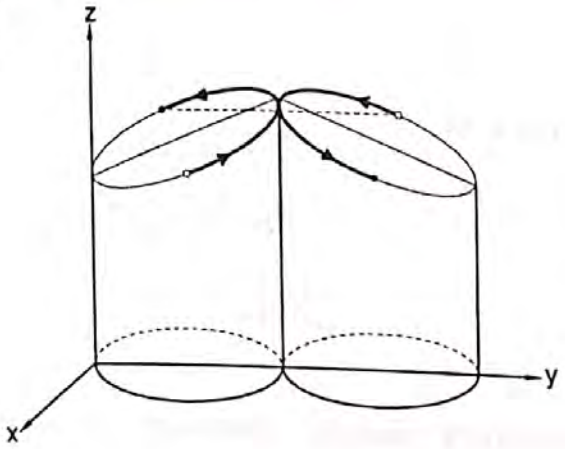
$$\vec{f}(t) = \begin{cases} (\cos t, 1+\text{sen}\,t, 2+\text{sen}\,t) & , \quad 0 < t \le \pi \\ (\cos t, 3+3\,\text{sen}\,t, 2-\text{sen}\,t) & , \quad \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

indicando el sentido del recorrido

b) ¿Es continua sobre el intervalo $[0, 2\pi]$?

Solución:

a)



b) $\vec{f}$ no es continua en $[0\ ,\ 2\pi]$

⑨ Una partícula se mueve en el espacio IR^3 partiendo en el instante $t = 0$ del punto $(1\ ,0\ ,2e^{-2})$. En cada instante $t \geq 0$ la velocidad de la partícula es $\vec{v}(t) = (-2\ ,2t\ ,4e^{2(t-1)})$.

a) ¿En que instante t_0 el vector velocidad es paralelo al vector posición de la partícula? ¿La partícula cruza al plano $x + y = 0$ en algún instante?

b) Parametrice la curva $\mathcal{C}$ descrita por la función $\vec{x} = \vec{v}'(t)$ $t \geq t_0$ mediante el parámetro longitud de arco s .

Solución:

$$\vec{f}(t) = \int \vec{v}\,(t)\,dt\ ,\ \vec{f}\,(t) = (-2t+1\ ,t^2\ ,2e^{2(t-1)})$$

a) Si $\vec{f}\,(t_1) = k\vec{v}\,(t_1)$, $k = \frac{1}{2}$, $t_1 = 1$. Cuando $t = 1$ cruza al plano.

b) $x = 0$, $y = 2$, $z = s - 8e^{2(t_0-1)}$.

⑩ Graficar el rango de la siguiente función:

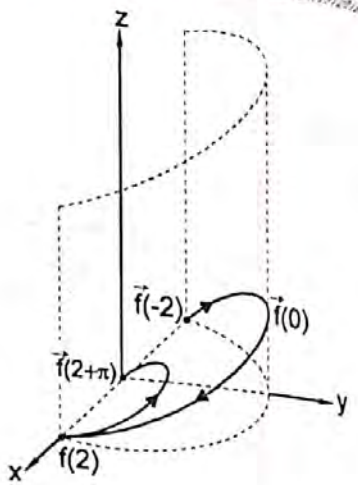
$$f(t) = \begin{cases} (t\ ,4-t^2\ ,2-\frac{t^2}{2})\ ,-2 \leq t \leq 2 \\ (1+\cos(t-2))\,(\cos(t-2)\ ,\operatorname{sen}(t-2)\ ,0)\ ,2 < t \leq \pi+2 \end{cases}$$

indique el sentido en que se dibuja la curva.

Solución:

La imagen de f en $t \in [-2\ ,2]$ es la intersección de las superficies $\begin{cases} y = 4-x^2 \\ z = \frac{y}{2} \end{cases}$

En $t \in]2, \pi+2]$, donde $0 < t-2 < \pi$ el gráfico de la imagen de f es una curva la mitad de una cardioide en el plano XY



(11) Un móvil se desplaza en una trayectoria circular contenida en el plano $\mathcal{P}: 2x+3y+z=4$, y el eje de rotación pasa por el punto $A=(5, 2, -3)$, si el radio de la trayectoria es de 10 m. y si en el instante $t=0$ el móvil se encuentra en el punto $(x_B, y_B, -5)$ y si $x_B > 0$. Se pide :

a) Hallar la trayectoria del móvil como una curva descrita por $\vec{f}$, si $W = 0.5$ rad/seg.
b) Calcular la velocidad y aceleración en el instante que la velocidad es paralela al plano XY.

(12) Sea la curva C : $\vec{f}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1-\operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$, $t > 0$. Demostrar que C es una circunferencia y encontrar su centro y radio.

Solución: Basta probar que: $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

(13) Dado la curva C : $\vec{f}(t) = (\cos t, 1+\operatorname{sen} t, 2+\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Graficar $\vec{f}([0, 2\pi])$.

Solución:

Es la intersección del plano $y - z + 1 = 0$ con el cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$

(14) Dado la función $\vec{f}(t) = \left(\frac{2-2\cos\sqrt{t}}{t}, \frac{2\cos\sqrt{t}-2}{t}+1, t^3\right)$, $t \in \langle 0, +\infty\rangle$, graficar $\vec{f}(\langle 0, +\infty\rangle)$.

Solución:

Es un curva contenida en el plano $x + y - 1 = 0$ con $x \in [0, 1\rangle$ y $t \in \langle 0, 1]$.

II CONTINUIDAD

(15) Graficar la curva descrita por:

$$\vec{F}(t)=\begin{cases}\left(0.8\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}-t)\,,\,1-\text{sen}\,t\,,\,0.6\,\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2}-t)\right)\;,\;t>0\\ \left(\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}\,,-1+\text{sen}\,t\,,-2+\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}\right)\;,\;-\pi\le t\le 0\end{cases}$$

(16) Estudiar la continuidad para las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

$$\vec{F}(t)=\begin{cases}\left(\frac{2\text{arcsen}\,t}{3t}\;,\;t\,\text{sen}\,\frac{\pi}{t},\frac{\cos(2\pi-2t)}{t}\right)\;,\;t\in\langle 0\,,1\rangle\\ \left(\frac{2}{3}\,,0\,,2\right)\;,\;t\in[1\,,2]\end{cases}$$

(17) a) Calcular, el $\lim\limits_{t\to 2}\vec{f}(t)$, si existe, donde:

$$\vec{f}(t)=\left(\frac{t^t-4}{t\,\text{Ln}\,(t-1)},\frac{\text{sen}\,\sqrt[3]{t-2}}{\text{sen}\,\pi t},\frac{\sqrt{2t}-2+\sqrt{2-t}}{\left(t^2+4\,\text{sig}\,(2t-7)\right)^{1/2}}\right)$$

b) Sea $\vec{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, una función vectorial, tal que existen : $\vec{f}'$, $\vec{f}''$, $\vec{f}'''$.

Demostrar, que: $\frac{d}{dt}\left[\vec{f}\,.\,\vec{f}'\times\vec{f}''\right]=\left[\vec{f}\times\vec{f}'\cdot\vec{f}'''\right]$

(18) Un punto se mueve sobre el arco del trébol $r=\cos 3\theta,\;0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$, hacia la derecha, partiendo del punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{18}\right)$, en el instante $t=100$, y llegando a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{12}\right)$, cuando $t=144$. Determinar las ecuaciones paramétricas que describen dicho movimiento si se sabe que la velocidad de cambio del ángulo polar es inversamente proporcional a $t^{3/2}$.

(19) Dado $\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(\;[\![t]\!]\;,\frac{\cos^2 t-1}{t^2},e^{-t^{-2}}\right),\;t\in\langle 0\,,1\rangle\\ (1\,,0\,,1)\;,\;(t=0)\end{cases}$

a) Hallar los puntos de discontinuidad de $\vec{f}$

b) Es posible redefinir $\vec{f}$ de modo que sea continua sobre $[0,1\rangle$?

Solución:

a) f_1 no es continua en $t=0$; b) $\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(0\ ,\ -\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\ ,\ e^{-\frac{1}{t^2}}\right), & t\in\langle 0,1\rangle \\ (0,-1,0)\ , & t=0\end{cases}$

(20) Sea $\vec{f}(t)=\left(t^3\ ,\left[\!\left[\operatorname{sen}^2\frac{\pi t}{2}\right]\!\right]\ ,\ t-([\![t]\!]^2)\right)\ ,\ t\in[-1\ ,\ 1]$

a) Determine los puntos de discontinuidad de $\vec{f}$

b) ¿Es posible redefinir $\vec{f}$ en cada punto de discontinuidad de modo que $\vec{f}$ sea continua en esos puntos? En caso de que sea posible, indicar el valor que deberá tomar $\vec{f}$ en estos puntos.

Solución:

a) Analizar cada componente de $\vec{f}(t)$. f_1 es continua en $[-1\ ,\ 1]$, f_2 es continua en $]-1\ ,\ 1[$ pero no en $[-1\ ,\ 1]$, f_3 no es continua en $t=0\ ,\ t=1$

b) No puede redefinirse $\vec{f}$ en $t=0$.

(21) Dadas las funciones $\vec{f}(t)=\left(\operatorname{sen} t\ ,\ \operatorname{Ln}(t+1)\ ,\ \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$, con $\vec{f}(0)=(0,1,0)$

$\vec{g}(t)=\left(t\ ,\ \frac{t}{\operatorname{sen} t}\ ,\ \operatorname{Ln}(t+1)\right)$, con $\vec{g}(0)=(0,1,0)$

a) ¿Son las funciones $\vec{f}$, $\vec{g}$, $\vec{f}\times\vec{g}$ continuas en $t=0$?

b) Hallar el dominio de la función $\vec{f}'\times\vec{g}'$.

Solución:

a) Como $\lim_{t\to 0}\vec{f}=(0,0,1)\neq\vec{f}(0)$, $\vec{f}$ no es continua en $t=0$.

Porque $\lim_{t\to 0}\vec{g}=\vec{g}(0)=(0,1,0)$, afirmamos que $\vec{g}$ es continua en $t=0$.

Porque $\lim_{t\to 0}(\vec{f}\times\vec{g})(t)=(\vec{f}\times\vec{g})(0)=(-1,0,0)$, $\vec{f}\times\vec{g}$ es continua en $t=0$.

b) $D_{\vec{f}} = t \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$, $D_{\vec{f}'} = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

$D_{\vec{g}} = \langle -1, +\infty\rangle - \{0, k\pi / k \in Z^+\}$

El dominio de $\vec{f}' \times \vec{g}'$ es $\langle -1, +\infty\rangle - \{ k\pi / k = 0, 1, 2, \ldots \}$

(22) Estudiar la continuidad de la función $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{1-t^2}\ , \frac{1-\cos^2(t-\frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2}\ , \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}} \right)$

Solución:

El dominio es $\langle 0, \frac{1}{4}\rangle \cup \langle \frac{1}{4}, 1\rangle$. Existe límite a la derecha de cero, existe limite en $\frac{1}{4}$

III. VECTOR VELOCIDAD, VECTOR ACELERACIÓN

(23) Una partícula se desplaza sobre la curva C_1 descrita por $f(x) = \left(\frac{2}{3}(2x+4)^{3/2}\ , 4-2x\ , x^2+4x \right)$ con una rapidez constante de 4 mts/seg. Si la partícula parte del reposo del punto $(0, 8, -4)$.

i) Hallar el vector velocidad y las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante en que cruza a la curva C_2, descrita por $\vec{g}(x) = \left(\frac{4}{3} + x^2\ , 2x\ , 20-10x \right)$.

ii) Desde que la partícula parte del reposo ¿Cuánto demora hasta cruzar C_2?

Solución:

Dominio: $x \geq -2$. Como $\frac{ds}{dt} = 4 \Rightarrow s = 4t + c$. Si la longitud de arco se mide desde $(0, 8, -4)$ en que $x = -2$, entonces $c = 0$ y $s = 4t$

$$s = \int_{-2}^{x} |\vec{f}'(\mu)| d\mu = (x+3)^2 - 1$$

Al igualar $\vec{f}(x_1) = \vec{g}(x_2)$ obtenemos $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. El punto de intersección es $\left(\frac{16}{3}, 4, 0 \right)$

i) $\vec{v} = \frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, $\vec{v}(0) = \frac{2}{3}(4, -2, 4)$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, $\vec{a}(0) = \frac{4}{27}(-1, 2, 2)$

Como $\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$, $a_T = \ell\,''(t)$, $\ell''(0) = 0$, $a_N = T'(t)\,\ell'(t)$,

$a_N = |\vec{a}\,(0)| = \frac{4}{3}$

ii) $s = 8$, $t = 2$ seg

(24) Un punto P se mueve sobre la curva descrita por la función $\vec{f}(\mu) = (2\mu , \mu^2 , \mu^3)$. Si en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $(2,1,1)$ y se mueve de tal manera que la tercera coordenada de su posición se incrementa a razón de 2 unidades por segundo. Hallar el vector velocidad de P cuando se encuentra en el punto $(4 , y , z)$.
¿Qué tiempo tarda la partícula en llegar a éste punto?

Solución: Hacer $x = 2\mu$, $y = \mu^2$, $z = \mu^3$

$z \longrightarrow \mu \longrightarrow t$, entonces $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}$. Dato $\frac{dz}{dt} = 2$, entonces $3\mu^2\, d\mu = 2dt$,

cuando $t = 0$, $(2 , 1 , 1)$, $\mu = 1$. En $(4 , y , z)$, $\mu = 2$. $\int_1^2 3\mu^2 dt = \int_0^{t_1} 2dt$, $t_1 = 13$

(25) Sea $\vec{v}_A$ la velocidad de una partícula A. Calcular $|\vec{V}_A|$ en el instante t en que la velocidad de la partícula A, que describe $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, tiene la misma dirección que el vector posición de ordenada máxima de otra partícula que se mueve sin fricción con una fuerza gravitacional constante ($g = 9.8$ m/seg^2) y cuya velocidad inicial es $(9.8 , 19.6)$ m/seg y posición inicial $\vec{c}$.

Solución:

Sea B la otra partícula, que se mueve por acción de la gravedad, su aceleración es $\vec{g} = (0 , -g) = (0 , 9.8)$.

$\vec{V}_B(t) = \int (0 , -9.8)\, dt$, $\vec{V}_B(t) = (9.8 , -9.8t + 19.6)$

Si $\vec{g}(t)$ es el vector posición de la partícula B.

$\vec{g}(t) = \int \vec{V}_B(t)\, dt$, $\vec{g}(t) = \left(9.8t , -4.9t^2 + 19.6t\right)$

$\vec{V}_A(t) = \vec{f}\,'(t)$, donde $\vec{f}(t) = \left(\frac{1-t^2}{9+t^2} , \frac{2t}{9+t^2}\right)$

$$\vec{V}_A\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+2}{6+4\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{V}_A\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}}$$

(26) Una partícula se mueve en el plano a lo largo de la espiral $r = e^{\theta}$ con una rapidez constante de 5 pies por segundo.

a) Hallar el vector velocidad y las componentes de la aceleración de la partícula cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) ¿Cuánto tarda una partícula al desplazarse desde el punto correspondiente a $\theta = 0$, hasta el punto correspondiente a $\theta = \pi$.

c) Si $\theta = 0$, cuando $t = 0$, hallar la ecuación vectorial que describe la trayectoria de la partícula en función del tiempo

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la curva son $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ donde $r = e^{\theta}$, el parámetro es θ.

Como $\theta = \theta(t)$ y $\vec{f} = \vec{f}(\theta)$, entonces $\vec{V}(\theta) = D_t\,\vec{f}(\theta) = D_\theta\,\vec{f}(\theta)\,D_t\,\theta$; donde t es el tiempo. $s = \int_0^{\theta} |f'(\mu)|\,d\mu = \sqrt{2}\,(e^{\theta}-1)$ como $\frac{ds}{dt} = 5$, entonces $s = 5t$; además $e^{\theta} = \frac{5}{\sqrt{2}}t+1$, $\theta = \theta(t)$. $\frac{d\theta}{dt} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-\theta}$, entonces $\vec{V}(\theta) = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta\,,\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\right)$

a) $\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5(0,1)$. El vector aceleración en $\theta = \frac{\pi}{4}$: es $\frac{25\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}(-1,0)$ y sus componentes son $a_T = 0$, $a_N = \frac{25\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

b) $t = \frac{\sqrt{2}}{5}(e^{\theta}-1)$.

c) Despejar θ de $e^{\theta} = \frac{5}{\sqrt{2}}t+1$ y se obtiene:

$$\begin{cases} x = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}t+1\right)\cos\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}t+1\right)\right) \\ y = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}+1\right)\mathrm{sen}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}t+1\right)\right) \end{cases}$$

$t \geq 0$.

(27) Una partícula se mueve describiendo una curva con ecuación polar; $r(t) = e^{-t}$, $\theta(t) = \frac{\pi}{2}t$, t es el tiempo.

Hallar el vector velocidad y las exponentes tangenciales y normal de la aceleración en un punto en donde el vector velocidad forma un ángulo con coseno igual a $-2(\pi^2+4)^{-\frac{1}{2}}$

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la curva son : $x = e^{-t}\cos\frac{\pi}{2}t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$,

b) el vector velocidad es:

$\vec{V}(t) = e^{-t}\left(-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t - \cos\frac{\pi}{2}t\,,\ \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t\right)$, $v(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(4+\pi^2)^{1/2}$

b) $a_T = -\frac{1}{2}e^{-t}(4+\pi^2)^{1/2}$, $a_N = \frac{\pi}{4}e^{-t}(4+\pi^2)^{1/2}$.

IV RECTA TANGENTE

(28) Sean las curvas C_1 : $\vec{f}(t) = (\operatorname{sen}t\,,\ 2\cos t\,,\ 2\operatorname{sen}t - 1)$, $t \in [0\,,\ 2\pi]$

C_2 : $\vec{g}(t) = (\cos t\,,\ 2\operatorname{sen}t\,,\ \cos^2 t)$, $t \in [0\,,\ 2\pi]$

Hallar la ecuación de la recta tangente a C_1 en el punto de intersección con C_2.

Solución:

$\vec{f}(\frac{\pi}{2}) = \vec{g}(\pi) = (1\,,\ 0\,,\ 1)$, $\mathfrak{L} : P = (1\,,\ 0\,,\ 1) + r\,(0\,,\ -2\,,\ 0)$, $r \in \mathbb{R}$.

(29) Hallar la recta tangente a la curva $\vec{f}(t) = \left(\operatorname{Ln}(t^2+1)\,,\ \sqrt{t^2+1}\,,\ \frac{2t}{t^2+1}\right)$ en $t = 1$

Solución: $P = (\operatorname{Ln}2\,,\ \sqrt{2}\,,\ 1) + s\,(1\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ 0)$, $s \in \mathbb{R}$.

(30) Dado la curva $\vec{f}(t) = (1-2t\,,\ t^2\,,\ 2e^{2(t-1)})$, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto donde el vector velocidad es paralelo al vector $\vec{f}(t)$.

Solución: $P = (-1\,,\ 1\,,\ 2) + s\,(-2\,,\ 2\,,\ 4)$, $s \in \mathbb{R}$.

(31) Sea las curvas $\vec{f}(t) = \left(\text{Ln}(t+2), e^{t^2}+1, \frac{5}{t+1} \right)$

$\vec{g}(t) = \left(\text{Ln}2t, 3t^2-1, \frac{5+5t}{2} \right)$

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a cada una de las curvas en el punto de intersección .

Solución: $L_1 : \quad P = (\text{Ln}2, 2, 5) + s(\frac{1}{2}, 0, -5) \quad , \quad s \in \text{IR}.$

$L_2 : \quad Q = (\text{Ln}2, 2, 5) + r(1, 6, \frac{5}{2}) \quad , \quad r \in \text{IR}.$

(32) Hallar el ángulo en el punto de intersección de las curvas :

$\vec{f}(t) = (e^t, 2\text{sen}(t+\frac{\pi}{2}), t^2-2)$; $\vec{g}(t) = (t, 2, t^2-3)$

Solución: $\theta = \text{arc cos}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(33) Dado las curvas $C_1 : \quad \vec{f}(t) = e^t(\cos t, \text{sen}\, t, 1) \quad , \quad 0 \le t < 2\pi$

$C_2 : \quad \vec{g}(t) = (t+1, t^2, t+1)$

a) Hallar el punto de intersección de C_1 y C_2 .

b) Si desde el punto de intersección hasta un valor t, la longitud de arco de C_1 es $(e-1)\sqrt{2}$, ¿Cuánto es el valor de t?

Solución: a) $t = 0 \quad , \quad b = t = 1$

V CURVATURA , TORSIÓN

(34) Sea C una curva descrita por la función

$$\vec{f}(t) = \left(\int_0^t 2\cos(\pi\mu^2)\, d\mu, \int_0^t 2\text{sen}(\pi\mu^2)\, d\mu, 2\sqrt{3}\, t \right) \quad , \quad t \ge 0$$

Hallar la curvatura k de C, en términos del parámetro longitud de arco (el cual se mide a partir del punto (0 , 0 , 0)).

Solución: $t = \frac{s}{4} \quad , \quad \vec{g}(s) = \vec{f}(\frac{s}{4}) . \quad \vec{T}(s) = D_s \vec{g}(s) \quad , \quad k(s) = \frac{\pi s}{16}$

(35) Sea C_1 la curva descrita por la función

$f(x)=\left(x+1\,,\,e^{3-x}\,,\,Ln\,(x^2+2x+1)-Ln4\right)$ y C_2 la curva descrita por

$g(x)=\left(\frac{1}{x},4\sqrt{|x|}-1\,,\,-Ln\,x\right)$.

Hallar la torsión de la curva C_1 en el punto de intersección de estas curvas.

Solución: El punto de intersección es $\vec{f}\,(3)=(4\,,1\,,Ln4)$, $\tau\,(3)=-\frac{2}{37}$

(36) Una partícula se mueve en el espacio IR^3 con una aceleración constante $\vec{A}\neq\vec{0}$. Si su posición inicial es $\vec{x}\,(0)=P_0$ y su velocidad inicial es $\vec{x}\,'(0)=\vec{V}_0\neq\vec{0}$, siendo $\vec{A}$ y $\vec{V}_0$ vectores no paralelos . Verificar que la curva C es la trayectoria de la partícula, es una curva plana, y hallar el plano en que se encuentra .

Determinar además el instante en que la rapidez es mínima y comprobar que la curvatura es máxima en ese mismo instante.

Solución: $\vec{A}\,(t)=\vec{f}\,''(t)$, $\vec{x}\,''(t)=A$ entonces $\vec{x}\,'''(t)=(0\,,0\,,0)$, $\tau(t)=0$ $\vec{v}\,(t)=\vec{A}\,t+\vec{C}$, $\vec{C}=\vec{V}_0$, $\vec{x}\,'(t)=\vec{A}\,t+\vec{v}_0$. El vector $\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)=\vec{V}_0\times\vec{A}$ tiene la dirección de $\vec{B}$, $(\vec{V}\,(t))^2=t\,|\vec{A}\,|^2+2\,t\,\vec{A}\,.\,V_0+|\,\vec{V}_0\,|^2$, $k(t)=\frac{|\vec{V}_0\times\vec{A}|}{|\vec{X}\,'(t)|^3}$. La curvatura es máxima cuando $|\,\vec{x}\,'(t)|$ sea mínima, v(t) es mínima en $t=0$.

(37) Sea C una curva en IR^3 descrita por la función $\vec{f}\,(t)$, si

$f''(t)=g\,(t)\,(1\,,\sqrt{2}\,t\,,t^2)+h\,(t)\vec{N}\,(t)$

(donde g y h son funciones reales de variable real) y el vector binormal es paralelo al vector $(t^2\,,-\sqrt{2}\,t\,,1)$.

Hallar t_1 , si se sabe que en $\vec{f}\,(t_1)$ la torsión es igual a $-\sqrt{2}$.

Solución: No existe valor real de t_1 .

(38) La curva C es la intersección de las superficies :
$x^2+y^2+2\,(y-x)-2=0\ \wedge\ x-y-2z-2=0$, hallar la ecuación del plano osculador y la torsión en el punto donde el vector tangente a la curva C, tiene la misma dirección que la renta : $4-x=y+2=1-z$

Solución: $\tau=0$, plano osculador : $x-y-2z-2=0$

(39) Sea C, una curva descrita por la función :

$$\vec{f}(t)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\int_0^t x^2\cos x\,dx\,,\ \int_0^t x^2\,\text{sen}\,x\,dx\,,\ \frac{t^3}{3}\right)\quad,\quad t\geq 0$$

Hallar la curvatura en términos del parámetro longitud de arco s, (el cual se mide a partir de $(0\,,0\,,0)$) .

(40) Dadas $\vec{f}'(2)=2\vec{i}+\vec{k}\quad,\quad T'(2)=3\vec{j}\quad,\quad \vec{B}'(2)=3\vec{j}$.
Hallar $\tau(2)+k(2)$

(41) Una gota de aceite sobre la cubierta plana de un tanque de refrigeración describe una curva C de longitud unitaria. Hallar la ecuación de la curva , si se sabe que :

$$\vec{N}'(S)=\frac{a}{S^2+a^2}\vec{T}(s)+\tau(s)\,\vec{B}(s)\quad,\quad a\neq 0$$

(42) Sea $\vec{f}(t)=\vec{c}+(r\cos t)\,\vec{d}+(r\,\text{sen}\,t)\,\vec{e}$, $t\geq 0$, $r>0$, con $\vec{d}$ unitario y ortogonal a $\vec{n}$, tal que $\vec{e}=\vec{n}\times\vec{d}$ donde $\|\vec{n}\|=1$.

i) Parametrizar la curva descrita por $\vec{f}$ mediante el parámetro longitud de arco
ii) Hallar la curvatura y torsión de la curva
iii) Identificar la curva descrita por $\vec{f}$

Solución:

i) $\vec{e}$ es también unitario y $\{\vec{d}\,,\vec{n}\,,\vec{e}\}$ son ortogonales, entonces

$$\vec{f}(t)=\vec{C}+0\vec{n}+(r\cos t)\,\vec{d}+(r\,\text{sen}\,t)\,\vec{e}$$
$$=\vec{C}+(0\,,r\cos t\,,r\,\text{sen}\,t)$$

$t=\frac{s}{r}$, luego $\vec{f}(\frac{s}{r})=\vec{g}(s)=\vec{C}+(0\,,r\cos\frac{s}{r}\,,r\,\text{sen}\frac{s}{r})\quad,\quad s\geq 0$

ii) $\vec{k}(s)=D_S^2\,\vec{g}(s)=(0\,,-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\,,-\frac{1}{r}\,\text{sen}\frac{s}{r})\quad,\quad k(s)=\frac{1}{r}$.

$\tau(s)=-D_s\vec{B}(s)\,.\,\vec{N}(s)\quad,\quad \vec{B}(s)=\vec{n}\,,\quad D_s\vec{B}(s)=\vec{0}$

iii) La curva descrita por f es una circunferencia con centro en $\vec{c}$ y radio r .

(43) Sea C una curva en IR^3 descrita por la función $\vec{x}=\vec{f}(t)$, $t>0$. Si $|f'(t)|=\frac{1}{t+1}$ y $B'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}(-1\,,-1\,,\frac{1-t}{\sqrt{2t}})$ para $t>0$, y la torsión $\tau(t)$ en

cada punto $\vec{f}(t) \in C$ es positiva. Determinar $\tau(t)$ ¿A medida que t crece, la curva C se tuerce más o menos?; justifique su respuesta.

Solución:

Aplicar $\vec{B}'(t) = -\tau(t)\,\ell'(t)\,\vec{N}(t)$, $\ell'(t) = \frac{ds}{dt} = |\vec{f}'(t)|$.

$\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}$, cuando t aumenta τ disminuye. Esto es, la curva se tuerce menos .

(44) Hallar la curvatura de la curva dada por $r = g(\theta)$, donde $r = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ en los puntos de intersección con la curva : $2x^2 + 2y^2 - x = 0$.

Solución:

La parametrización de $r = g(\theta)$ es $\begin{cases} x = g(\theta)\cos\theta \\ y = g(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

La ecuación polar de la circunferencia es $r = \frac{1}{2}\cos\theta$. La intersección sucede cuando $\cos\theta_1 = \frac{1}{3}$, se obtiene dos puntos. $k(\theta_1) = 3\sqrt{3} = k(-\theta_1 + 2\pi)$. También se intersectan cuando $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ en este caso $k(0) = \lim_{0 \to 0} k(\theta) = \pm\infty$.

Previamente hallar $k(\theta) = \frac{|\vec{f}(\theta) \times \vec{f}''(\theta)|}{|\vec{f}'(\theta)|^3}$

(45) Determinar la curvatura y torsión de una curva que se encuentre en el plano $P : z = 6$ y que equidista de las rectas

$\mathfrak{L}_1 : \vec{P} = (0,0,8) + t(1,2,0)$; $\mathfrak{L}_2 : \vec{P} = (0,0,0) + r(-1,2,0)$.

(46) Sea $\mathcal{C}$ una curva descrita por la función $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{1-t^2}\,, 1, t - \operatorname{Ln}\left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} \right) \right)$

Dado los planos $\mathcal{P}_1 : x + z = 1$ y $\mathcal{P}_2 : x - y = 1$; hallar la curvatura y torsión en el punto de intersección de $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Solución:

Porque $k(0) = \frac{0}{0}$ y $\tau(0) = \frac{0}{0}$, aplicar $k(0) = \lim_{t \to 0} k(t)$, $\tau(0) = \lim_{t \to 0} \tau(0)$

la curva $\mathcal{C}$ se encuentra en el plano $y = 1$.

(47) Sea $\mathcal{C}$ una curva descrita por la función $\vec{f}:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}'(0)=(1,0,0)$ y $f''(t)$ es de la forma: $\vec{f}'(t)=2t\,\vec{T}(t)+\lambda(t)\,\vec{N}(t)$. Hallar, la longitud de la curva .

Solución: $L=\int_0^1 \ell'(t)\,dt=\frac{4}{3}$, aplicar $\vec{f}''(t)=\ell''(t)\vec{T}(t)+\ell'(t)|\vec{T}'(t)|\vec{N}(t)$

(48) Dado la curva $\vec{f}(t)=(-2+\operatorname{sen} t\,,\,t^2+2\,,\,t^2-1+2\operatorname{sen} t)$. Hallar la torsión en cualquier punto y determinar las ecuaciones de los planos osculadores en $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$ y $t=\frac{\pi}{2}$. Justifique su respuesta.

Solución:

$\tau(t)=0$, $2x+y-z+1=0$.

(49) Sea C la curva definida por: $x(s)=\left(\frac{4}{5}\cos(s)\,,\,1-\operatorname{sen}(s)\,,\,-\frac{3}{5}\cos(s)\right)$ siendo "s" la longitud de arco. Hallar la curvatura $k(\pi)$ y la torsión $\tau(\pi)$.

Solución:

$k(\pi)=1$, $\tau(\pi)=0$

(50) ***Teorema.*** Si la curvatura $k(s)$ de una curva es conocido y es función del parámetro s (longitud de arco), entonces una curva $r(s)=(x(s)\,,\,y(s))$ con función de curvatura $k(s)$ está dada por.

$$x(s)=\int_0^s \cos\left[\int_0^\mu k(t)\,dt\right]d\mu \quad , \quad y(s)=\int_0^s \operatorname{sen}\left[\int_0^\mu k(t)\,dt\right]d\mu$$

a) Si $k(s)=0$, hallar la curva . R: $r(s)=(s,0)$,

b) Si $k(s)=\frac{1}{a}$, hallar la curva . R: $r(s)=(a\operatorname{sen}\frac{s}{a}\,,\,a\,(1-\cos(\frac{s}{a}))$

(51) Si $\tau(t)=0$ para todo t, probar que la curva es plana.

(52) Sea C una curva con ecuación vectorial $\vec{f}(t)=\left(t\,,\,\frac{1+t}{2}\,,\,\frac{1-t^2}{2}\right)$

a) Hallar la torsión
b) determinar la ecuación del plano osculador en el plano en que $t = 1$.

Solución:

a) $\tau(t) = 0$, b) En $t = 1$, $\vec{f}(1) = (1, 2, 0)$, la ecuación del plano osculador en $\vec{f}(1)$ es: $x - y + z + 1 = 0$.

(53) Dado una curva C que está definida por la función vectorial $\vec{f}(t) = (2t^2, 1-t, 3+2t^2)$. Hallar la ecuación de la recta paralela al vector curvatura $\vec{k}(t_0)$ y que pasa por el punto $\vec{f}(t_0)$ donde el radio de curvatura es mínimo.

Solución:

$k(t) = \frac{4\sqrt{2}}{(32t^2+1)^{3/2}}$, $\rho(t) = \frac{(32t^2+1)^{3/2}}{4\sqrt{2}}$. El radio de curvatura es mínimo en $t = 0$. La ecuación de la recta es: $P = (0,1,3) + r(1,0,1)$, $r \in \mathbb{R}$

(54) Dado la curva C con la ecuación vectorial $\vec{f}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 4\operatorname{sen}\frac{t}{2})$ hallar, la curvatura y la torsión de C en el punto donde el plano normal a la curva es paralela al plano $z = 1$.

Solución:

$t = 2n\pi$, $n \in Z$, $k(0) = \frac{1}{4}$, $\tau(0) = -\frac{1}{2}$.

(55) Sea C una curva con ecuaciones paramétricas: $x = \sqrt{1-t^2}$, $y = 1 - t$, $z = \operatorname{Ln}\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}$. Dado los planos $\mathcal{P}_1 : x + z - 1 = 0$, $\mathcal{P}_2 : x - z - 1 = 0$, hallar la curvatura y torsión en el punto de intersección de C , $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Solución:

a) $t = 1$, b) $f'(0) = (0, 0, 0)$, $f''(0) = (-1, 0, 0)$, $f'''(0) = (0, 0, -2)$

b) Como $k(0) = \frac{0}{0}$ y $\tau(0) = \frac{0}{0}$, debemos hallar

$\lim_{t\to 0} k(t)$ y $\lim_{t\to 0} \tau(t)$, donde $k(t)=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, $\tau(t)=(0)$

La curva está contenida en el plano $y=1$.

(56) Supongamos que una curva C sea la traza de la función vectorial $\vec{f}:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^3$

Si $f'(0)=(1,0,0)$ y $f''(t)=2t\vec{T}(t)+\lambda(t)\vec{N}(t)$, calcular la longitud de la curva

Solución:

Aplicar $f''(t)=\ell''(t)\vec{T}(t)+\ell'(t)|\vec{T}'(t)|\vec{N}(t)$, $L=\frac{4}{3}$.

(57) Las ecuaciones paramétricas de una curva C son : $x=-2+\operatorname{sen} t$, $y=t^2+2$, $z=t^2-1+2\operatorname{sen} t$. hallar :

a) la torsión para todo $t\in \mathbb{R}$,

b) Hallar las ecuaciones de los planos osculadores en $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{\pi}{2}$

Solución:

a) $\tau(t)=0$, $\forall\ t\in \mathbb{R}$,

b) $2x+y-z+1=0$, pues la curva C se encuentra sobre un plano .

(58) Hallar la torsión de la curva $\vec{f}(t)=(1+t, e^{t+1}, t^2+1)$, $t\geq 0$; en el punto de intersección con la curva $\vec{g}(t)=\left(\frac{3}{1+t}, e^{4t}, 1+2t\right)$, $t\geq 0$.

Solución:

El punto de intersección es $(2, e^2, 2)$ en $t=1$, $\tau(1)=-\frac{2e^2}{e^4+4}$

(59) Sea C una curva con ecuación $\vec{f}(t)=(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t, -4\cos\frac{t}{2})$; $t\in[0, 2\pi]$. Hallar la longitud del arco C entre el punto $t=0$ y el punto donde la curvatura es mínima .

Solución: a) $k(t)=\frac{1}{8}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$, b) $t=\pi$, c) $L=4\sqrt{2}$

(60) Sea C una curva con ecuación $\vec{\alpha}(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s\,,\, 1-\operatorname{sen} s\,,\, -\frac{3}{5}\cos s\right)$ donde s es la longitud de arco de la curva C. a) Hallar el radio de curvatura en s, b) ¿Sobre qué superficie se encuentra la curva C?

Solución:

a) $k(s) = 1$; $\rho(s) = 1$; b) $3x + 4z = 0$.

VI PLANO OSCULAR, CENTRO DE CURVATURA

(61) Dado $\vec{F}(t) = (t\,, \operatorname{Ln}(\sec t)\,, \operatorname{Ln}(\sec t + \operatorname{tg} t))$. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto en el que la curva intersecta al plano YZ.

(62) Dado $\vec{B}(t) = \frac{(t,0,1)}{\sqrt{1+t^2}}$, $\ell'(t) = 1$ y $\tau(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Hallar el vector unitario $\vec{T}(t)$.

(63) Un vector se mueve con el vector de posición :

$\vec{r}(t) = t\,\vec{A} + t^2\,\vec{B} + 2\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}\,\vec{A}\times\vec{B}$ donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores unitarios fijos que forman un ángulo de $60°$.

a) Hallar la velocidad de la partícula en el instante "t".

b) Hallar qué tiempo invierte para desplazarse 12 unidades de longitud de arco desde la posición inicial $\vec{r}(0)$.

(64) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, Normal y Rectificante de la curva:

$$C:\begin{cases} x + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \quad \text{en el punto } (2\,,\, 2\sqrt{3}\,,\, 3)$$

(65) Sea la curva $C: \vec{f}(t) = (\cos h\, t\,,\, \operatorname{sen} h\, t\,,\, t)$. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto donde el radio de curvatura es mínimo.

Solución:

$\rho(t) = \operatorname{sen}^2 h\, t + \cos^2 h\, t + 1 = 2\cos^2 h\, t$.

$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ toma su mínimo en $t = 0$, entonces $\rho(t)$ es mínimo en $t = 0$. El plano osculador es $y - z = 0$

(66) Sea $R : 3x - y + z = 2$ y $N : x + 6y + 3z = 5$, las ecuaciones de los planos rectificante y normal respectivamente, en un punto de una curva β.

a) Hallar la ecuación del plano osculador en el punto $(2, 1, 6)$.

b) Hallar el ángulo que forman el plano osculador con el plano $\mathcal{P} : 5x + 3y = 6$.

(67) Sea C la curva de intersección del cono $z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2}$ con el cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$, en el primer octante. Hallar la ecuación del plano, que pasa por el punto de intersección de la curva C con el plano $y = 1$ que contiene a los vectores $\vec{T}$ y $\vec{B}$ en dicho punto.

Solución: Parametrizar la curva, haciendo $y = t$, $t \geq 0$.
El plano es: $3x - y - \sqrt{2}\, z - 2 = 0$

(68) Dado la curva $f(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3} \right)$.

a) Hallar los vectores $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ en $t = 1$;

b) hallar la ecuación del plano osculador.

Solución:

a) $\vec{T}(1) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, $\vec{B}(1) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, $\vec{N}(1) = (-1, 0, 0)$.

b) $3y - 3z + 1 = 0$

(69) Sea C una curva con ecuación vectorial $\vec{f}(t) = (t, \ln(\sec t), \ln(\operatorname{sen} t + \operatorname{tg} t))$. Hallar lós vectores : T, N y B y la ecuación del plano osculador en el punto en que la curva corta al plano x z.

Solución:

$t = 2k\pi$, $k \in Z$, $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $N = \frac{1}{2}(0, 2, 0)$

$x - z = 0$

CENTRO DE CURVATURA , PLANO OSCULAR

(70) Una partícula se desplaza sobre una curva C , descrita por:

$$\vec{f}(\mu)=\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{4+\mu^2}+2\,\text{Ln}\left(1+\sqrt{4+u^2}\right),\frac{\mu}{2}\sqrt{4-\mu^2}+2\,\text{arc sen}\frac{\mu}{2},4\mu^{3/2}+5\right)$$

con una rapidez de $\frac{(9t+1)^{3/2}}{27}$ unidades de tiempo. Sí la partícula parte del reposo del punto (2 Ln 2 , 0 , 5); hallar el centro de curvatura en el instante en el que el vector velocidad cruza el plano XZ .

(71) Sea la curva C definida por:

$$\vec{f}(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\left(\cos\left(\text{Ln}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right),\text{sen}\left(\text{Ln}\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right),1\right)$$

donde s es el parámetro longitud de arco. Determinar, para el punto $(1,0,1)\in C$, las coordenadas del centro del círculo de curvatura.

¿Están los puntos $P_1=\left(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$, $P_2=(0,2,-1)$ y

$P_3=\left(\frac{1}{2},\frac{13-2\sqrt{66}}{10},\frac{14-\sqrt{66}}{10}\right)$ sobre el círculo de curvatura? Justificar su respuesta.

Solución:

Aplicar la definición: $\vec{T}(s)=D_s\vec{f}(s)$, $\vec{k}(s)=D_s^2\vec{f}(s)$; obteniéndose

$\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\vec{k}(0)=\frac{1}{3}(-1,1,0)$, $k(0)=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\rho(0)=\frac{3}{\sqrt{2}}$,

$\vec{N}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$.

El centro del circulo de curvatura es $\vec{P}_c=\vec{f}(s)+\rho(s)\vec{N}(s)$, $\vec{P}_c=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$. El plano osculador es: $x+y-2z+1=0$; P_1 cumple, P_2 no cumple, P_3 cumple.

(72) Sea la curva $C\subset IR^3$, descrita por $\vec{f}(t)$, $t\in D\vec{f}$. Hallar el centro de curvatura de C, en el punto $\vec{f}(1)=(3,1,3)$, si se cumple que el plano osculador en dicho punto es $3y-x=0$.

$$f''(t)=\frac{20t}{\sqrt{10t^2+1}}\vec{T}(t)+\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10t^2+1}}\vec{N}(t)\quad,\quad \vec{f}(1).\vec{N}(t)>0\ ,\ \vec{f}(1)=(6,2,2)$$

Solución:

$B(1)=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3,0)$ o $B(1)=-\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3,0)$, $\vec{f}'(1)=(6,2,2)$

$\vec{T}(1)=\frac{1}{\sqrt{110}}(3,1,-10)$ o $T(1)=\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,-1,10)$, $f''(1)=\frac{1}{11}(54,18,40)$

$\left|\vec{f}'(1)\times\vec{f}''(1)\right|=4\sqrt{10}$, $\left|\vec{f}'(1)\right|=2\sqrt{11}$, $k(1)=\frac{\sqrt{10}}{22\sqrt{11}}$, $\rho(1)=\frac{22\sqrt{11}}{\sqrt{10}}$.

El centro de curvatura es $P_c=\left(-\frac{18}{5},-\frac{6}{5},25\right)$.

(73) Hallar el centro del círculo de curvatura y el plano osculador de la curva $C:\vec{f}(t)\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$; en $\vec{f}(0)=(0,0,1)$, si se sabe que $\vec{f}'(0)=(0,0,2)$, $\vec{T}'(1)=\frac{2}{9}(2,1,-2)$, $\vec{T}'(t)$ es paralelo a $\left(-t,\frac{t^2}{2}-1,t\right)$ y $\vec{f}''(t)=2t\,\vec{T}(t)+2\vec{N}(t)$

Solución:

Como $\vec{N}(t)$ tiene la dirección y sentido de $\vec{T}'(t)$, entonces

$$\vec{N}(t)=\frac{\pm\left(-t,\frac{t^2}{2}-1,t\right)}{\sqrt{t^2+\left(\frac{t^2}{2}-1\right)^2+t^2}}\quad,\quad \vec{N}(1)=\frac{1}{3}(2,1,-2)$$

Pero $\vec{f}''(t)=\ell''(t)\,\vec{T}(t)+k(t)[\ell'(t)]^2\vec{N}(t)$, $\ell''(t)=2$, $k(t)[\ell'(t)]^2=2$

$\vec{P}_c=(0,2,1)$, Plano osculador : $x=0$.

(74) Ver si el punto $Q=(2,2-\sqrt{5},0)$ pertenece a la circunferencia de curvatura de la curva $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^3$ descrita por $\vec{x}=\vec{f}(t)$ en el punto $\vec{f}(0)=(1,2,0)$. Si se sabe que $\vec{f}'(0)=(0,3,0)$ y que $\vec{f}''(t)=3t\,\vec{T}(t)-\frac{3}{(2+t^2)}\vec{R}(t)$ donde $\vec{R}(t)=(t^2-2,2t,-2t)$ es un vector paralelo para cada t al vector unitario normal principal $\vec{N}(t)$

Solución:

Aplicar: $\vec{f}''(t)=\ell''(t)\,\vec{T}(t)+k(t)[\ell'(t)]^2\,\vec{N}(t)$ además $\vec{N}(t)=\frac{\pm\vec{R}(t)}{|\vec{R}(t)|}$, elegir el negativo. También: $\ell'(0)=|\vec{f}'(0)|$, $k(0)=\frac{1}{3}$, $\rho(0)=3$, $\vec{R}(0)=\vec{i}$. El centro de la circunferencia de curvatura en $\vec{f}(0)$ es $\vec{P}_c=(4,2,0)$, $\vec{B}(0)=-\vec{k}=(0,0,1)$.

La ecuación del plano osculador es $z = 0$. Q está en el plano osculador. La distancia de Q a P_c es $3 = \rho(0)$.

(75) Una partícula se desplaza en el plano $\mathbb{R}^2$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ con la ecuación $y = \text{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$, $x \geq 1$ con rapidez constante $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/seg, y parte del punto (1 , 0) en el instante t = 0. Hallar la ecuación de la circunferencia de curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto en que se encuentra la partícula después de haber transcurrido 2 seg . desde su partida .

Solución:

La ecuación vectorial de $\mathcal{C}$ es $\vec{f}(x) = \left(x , \text{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right)$,

$s = \int_1^x \left| \vec{f}'(\mu) \right| d\mu = \sqrt{x^2 - 1}$. Porque $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow s = \frac{\sqrt{3}}{2} t + c$

Como en $(1,0)$, $t = 0$; entonces $c = 0$. Al igualar $\frac{\sqrt{3}}{2} t = \sqrt{x^2 - 1}$ en $t = 2$ seg, se obtiene $x = 2$. $\vec{f}(2) = (2 , \text{Ln}(2 + \sqrt{3}))$, $\vec{f}'(2) = \left(1 , \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, $\rho(2) = 4$,

$f''(2) = \left(0 , -\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)$, $p_c = \left(4, \text{Ln}(2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. La ecuación de la circunferencia de curvatura es: $(x - 4)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{3}} - \text{Ln}\left(2 + \sqrt{3} \right) \right)^2 = 16$.

(76) Sea $\mathcal{C}$ la curva definida por: $x(t) = \frac{1}{2} - t$, $y(t) = \int_0^t e^{\text{sen}\,\mu} d\mu$, $z(t) = t$.

a) Hallar el círculo de curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto donde la curva intersecta al plano $2x + 2y + 2z = 1$.

b) El punto $\left(1 , 1 , \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right)$ ¿Pertenece al circulo de curvatura de $\mathcal{C}$?

Solución:

a) En $t = 0$, hay intersección, $f'(0) = (-1 , 1 , 1)$, $\vec{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 , 2 , -1)$, el centro del círculo de curvatura es $\left(2 , 3 , -\frac{3}{2} \right)$ y su radio es $\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

b) El punto $P=\left(1,1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ pertenece al círculo de curvatura de $\mathcal{C}$ si pertenece al plano $2x+2z-1=0$ y la distancia de P al centro es menor que el radio.

(77) Sea una curva $\vec{f}(t)=\left(1-\frac{t^2}{2},t-\cos t,1-e^{-t}\right)$. Compruebe si los puntos $\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{5},\frac{5}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3},\frac{-5}{3},0\right)$ están en el circulo de curvatura de la curva $\vec{f}(t)$, sabiendo que $\vec{f}(t)$ pasa por el punto $(1,-1,0)$

Solución:

$t=0$, $k(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, el centro es $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

(78) Dada la curva C de ecuación vectorial $\vec{f}(t)=\left(1-\frac{4t^3}{3},1-2t^2,t\right)$. Hallar la ecuación del plano osculador de la curva paralelo al plano $x+2=0$.

Solución: $x-1=0$

(79) Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la curva : $y = x\,\mathrm{Ln}\,x$ en el punto donde $y'=0$.

Solución: $t=\frac{1}{e}$, $\rho\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$, $N\left(\frac{1}{e}\right)=(0,1,0)$, $P_c=\left(\frac{1}{e},0,0\right)$

(80) La ecuación vectorial de una curva es $\vec{f}(t)=\left(t,\frac{t^2}{\sqrt{2}},\frac{t^3}{3}\right)$

a) Hallar el centro de la circunferencia de curvatura en el punto $f'(0)$.

b) Hallar la ecuación de la circunferencia de curvatura .

Solución:

a) $k(0)=\frac{2}{\sqrt{2}}$, $\rho(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{P}_c=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $B(0)=(0,0,1)$

b) El plano osculador es $z=0$.

LONGITUD DE LA CURVA

(81) Encontrar la longitud de la curva definida por

$$\vec{f}(t)=\left(\int_0^t \frac{\cos\mu}{\mu}d\mu\,,\ \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}d\mu\,,\ 4\sqrt{t}\right)$$

entre $t=1$ y $t=t_1$, sabiendo que $\vec{f}(t_1)$ es el punto donde $\vec{f}'(t_1)$ es paralelo al plano YZ $(1<t_1<2)$.

Solución:

Sí $\vec{f}'(t_1)$ es paralelo al plano YZ, entonces $x=0$, $t_1=\frac{\pi}{2}$

$$L=4\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{4}}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}-\operatorname{Ln}\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}$$

(82) Dado la espiral $\alpha(t)=(ae^{bt}\cos t\,,\ ae^{bt}\operatorname{sen} t)$ para $t\in\mathbb{R}$ y $a>0$, $b<0$ probar que $\alpha(t)$ tiene longitud finita sobre $[0\,,+\infty\rangle$

Solución: $-\frac{a}{b}[1+b^2]^{1/2}$.

(83) Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva cuya ecuación polar es $r=1+\cos\theta$, $\theta\in[0\,,2\pi]$. Hallar su longitud.

Solución: 8

(84) Reparametrizar por la longitud de arco, la curva $\vec{f}(t)=(e^t\cos t\,,e^t\operatorname{sen} t\,,e^t)$, $t\geq 0$

Solución:

$$\alpha(s)=\left(\tfrac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\left(\cos\left[\operatorname{Ln}\left(\tfrac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right],\operatorname{sen}\left[\operatorname{Ln}\left(\tfrac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right],1\right)\quad,\ s\geq 0$$

(85) Sean las curvas descritas por: $\alpha(t)=(t\,,e^t)\,,\ 0\leq t\leq 1$

$$\beta(t)=(t+\ln t\,,t-\ln t)\quad,\ 1\leq t\leq e$$

Sí L_1 y L_2 son las longitudes de α y β respectivamente, calcular $\frac{L_1}{L_2}$.

Solución: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(86) Dado la curva $\alpha(t) = \left(\int_0^t \frac{\cos\mu}{\sqrt{\mu}}\, d\mu\,,\ \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\mu}{\sqrt{\mu}}\,,\ 4\sqrt{t} \right)$, hallar la longitud de la curva $\alpha(t)$ entre $t = 0$ y $t = t_0$, sabiendo que $\alpha(t_0)$ es el punto donde $\alpha'(t_0)$ es paralelo al plano YZ $(1 < t_0 < 2)$.

Solución: $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $L = 2\sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

(87) Hallar la longitud del arco de la curva descrita por:

$$\vec{\alpha}(t) = \left(\int_0^t x\cos x\, dx,\ \int_0^t x\operatorname{sen} x dx\,,\ t \right)$$

Solución: $s = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1} + \operatorname{Ln}\left(\sqrt{t^2+1} + t \right) \right]$

(88) Dado la curva descrita por la ecuación $y = \operatorname{Ln}\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $1 \le x \le 2$

Hallar su longitud.

Solución: $L = \operatorname{Ln}\frac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}}$

(89) Consideremos el camino $\alpha : [0\,,\, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\alpha(t) = (a\cos t\,,\, b\operatorname{sen} t)$, donde $\alpha([0\,,\, 2\pi]$ es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Demostrar que la longitud L de esta curva es $L = 46\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2}\, dt$, donde $e = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - a^2}$ es la excentricidad de la elipse.

NOTA: Las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,dt$, $0<k<1$ se llaman integrales elípticas de segunda clase.

(90) a) Un segmento de recta que une los puntos P y Q de $\mathbb{R}^3$ está representada por el camino $\vec{f}:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(t)=tq+(1-t)p$. Demostrar que la distancia más corta que une los puntos P y Q es $|q-p|$.

b) Sea $\vec{f}:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camino de clase C^1, tal que $f(a)=p$ y $f(b)=q$.

i) Sea $\vec{v}\in \mathbb{R}^3$ un vector unitario. Considere la función $\varphi:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t)=f'(t).\vec{v}$. Demuestre que $\int_a^b \varphi(t)\,dt=(q-p).\vec{v}$

ii) Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con los vectores $f'(t)$ y $\vec{v}$ para demostrar que $\int_a^b \varphi(t)\,dt \le \int_a^b |f'(t)|\,dt$

iii) Considere el vector unitario $\vec{v}=\frac{q-p}{|q-p|}$ para demostrar que $|q-p|\le$ longitud del camino f.

iv) Concluya que la distancia más corta entre p y q es el segmento de recta que una estos dos puntos.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

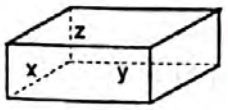
4.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos funciones reales de dos, tres o más variables reales tales como:

1. $f(x, y) = \frac{1}{2} x y$

   ◆ Si x = base de un triangulo
   y = altura de un triángulo,
   entonces $f(x,y)$ expresa el área de un triángulo.

2. $g(x, y, z) = 2(x + y) z$



   ◆ Si x, y, z son las longitudes de las arístas de un paralelepípedo, la función $g(x,y,z)$ expresa el área lateral del paralelepípedo.

3. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

   ◆ Sí $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los ingresos de n familias, entonces la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ expresa el ingreso promedio de n familias.

Como vemos, la ***primera*** es una función real de dos variables, esto es,

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{donde } D = \{(x, y) / x > 0, \ y > 0\}$$
$$(x, y) \longrightarrow \frac{1}{2} x y$$

"a cada valor $(x, y) \in D$ corresponde el único número $\frac{1}{2} x y \in \mathbb{R}$ ".

La ***segunda***, es una función real de 3 variables, esto es

$$g : E \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \text{donde } E = \{ (x , y , z) / x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0 \}$$
$$(x , y , z) \longrightarrow 2(x + y)z$$

"a cada vector $(x , y , z) \in E$ corresponde el número real $2(x + y)\, z$" .

La ***tercera***, es una función real de "n" variables, esto es

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \text{donde } D = \{ (x_1 , x_2 , \ldots , x_n) / x_i > 0 \}$$
$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

"a cada vector $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \in D$ se asigna el número real $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ "

En particular, estudiaremos las funciones reales de dos variables $z = f(x , y)$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, del cual nos interesa analizar las derivadas de f con respecto a las variables "x" e "y" .

4.1 FUNCIÓN REAL DE DOS VARIABLES

Definición 1 ***(Funciones de $\mathbb{R}^2$ en IR)***

Dados el subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ y el conjunto de los números reales IR, llamamos función definida en D y con valores en IR, o simplemente función de D en IR, a toda correspondencia f que asocia a cada vector $(x , y) \in D$ un único elemento $z = f(x , y) \in \mathbb{R}$

4.1.1 Notación Funcional

Simbólicamente, una "función f de $D \subset \mathbb{R}^2$ en IR" es representada por una de las siguientes notaciones :

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{o} \qquad D \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R} \quad , \quad D \subset \mathbb{R}^2$$
$$(x , y) \longrightarrow z = f(x , y)$$

En esta notación, D es el dominio de f ; (x,y) son las variables independientes y z es la variable dependiente.

4.1.2 Dominio y Rango de una Función Real de dos Variables.

Si f es una función real de dos variables (x,y), definimos :

a) **DOMINIO DE** f :

$$\text{Dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \exists\, z \in \mathbb{R} \ \wedge \ z = f(x,y) \}$$

b) **RANGO DE** f :

$$\text{Rang}(f) = \{ f(x,y) \in \mathbb{R} / (x,y) \in \text{Dom}(f) \}$$

4.1.3 Técnicas para Hallar el Dominio de una Función $z = f(x,y)$

1. Si $z = f(x,y)$ es un polinomio en "x" e " y", entonces el $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Ejemplos:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$; $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.

b) $g(x,y) = x^3 - 2xy^2 - x^2 - y^2$; $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}^2$.

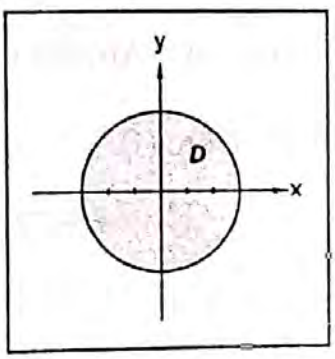
2. Si $f(x,y) = \sqrt{P(x,y)}$, entonces $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff P(x,y) \geq 0$.

Ejemplo:

Sea $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff 9 - x^2 - y^2 \geq 0$

$\iff x^2 + y^2 \leq 9$



3. Si la función f es racional, esto es, $f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

entonces $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff Q(x,y) \neq 0$

$\iff (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{ Q(x,y) = 0 \}$

Ejemplos:

a) Sea $f(x,y) = \frac{1}{9x^2 + y^2}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \}$

b) Sea $f(x,y) = \frac{y+2}{x}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{ x = 0 \}$

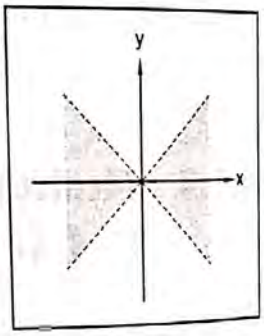
4. Si $f(x,y) = \text{Ln}[P(x,y)]$, entonces $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff P(x,y) > 0$.

Ejemplo:

Sea $f(x,y) = \text{Ln}(x^2 - y^2)$.

$(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff x^2 - y^2 > 0$

$\iff (x-y)(x+y) > 0$



5. El dominio de las funciones : $f(x,y) = \text{sen}[p(x,y)]$ y $f(x,y) = \cos[P(x,y)]$ es todo $\mathbb{R}^2$, si $P(x,y)$ es polinomio.

6. Si $f(x,y) = \text{Arc cos}(P(x,y))$, entonces $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff |P(x,y)| \leq 1$

Si $f(x,y) = \text{Arc sen}(P(x,y))$, entonces $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff |P(x,y)| \leq 1$

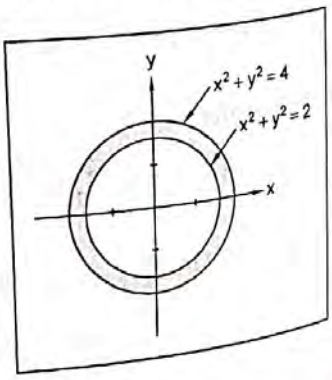
Ejemplo:

Sea $f(x,y) = \text{Arc sen}(x^2 + y^2 - 3)$

$(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff |x^2 + y^2 - 3| \leq 1$

$\iff -1 \leq x^2 + y^2 - 3 \leq 1$

$\iff 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$



7. Si $f(x, y) = \text{arctg } P(x, y)$, entonces $(x, y) \in \text{Dom}(f) \iff (x, y) \in IR^2$

4.1.4 Importancia de Conocer el Dominio de una Función real de dos Variables

Es importante conocer el dominio de una función $z = f(x, y)$, porque sobre ello se analizan y se calculan: el límite, la continuidad, la diferencibilidad y la integración.

Geométricamente, el dominio de la función $f(x, y)$, es una **REGIÓN** abierta o cerrado contenido en IR^2.

PROBLEMAS

Haĺlar el dominio de cada una de las siguientes funciones y graficarlo.

1. $f(x,y) = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 9)}$
2. $f(x,y) = \sqrt{x+y} - 3x\sqrt{x-y}$
3. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
4. $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$
5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$
6. $f(x,y) = \frac{1}{R - x^2 - y^2}$
7. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$
8. $f(x,y) = \text{Ln}(x-1)(y-1)$
9. $f(x,y) = \text{Ln}(y^2 - 4x + 8)$
10. $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\text{Ln}(1 - x^2 - y^2)}$
11. $z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$
12. $z = x\,y\sqrt{\text{Ln}\frac{R^2}{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$
13. $z = \text{Ln}\left[x\,\text{Ln}(y - x)\right]$
14. $f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2 - x}{x^2 + y^2 - 25}}$.
15. $f(x,y) = \text{arc sen}\left(\frac{x}{y}\right)$
16. $f(x,y) = \sqrt{-(x-1)\,y}\ \text{Ln}(x - 4y^2)$
17. $f(x,y) = \text{arc cos}(4x^2 + 9y^2 - 35)$

18. $f(x,y)=\sqrt{x \operatorname{sen} y}$

19. $f(x,y)=\sqrt{xy\,(x^2+y^2-4)}$

20. $f(x,y)=\operatorname{arcsen} x+\operatorname{ar\,sen} y$

SOLUCIÓN

(1) $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff (4-x^2-y^2)(x^2+y^2-9) \geq 0$

Entonces el dominio de f es la región $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (4-x^2-y^2)(x^2+y^2-9) \geq 0\}$
Para graficar la región D se procede del siguiente modo:

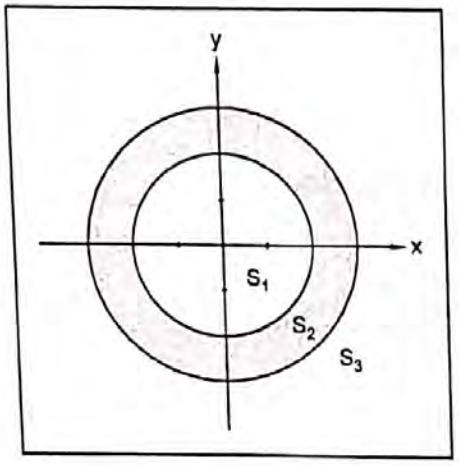
1° ***Graficar la FRONTERA de la región D.***

La frontera de la región D está definida por los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-9)=0 \iff 4-x^2-y^2=0 \quad \vee \quad x^2+y^2-9=0$$

$$x^2+y^2=4 \quad \vee \quad x^2+y^2=9$$

circunferencia de radio 2 ↑ ↑ *circunferencia de radio 3*



Las dos circunferencias (fronteras de D), dividen al plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ en tres regiones: S_1 , S_2 y S_3 (ver el gráfico)

2° Sombrear la región D.
Para ello, se elige un punto (x,y) de cada región S_1, S_2 , S_3 y se reemplaza en la desigualdad estricta:
$(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-9)>0$ .....(*)

Si $(x,y) \in S_1$ y satisface (*), entonces se sobrea S_1, caso contrario NO. De manera similar se procede con S_2 y S_3.

Por ejemplo :

a) $(0,0) \in S_1 \wedge (0,0)$ **NO** satisface (*), porque $(4)(-9)>0$ es **FALSO**. Entonces **NO** se sombrea S_1.

b) $(2.5,0) \in S_2 \wedge (2.5,0)$ satisface (*), porque $(4-6.25)(6.25-9)>0$ es **VERDADERO**. Luego, sombrear S_2.

c) $(4,0) \in S_3 \wedge (4,0)$ **NO** satisface (*) porque $(4-16)(16-9)>0$ es **FALSO**. Luego, **NO** sombrear S_3

(2) Por definición de dominio : $(x,y) \in \text{Dom}(f) \iff x+y \geq 0 \wedge x-y \geq 0$.
El domino de f, es la región $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0 \wedge x-y \geq 0\}$
Ahora, procedemos a graficar la región D.

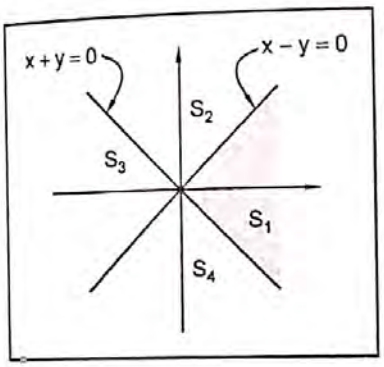
1° ***Graficar la FRONTERA de la región D.***

Frontera de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0 \ \wedge \ x-y=0\}$

RECTA L_1 — $x+y=0$; RECTA L_2 — $x-y=0$

2° ***Sombrear la región D :*** Se analiza la desigualdad estricta :

$(x+y>0 \ \wedge \ x-y>0)$ ..... (*)



Las rectas L_1 y L_2 dividen al **PLANO CARTESIANO** $\mathbb{R}^2$ en 4 regiones : S_1 , S_2 , S_3 y S_4 .

a) $(1,0) \in S_1$ y satisface (*), porque $(1>0 \ \wedge \ 1>0)$ es **VERDADERO**. Se sombrea S_1 .

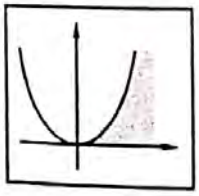
b) $(1,0) \in S_2$ y **NO** satisface (*), porque $(1>0 \ \wedge \ -1>0)$ es **FALSO**. No sombrear S_2 .

c) $(-1,0) \in S_3$ y **NO** satisface (*), porque $(-1>0 \wedge -1>0)$ es **FALSO**. Entonces **NO** sombrear S_3 .

d) $(0,-1) \in S_4$ y **NO** satisface (*), porque $(-1>0 \ \wedge \ 1>0)$ esl **FALSO**. Entonces **NO** sobrear S_4 .

De manera similar proceda en los siguientes problemas :

(3) 1° $(x,y) \in D_f \iff x - \sqrt{y} \geq 0$

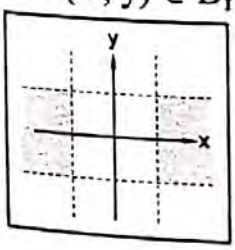


$\iff x \geq \sqrt{y}$

$\iff y \geq 0 \ \wedge \ x^2 \geq y$

(4) $(x,y) \in D_f \iff x+y>0 \ \wedge \ x-y>0$

(5) $(x,y) \in D_f \iff x^2-4>0 \ \wedge \ 4-y^2>0$



$\iff [x>2 \ \vee \ x<-2] \ \wedge \ [-2<y<2]$

(6) $(x,y) \in Df \iff R - x^2 - y^2 \neq 0$

$\iff R^2 - x^2 - y^2 > 0 \ \vee \ R^2 - x^2 - y^2 < 0$

(7) $1-x^2 \geq 0 \ \wedge \ 1-y^2 \geq 0$

(8) $(x-1)(y-1)>0$

(9) $y^2-4x+8>0$

(10) $4x-y^2\geq 0 \ \wedge \ 1-x^2-y^2>0$

(11) $\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}\geq 0 \ , \ x^2-2y+y^2\neq 0$

(12) $(x,y)\neq(0,0) \ \wedge \ x^2+y^2-R^2\geq 0$

(13) $x \operatorname{Ln}(y-x)>0$

$\Longleftrightarrow [x>0 \ \wedge \ \operatorname{Ln}(y-x)>0] \ \vee \ [x<0 \ \wedge \ \operatorname{Ln}(y-x)<0]$

$\Longleftrightarrow [x>0 \ \wedge \ y-x>1] \ \vee \ [x<0 \ \wedge \ 0<y-x<1]$

(14) $\frac{y^2-x}{x^2+y^2-25}\geq 0$

(15) $|\frac{x}{y}|<1 \iff -1<\frac{x}{y}<1$

(16) $-(x-1)y\geq 0 \ \wedge \ x-4y^2>0$

$(x-1)y\leq 0 \ \wedge \ x-4y^2>0$

(17) $-1\leq 4x^2+9y^2-35\leq 1$

(18) $x \operatorname{sen} y\geq 0$

(19) $xy(x^2+y^2-4)\geq 0$

(20) $|x|<1 \ \wedge \ |y|<1$

Ud. complete y grafique, siguiendo las pautas dadas .

4.1.5 Significado Geométrico de la Función Z = f (x , y).

Si el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ de la función $z = f(x,y)$ es un conjunto abierto o cerrado, la gráfica de la función f se define del siguiente modo:

$$Gr(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D \right\}$$

Sí trazamos los puntos (x , y, f (x , y)) en el espacio $\mathbb{R}^3$ obtendremos superficies de diferentes formas: unas conocidas y simples; otras complicadas, que para graficarlas es necesario usar las computadoras.

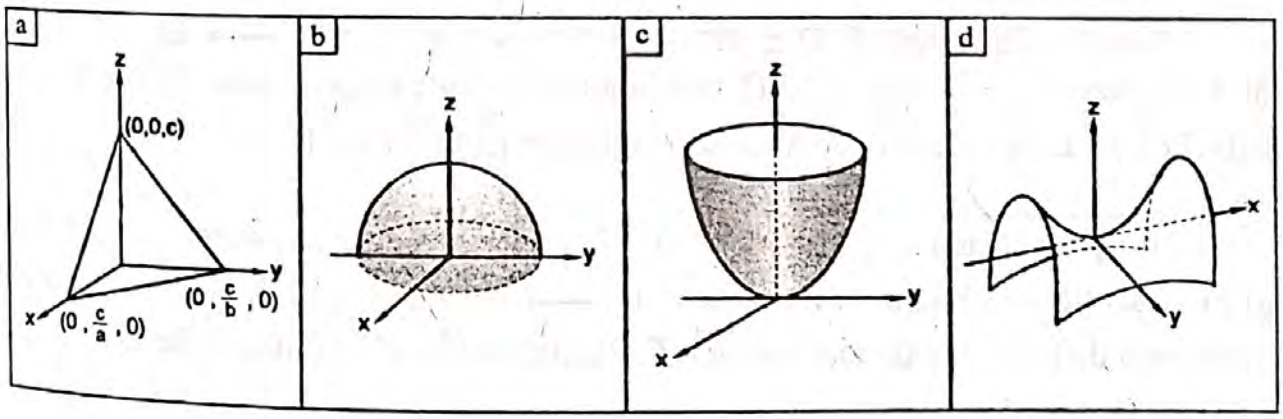
Algunas superficies sencillas son:

a) El plano : $z = -ax - by + c$, $z = f(x, y)$

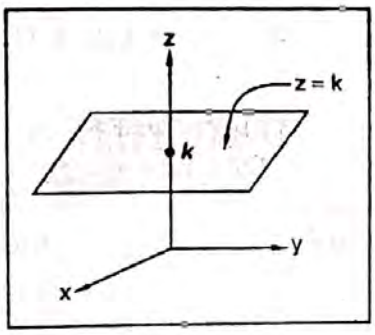
b) La semiesfera superior : $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, a = radio de la esfera .

c) El paraboloide $z = x^2 + y^2$

d) El paraboloide hiperbólico $f(x, y) = x^2 - y^2$



e) La función constante f (x , y) = k, $k \in \mathbb{R}$ es un plano paralelo al plano XY.



4.1.6 Operaciones con Funciones Reales con dos Variables.

Definición

Dado dos funciones $f: D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ y $g: E \subset IR^2 \longrightarrow IR$ con dominios $D = D_f$ y $E = Dg$, respectivamente; definimos :

a) $(f \pm g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \pm g(\vec{x})$, $\vec{x} = (x, y) \in D_f \cap D_g$

b) $(f \cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$, $\vec{x} = (x, y) \in D_f \cap D_g$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$, $\vec{x} = (x, y) \in D_f \cap D_g - \{\vec{x} : g(\vec{x}) = 0\}$

Nota: En base a éstas definiciones se halla el dominio de las funciones dado en los problemas anteriores de 1.4.

4.1.7 Composición de Dos Funciones.

Sean las funciones $f: D \subset IR^2 \longrightarrow E$ y $g: E \subset IR \longrightarrow IR$ tales que para cada $\vec{x} = (x, y) \in D$ la función f le hace corresponder $f(\vec{x}) \in E$ y para cada $f(\vec{x}) \in E$ la función g le hace corresponder $g(f(\vec{x})) \in IR$.

Si para cada $\vec{x} = (x, y) \in D$ le hacemos corresponder el elemento $g(f(\vec{x})) \in IR$ se obtiene la función $h: D \longrightarrow IR$ que recibe el nombre de función compuesta de f y g y se denota con g o f. Resulta entonces definida la función .

$$g \circ f : D \longrightarrow IR$$
$$\vec{x} \longrightarrow (g \circ f)(\vec{x})$$

donde $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$.

Nota: En general, el dominio de g o f se define así :

$$D_{g \circ f} = \left\{ \vec{x} \in IR^2 \ : \ \vec{x} \in D_f \ \wedge \ f(\vec{x}) \in D_g \right\}$$

Ejemplo: Dado $g(x) = \text{Ln}(4 - x^2)$ y $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y}$. Hallar g o f, si existe.

Solución:

Antes de analizar la composición g o f, hallemos el dominio de g y f, respectivamente.

Dominio de g:

$4 - x^2 > 0$

$x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$

$D_g = \langle -2 , 2 \rangle$

Dominio de f:

$D = \{ (x , y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y \geq 0 \}$

a) Dominio de g o f

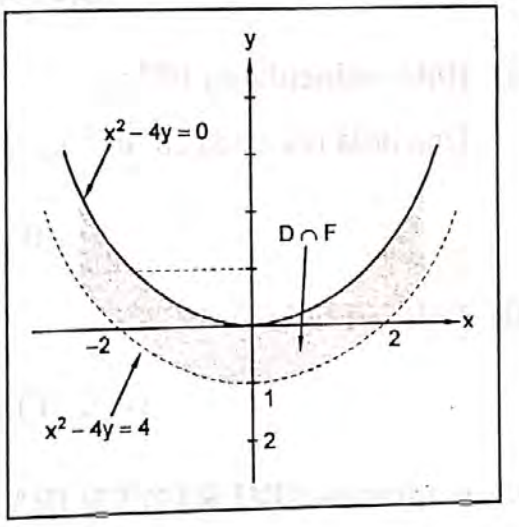
$$D_{g \circ f} = \underbrace{\vec{x} \in D_f}_{} \wedge f(\vec{x}) \in D_g$$

$$= D \wedge \sqrt{x^2 - 4y} \in \langle -2 , 2 \rangle$$

$$-2 < \sqrt{x^2 - 4y} < 2$$

$$0 < x^2 - 4y < 4$$

$$\underbrace{x^2 - 4y < 4}_{F}$$



$= D \cap F =$ es la franja sombreada del gráfico.

b) Regla de correspondencia de g o f

$$(g \circ f)(x , y) = g(f(x , y))$$

$$= g\left(\sqrt{x^2 - 4y} \right) = \text{Ln}\left[4 - \left(\sqrt{x^2 - 4y} \right)^2 \right] = \text{Ln}(4 - x^2 + 4y)$$

4.2 BOLA ABIERTA, BOLA REDUCIDA, BOLA CERRADA, CONJUNTO ABIERTO, CONJUNTO CERRADO.

a) Distancia entre dos puntos:

Dado dos puntos $P = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ y $Q = (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$ de IR^n, la distancia de P a Q es el número real no negativo :

$$d(P , Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

b) Bola abierta en IR^n :

Una bola abierta de centro en el punto $C \in IR^n$ y radio $r > 0$, es el conjunto

$$B(c , r) = \{ P \in IR^n : d(C , P) < r \}$$

c) Bola reducida en IR^n :

Una bola reducida en IR^n es una bola abierta sin centro, esto es,

$$B'(C , r) = B(C , r) - \{ C \}$$

d) Bola cerrada en IR^n

$$\overline{B}(C , r) = \left\{ P \in IR^n : d(C , P) \leq r \right\}$$

e) Conjunto ABIERTO EN IR^n

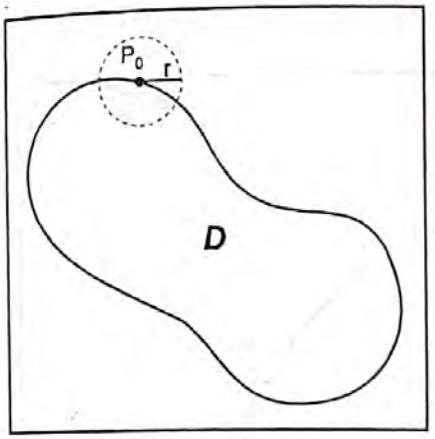
Un conjunto $A \subset IR^n$ es abierto en IR^n si, y sólo si para todo $\vec{x} \in A$, existe $r > 0$ al que $B(\vec{x} , r) \subset A$.

f) Conjunto cerrado en IR^n .

Diremos que un conjunto $A \subset IR^2$ es cerrado si, y sólo si el complemento de A es abierto en IR^n . Estas definiciones son las mismas que se han dado en el espacio IR^2 .

g) Punto de acumulación de un conjunto $D \subset IR^2$

Diremos que $P_0 \in IR^2$ es un punto de acumulación del conjunto D, si toda bola reducida $B'(P_0 , r)$ contiene puntos del conjunto D, esto es, $B'(P_0 , r) \cap D \neq \phi$.



Ejemplo: Los puntos de las fronteras de una región D son puntos de acumulación del conjunto D. Sus puntos interiores también lo son .

4.3 LIMITE

Definición

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y (x_0, y_0) un punto de acumulación del dominio D, Diremos que el número real L es el limite de la función $f(x,y)$ cuando (x,y) se acerca al punto (x_0, y_0), si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que :

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad (x,y) \in D \ \wedge \ 0 < \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$

Notación:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ , tal que,}$$

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{s.q.} \quad (x,y) \in Df \ \wedge \ 0 < \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$

Donde:

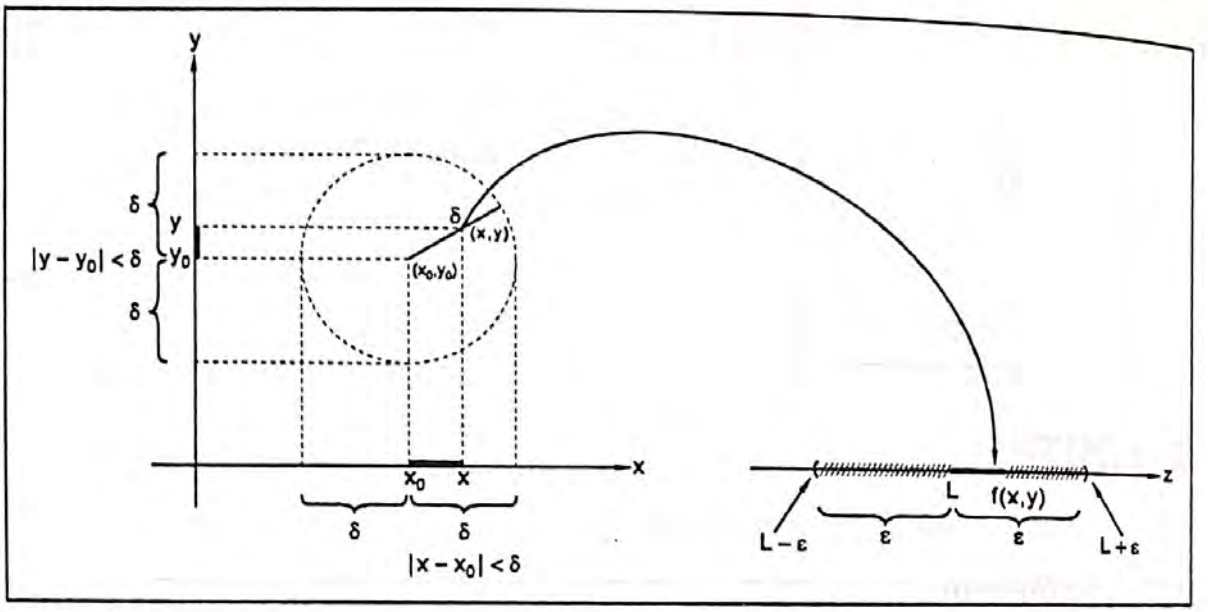
a) $0 < \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta \iff 0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \iff \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \| < \delta^2}$

círculo de centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$, sin considerar el centro.

Pues : $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

b) **DE LA DESIGUALDAD** $0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta$ obtenemos que:
$0 < |x - x_0| < \delta \ \wedge \ 0 < |y - y_0| < \delta.$

Ver Gráfico:



c) $|f(x,y) - L| < \varepsilon \iff f(x,y) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$

4.3.1 Propiedades de los Límites

TEOREMA Si f y g son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{\vec{x} \to a} f$ y $\lim_{\vec{x} \to a} f$ existen y si a es un punto de acumulación de $D_f \cap D_g$, entonces.

1. $\lim_{\vec{x} \to a} (f \pm g) = \lim_{\vec{x} \to a} f \pm \lim_{\vec{x} \to a} g$

2. $\lim_{\vec{x} \to a} (f\, g) = [\lim_{\vec{x} \to a} f][\lim_{\vec{x} \to a}\ ]$

3. $\lim_{\vec{x} \to a} \left[\frac{f}{g}\right] = \frac{\lim_{\vec{x} \to a} f}{\lim_{\vec{x} \to a} g}$, si $\lim_{\vec{x} \to a} g \neq 0$

La demostración de este teorema es similar a las dadas en el curso de Análisis I.

4.3.2 Regla de las Dos Trayectorias

TEOREMA Sea la función $f: D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ y (x_0, y_0) un punto de acumulación de D = dominio de f.

Si dos trayectorias, digamos $\alpha(t) = (x(t), y(t)$ y $\beta(t) = (x(t), y(t))$ que pasan por $(x_0, y_0) = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$ producen dos valores límites diferentes para f, entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.

Contrariamente:

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff$ Para toda trayectoria $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ que pasa por (x_0, y_0), esto es $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)) = L$$

Ejemplo 1 Analizar $\lim_{(x,y)\to(c,c)} \text{Ln}\left[\frac{c-x}{c-y}\right]$ donde $x < c$, $y < c$

Solución:

Elegir dos trayectorias (caminos) que pasen por (c,c), digamos:

C_1: $y - c = 2(x - c)$ *recta de pendiente 2*

$y = 2x - c$

C_2: $y - c = 3(x - c)$ *recta de pendiente 3*

$y = 3x - 2c$

Hacer los cálculos para cada camino:

Camino C_1:

$$\lim_{x\to c} \text{Ln}\left[\frac{c-x}{c-2x+c}\right] = \lim_{x\to c} \text{Ln}\left[\frac{c-x}{2(c-x)}\right] = \lim_{x\to c} \text{Ln}\left[\frac{1}{2}\right] = -\text{Ln}\,2$$

Camino C_2

$$\lim_{x\to c} \text{Ln}\left[\frac{c-x}{c-3x+3c}\right] = \lim_{x\to c} \text{Ln}\left[\frac{c-x}{3(c-x)}\right] = \lim_{x\to c} \text{Ln}\left[\frac{1}{3}\right] = -\text{Ln}\,3$$

No existe $\lim_{(x,y)\to(c,c)} \text{Ln}\left[\frac{c-x}{c-y}\right]$, por ser los límites diferentes

Ejemplo 2 Estudiar el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

Solución:

Si nos acercamos al punto (0,0) por una familia de rectas del tipo y = kx obtenemos :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k^3x^3}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k^3x^3}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{k^3x}{1+k^2} = 0,$$ para todo $k \in \text{IR}$. ¿Que dice este resultado?. Lo que nos dice es que si tal límite existe, éste debe ser cero. La única garantía de afirmar que el límite existe y es cero, es cumplir la definición:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0 \iff (\forall\,\varepsilon>0)\ (\exists\,\delta>0) \text{ tal que}$$

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \ \wedge\ (x,y)\in D_f \Rightarrow \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$$

Búsqueda de δ en términos de ε

Partir de $\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|$ y acotar, siempre que $|x|<\delta \ \wedge\ |y|<\delta$.

Veamos:

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| < \frac{|y|^3}{|y|^2} = |y| < \delta$$

Haciendo $\delta = \varepsilon$ se tiene : $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$

4.3.3 Cálculo de Límites Aplicando Coordenadas Polares

PROPOSICIÓN Si $\varphi(\theta)$ es una función acotada (en alguna bola con centro en el origen) y $\psi(r)$ es una función que tiende a cero cuando r tiende a cero, entonces $\lim_{r\to 0} g(r,\theta) = \lim_{r\to 0} [\varphi(\theta)\,\psi(r)] = 0$

Ejemplo 3 Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

Solución:

(Reemplazar $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $x^2+y^2 = r^2$).

Decir que $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ equivale a decir que (en coordenadas polares) $r \longrightarrow 0$ (independientemente del valor de θ).

Por tanto :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} [\underbrace{r}_{\psi(r)}\ \underbrace{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}_{\varphi(\theta)}] = 0$$

En este caso $\varphi(\theta) = \cos\theta\,\text{sen}^2\theta$ está acotado en la bola de centro en el origen, esto es: $|\cos\theta\,\text{sen}^2\theta| \le 1$.

Ejemplo 4 Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\text{Ln}(x^2+y^2)}$

Solución:

Aplicando coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $x^2+y^2 = r^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\text{Ln}\,r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{2\,\text{Ln}\,r} = 0$$

PROBLEMAS

PROBLEMA 1 Verificar que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x+y^2) = 5$

Demostración:

Paso 1 ***Por definición de límite tenemos:***

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x+y^2) = 5 \iff (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)\text{, tal que:}$$

$$|(x+y^2) - 5| < \varepsilon \quad \text{s.q} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 < \|(x,y) - (1,2)\| < \delta$$

Paso 2 ***Búsqueda de δ en función de ε.***

a) Para ello, definimos: $0 < \|(x,y) - (1,2)\| < \delta \iff \|(x-1, y-2)\| < \delta$

$$\iff 0 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$$

es un circulo de radio δ y centro en (1,2) sin incluir el centro

De la desigualdad : $\|(x-1, y-2\| < \delta$ podemos deducir que :
$0 < |x-1| < \delta \ \wedge\ 0 < |y-2| < \delta$

Ver el gráfico.

b) En el valor absoluto $G(x,y) = |(x+y^2) - 5|$ hagamos la siguiente SUSTITUCIÓN:

$G(x-1, y-2) = |(x-1) + (y-2)^2 - 5|$ ..... (*)

c) Ahora, tratemos de hacer la siguiente igualdad : $G(x,y) = G(x-1, y-2)$

Para ello, desarrollar y simplificar la expresión en $G(x-1, y-2)$.

Veamos :

$$|(x-1) + (y-2)^2 - 5| = |\textcircled{x} - 1 + \textcircled{y^2} - 4y + 4 - \textcircled{5}|$$

$$= |(x + y2 - 5) + (-1 - 4y + 4)|$$

$$G(x-1, y-2) = |\underbrace{(x+y^2-5)}_{G(x,y)} + \underbrace{(-4y+3)}_{\text{TÉRMINO SOBRANTE}}|$$

Para que $G(x-1, y-2)$ sea igual a $G(x,y)$, debemos sumar algebraicamente en $G(x-1, y-2)$ el opuesto aditivo del término sobrante $(-4y+3)$.

Así tendremos; en (*) :

$$|(x-1)+(y-2)^2-5-(-4y+3)| = |(x-1)+(y-2)^2+4y-8|$$
$$= |(x-1)+(y-2)^2+4(y-2)|$$

En consecuencia, ya tenemos que :

$$|x+y^2-5| = |(x-1)+(y-2)^2+4(y-2)| \le |x-1|+|y-2|^2+4|y-2| \quad \ldots\ldots (**)$$

d) Hagamos $|y-2| < \delta \le 1 \Rightarrow |y-2| \le 1$

δ auxiliar

Entonces, sí :
$$\begin{cases} |y-2| < \delta \\ |y-2| \le 1 \end{cases}$$

MULTIPLICANDO $\quad |y-2|^2 \le \delta$

e) Así, obtenemos de (**):

$$|x+y^2-5| \le |x-1|+|y-2|^2+4|y-2| \le \delta+\delta+4\delta = 6\delta$$
$$\Leftrightarrow \quad |x+y^2-5| \le 6\delta$$

f) Haciendo $\quad 6\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{1}{6}\varepsilon$

g) Escoger : $\quad \delta = \min\{1, \varepsilon/6\}$

δ auxiliar.

PROBLEMA 2 Verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)} (xy+3y) = 0$

Demostración

Paso 1 ***Por definición de límite tenemos:***

$$\lim_{(x,y)\to(-3,2)} (xy+3y) = 0 \iff (\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\text{, tal que, } |xy+3y-0| < \varepsilon \text{ s.q.}$$

$$(x,y) \in Df \ \wedge\ 0 < \underbrace{\|(x,y)-(-3,2)\| < \delta}$$

$$0 < \| x+3\,,\, y-2 \| < \delta$$

Paso 2 ***Búsqueda de δ en función de ε***

a) De $G(x,y) = |xy+3y|$ obtenemos :

$$G(x+3\,,\,y-2) = |(x+3)(y-2)+3(y-2)| \quad \ldots\ldots (*)$$

b) Desarrollar $G(x+3\,,\,y-2) = |\,(xy) - 2x + (3y) - 6 + 3y - 6|$

$$|\underbrace{xy+3y}_{G(x,y)} + \underbrace{(-2x+3y-12)}_{\text{TERMINO SOBRANTE}}|$$

c) Sumando en $(*)$ el opuesto aditivo del término sobrante, obtenemos :

$$|xy+3y| = |(x+3)(y-2)+3(y-2)-(-2x+3y-12)|$$
$$= |(x+3)(y-2)+2x+6| \le |(x+3)|\,|(y-2)|+2|(x+3)|$$

d) De la desigualdad $\|(x+3\,,\,y-2)\| < \delta$ obtenemos que $\begin{cases} |x+3| < \delta \\ \wedge \\ |y-2| < \delta \end{cases}$

Haciendo $\delta \le 1 = \delta_1$, tenemos que $|y-2| < \delta \le 1 \Rightarrow |y-2| \le 1$

Multiplicando las desigualdades $|x+3| < \delta \wedge |y-2| \le 1$, obtenemos

$$|x+3|\,|y-2| \le \delta$$

e) Por la desigualdad triangular obtenemos que :

$$|xy+3y| = |(x+3)(y-2)+2(x+3)| \le |x+3\|y-2|+2|x+3|$$
$$\le \quad \delta \quad + 2\delta \quad = 3\delta$$

f) O sea $|xy+3y| < 3\delta$

Haciendo $3\delta = \varepsilon \iff \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ elegimos $\delta = \text{mín}\,\{\,1\,,\,\varepsilon/3\,\}$.

PROBLEMA 3

a) Demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$

b) Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^3-y^3)}{x^2+y^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, \delta > 0$ tal que

$\left| \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ siempre que $|x| < \delta \ \wedge\ |y| < \delta\ ,\ (x,y) \neq (0,0)$

Búsqueda de δ en términos de ε

Partir de : $\left| \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \right| = \dfrac{|x-y||x^2+xy+y^2|}{|x^2+y^2|} = |x-y| \left| 1 + \dfrac{xy}{x^2+y^2} \right|$

$$\leq (|x|+|y|)\left(1 + \frac{|x||y|}{x^2+y^2} \right)$$

como: $|x| < \delta \ \wedge\ |y| < \delta$ entonces : $< 2\delta \left(1 + \dfrac{|x||y|}{x^2+y^2} \right)$

$\uparrow$ (1)

Debemos acotar (1) :

Esto se logra a partir de $(|x| - |y|)^2 \geq 0$

$$|x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$$

$$\frac{1}{|x|^2+|y|^2} \leq \frac{1}{2|x||y|}$$

Multiplicar por $|x|\ |y|$: $\dfrac{|x||y|}{|x|^2+|y|^2} \leq \dfrac{|x||y|}{2|x||y|} = \dfrac{1}{2}$

Volver a (1) : $2\delta \left[1 + \dfrac{|x||y|}{x^2+y^2} \right] < 2\delta \left[1 + \dfrac{1}{2} \right] = 3\delta.$

Por lo tanto : $\left|\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| < 3\delta$

Hacer $\quad 3\delta \le \varepsilon \;\Rightarrow\; \delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^3-y^3)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{1-\cos^2(x^3-y^3)}}{[1-\cos(x^3-y^3)][1+\cos(x^3-y^3)]}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Sen}^2(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)[1+\cos(x^2+y^2)]} \quad , \text{ aplicar } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = 0$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{Sen}^2(x^3-y^3)}{(x^3-y^3)^2}}_{1} \cdot \frac{(x^3-y^3)^2}{(x^2+y^2)[1+\cos(x^2+y^2)]}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)^2}{(x^2+y^2)\underbrace{[1+\cos(x^2+y^2)]}_{2}} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-y^3)^2}{x^2+y^2}}_{0} = 0$$

El cálculo del $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^3-y^3)}{x^2+y^2}$ se puede hacer eligiendo dos caminos que pasen por $(0,0)$.

PROBLEMA 4 Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$

a) ¿Cuál es el $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} f(x,y)$?

b) Usando ε y δ, demostrar el límite hallado en a)

c) ¿Es f continua en $(3,-1)$? Justificar.

Solución:

a) Como f es una función polinómica en dos variables x, y; existe límite para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

i) Elegir el camino $C_1 = \{ (x,y) / y = -1 \}$

Entonces, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to -1}} f(x,y) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 1 - 4x - 2)$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 - 4x - 1) = -4$$

ii) Elegir el camino $C_2 = \{ (x,y) / x = 3 \}$

Entonces , $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to -1}} f(x,y) = \lim\limits_{y \to -1} (9 + y^2 - 12 + 2y)$

$$= \lim_{y \to -1} (y^2 + 2y - 3) = -4$$

Luego, $\lim\limits_{(x,y) \to (3,-1)} f(x,y) = -4$

b) $\lim\limits_{(x,y) \to (3,-1)} f(x,y) = -4$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$|x^2 + y^2 - 4x + 2y - (-4)| < \varepsilon$ Siempre que $|x - 3| < \delta \ \wedge \ |y + 1| < \delta$ con $(x,y) \neq (3, -1)$.

Búsqueda de δ en función de ε

Partir de $|x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4|$ y empezar a "acotar" siempre buscando que aparezcan los términos $|x - 3|$ y $|y + 1|$. Esto se obtiene con facilidad si en la función $G(x,y) = |x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4|$ sumamos y restamos términos que nos permitan construir las funciones $(x - 3)$ y $(y + 1)$.

Veamos:

$$|x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + 2x - 6| \longleftarrow \text{es igual a } G(x,y)$$

$$|(x-3)^2 + (y+1)^2 + 2(x-3)|$$

Ahora, aplicamos la propiedad triangular:

$$|(x-3)^2 + (y+1)^2 + 2(x-3) \leq \underbrace{|x-3|^2 + |y+1|^2 + 2|x-3|}_{(*)}$$

Ahora, acotamos en (*) de modo que esté expresada sólo en términos de δ

i) Hacer : $|x-3| \leq \delta \leq 1$

Luego, si $|x-3| \leq 1 \ \wedge \ |x-3| \leq \delta \ \Rightarrow \ |x-3|^2 \leq \delta$

ii) Hacer : $|y+1| \leq \delta \leq 1$

Luego, si $|y+1| \leq 1 \ \wedge \ |y+1| \leq \delta \ \Rightarrow \ |x+1|^2 \leq \delta$

En consecuencia (*) es $\leq \delta + \delta + 2\delta = 4\delta$

Hacer $4\delta = \varepsilon \ \Rightarrow \ \delta = \frac{1}{4}\varepsilon$ y elegir $\delta = \min\{1, \frac{1}{4}\varepsilon\}, \forall \varepsilon > 0$

c) Como $f(3,-1) = \lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} f(x,y)$ ..... por (a)

donde $f(3,-1) = -4$, afirmamos que $f(x,y)$ es continua en $(3,-4)$. En general, toda función polinómica $f(x,y)$ es continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Es decir el polinomio $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

PROBLEMA 5 Analizar la existencia del siguiente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{x^2 + y^2}$

Solución:

En primer lugar, calcular el límite :

Por la presencia de la función $\tan(x^2 y)$ y porque el límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$, se debe usar el límite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2 y)}{x^2 y} = 1 \qquad \textit{(que es consecuencia de } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \textit{)}$$

Veamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\tan(x^2 y)}{x^2 y}}_{\to 1} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

este límite lo calculamos por caminos que pasen por (0,0). Por ejemplo : $y = mx$, $m \neq 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 (mx)}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m x^3}{(1+m^2)x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0 \quad , \quad m \in \mathbb{R} \quad , \quad m \neq 0$$

En segundo lugar, probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$ siempre que $|x| < \delta \ \wedge \ |y| < \delta$, $(x,y) \neq (0,0)$

Acotar : $\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| < \frac{|x|^2 |y|}{|x^2|} < |y| < \varepsilon$, entonces $\delta = \varepsilon$. Queda probado que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0$.

PROBLEMA 6 Demostrar que existe el siguiente límite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^4 + y^4 + z^4}$$

Sugerencia: usar $(a-b)^2 \geq 0$

Solución:

Aplicar el teorema del Sandwich: Si $\mu(x,y,z) \le \dfrac{x^2 y^2 z^2}{x^4+y^4+z^4} \le v(x,y,z)$, si existen y son iguales los límites : $\lim\limits_{(x,y,2)\to(0,0,0)} \mu(x,y,z) = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} v(x,y,z) = L$

entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 y^2 z^2}{x^4+y^4+z^4} = L$.

Para ello, debemos buscar las funciones $\mu(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$.

En este problema: $\mu(x,y,z) = 0$, porque $0 \le \dfrac{x^2 y^2 z^2}{x^4+y^4+z^4}$, $\forall\,(x,y,z) \ne (0,0,0)$

Buscar la función $v(x,y,z)$:

$$(x^2-y^2)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x^4+y^4 \ge 2x^2y^2$$
$$(x^2-z^2)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x^4+z^4 \ge 2x^2z^2$$
$$(y^2-z^2) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad y^4+z^4 \ge 2y^2z^2$$
$$2(x^4+y^4+z^4) \ge 2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$$

$$\frac{1}{x^4+y^4+z^4} \le \frac{1}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2} \le \frac{1}{x^2y^2}$$

En : $\dfrac{1}{x^4+y^4+z^4} \le \dfrac{1}{x^2y^2} \Rightarrow \dfrac{x^2y^2z^2}{x^4+y^4+z^4} \le \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2y^2}$, $(x,y,z) \ne (0,0,0)$

$$\boxed{0 \le \frac{x^2y^2z^2}{x^4+y^4+z^4} \le z^2}$$

Aplicar límite : $\underbrace{\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0}_{0} \le \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^4+y^4+z^4} \le \underbrace{\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} z^2}_{0}$

$\therefore \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^4+y^4+z^4} = 0$.

PROBLEMA 7

a) Demostrar que no existe el siguiente límite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y}$$

b) Usando la definición de límite, demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+2}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Solución:

a) Busquemos dos caminos que pasen por $(0,0)$, por ejemplo $y = x^2$ y $y = -x^2 + x^3$

i) Calcular el límite con el camino $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} \quad , \quad x \neq 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x = 0$$

ii) Calcular el límite con el camino $y = -x^2 + x^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Como se puede apreciar, para dos caminos diferentes se obtienen límites diferentes, lo cual implica que no existe el indicado límite.

b) Por definición de límite se tiene: $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tal que:

$$\left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+2}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \right| < \varepsilon \text{ Siempre que } |x| < \delta \ , \ |y| < \delta, \text{ con } (x,y) \neq (0,0)$$

La demostración consiste en hallar δ en términos de ε

Vamos:

$$\left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+2}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \right| = \left| \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+2}+\sqrt{2}\right)} - 2\sqrt{2} \right| =$$

$$= \left| \sqrt{x^2+y^2+2}-\sqrt{2} \right| = \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+2}+\sqrt{2}} \right|$$

RACIONALIZAR

Ahora, acotamos:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2}+\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \forall\,(x,y)\in \mathbb{R}^2$$

Multiplicar ambos miembros por " x^2+y^2 "

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+2}+\sqrt{2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Tomando como hipótesis:

$$|x|<\delta \Rightarrow |x|^2<\delta^2 \quad , \quad |x|^2=x^2$$
$$|y|<\delta \Rightarrow |y|^2<\delta^2 \quad , \quad |y|^2=y^2$$
$$\overline{|x|^2+|y|^2<2\delta^2}$$

Entonces en (*) se acota: $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}} < \frac{2\delta^2}{\sqrt{2}}$.

Hacer: $\frac{2\delta^2}{\sqrt{2}}=\varepsilon \Rightarrow \delta^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon \Rightarrow \delta=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon}$, $\forall\ \varepsilon>0$.

PROBLEMA 8

a) Demostrar usando la definición de límite que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

b) Probar que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2-x^2}{x^2-y^2}$ no existe.

Solución:

a) Por definición de límite:

$(\forall\ \varepsilon>0)\ (\exists\ \delta>0)$ tal que $\left|(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-0\right|<\varepsilon$ Siempre que : $|x|<\delta$,

$|y|<\delta,\ (x,y)\neq(0,0)$

Búsqueda de δ en términos de ε

Partir de: $\left|(x+y)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x+y|\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ y acotar

1. Se sabe que $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

2. Por $|x+y|$: $|x+y|\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x+y|$

3. Pero: $|x+y| \leq |x|+|y| < \delta+\delta = 2\delta$

4. Hacer $2\delta \leq \varepsilon \iff \delta \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

b) Para probar que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2-x^2}{x^2-y^2}$ no existe, se debe buscar dos caminos adecuados que pasen por $(0,0)$ y que nos permitan hallar límites diferentes :

Con el camino: $y = -2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x(-2x)^2-x^2}{x^2-4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-8x-1)}{-3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Con el camino : $y = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} (-1) = -1$$

Como los límites son diferentes, afirmamos que no existe el indicado límite.

PROBLEMA 9 Demostrar que no existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

Solución:

Buscar dos caminos diferentes que pasen por $(0,0)$ y que nos permitan hallar dos límites diferentes. Un camino puede ser : $y = 0$, se obtiene $\lim\limits_{x\to 0} f = 0$. Otro camino puede ser: $x = y^2$, se obtiene $\lim\limits_{y\to 0} f = \frac{1}{8}$.

PROBLEMA 10

Demostrar usando la definición de límite, lo siguiente. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[x+\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right]=0$

Demostración:

$(\forall\ \varepsilon>0)\ (\exists\ \delta>0)$ tal que $\left|x+\frac{x^3y}{x^4+y^2}-0\right|<\varepsilon$ siempre que $|x|<\delta,\ |y|<\delta$

$(x,y)\neq(0,0)$

Búsqueda de δ en términos de ε

Partir de: $\left|x+\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right|=\left|\frac{x(x^4+y^2)+x^3y}{x^4+y^2}\right|=|x|\left|\frac{x^4+y^2+x^2y}{x^4+y^2}\right|$ ..... (1)

Pero: $|x|<\delta$, faltaría acotar : $\left|\frac{x^4+y^2+x^2y}{x^4+y^2}\right|$ ..... (2)

Veamos:

$$\left|\frac{x^4+y^2}{x^4+y^2}+\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|\leq 1+\left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|=1+\frac{x^2|y|}{x^4+y^2}$$

Pero : $(x^2-|y|)^2\geq 0 \iff x^4+y^2\geq 2x^2|y|$

$$\iff \frac{1}{x^4+y^2}\leq\frac{1}{2x^2|x|}$$

Volver a (2) : $\leq 1+\frac{x^2|y|}{2x^2|y|}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Volver a (1) : $|x|\left|\frac{x^4+y^2+x^2y}{x^4+y^2}\right|\leq\delta\left(\frac{3}{2}\right)$

Hacer : $\delta\left(\frac{3}{2}\right)\leq\varepsilon \Rightarrow \delta\leq\frac{2}{3}\varepsilon$

PROBLEMA 11 ¿ Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$?

Justifique su respuesta.

Solución:

Cuando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ el límite es $L = \frac{2}{5}$ ¿cómo se justifica? se justifica aplicando la definición de límite :

$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)$ tal que si, $|x| < \delta \ \wedge\ |y| < \delta$, con $(x,y) \neq (0,0)$.

entonces $\left| \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} - \dfrac{2}{5} \right| < \varepsilon$

Búsqueda de δ en términos de ε

$$\left| \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} - \frac{2}{5} \right| = \left| \frac{5xy-6x+3y-2x^2-2y^2}{5(x^2+y^2-2x-4y+5)} \right|$$

$$= \frac{|2x^2+2y^2-5xy+6x-3y|}{5|x^2+y^2-2x-4y+5|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Debemos acotar el numerador y el denominador adecuadamente, de modo que sea un número positivo en términos de δ .

a) En el denominador se completa cuadrados y se obtiene:

$\dfrac{1}{|(x-1)^2+(y-2)|^2} \leq \dfrac{1}{|x-1|^2} \leq 4 \longleftarrow$ *COTA* ; Sí hacemos : $|x| \leq \frac{1}{2}$

obtenemos: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x-1 \leq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \geq -(x-1) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq -\frac{1}{(x-1)} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|^2} \leq 4$$

b) En el numerador:

$$|2x^2 + 6x + 2y^2 - 3y - 5xy| = |2x(x+3) + y(2y-3) - 5xy|$$

$$\leq 2|x||x+3| + |y||2y-3| + 5|x||y| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si hacemos : $|x| \leq \frac{1}{2} \ \wedge \ |y| \leq \frac{1}{2}$

Obtenemos : $|x+3| \leq \frac{7}{2} \ \wedge \ |2y-3| \leq 4$

Luego, en (2) : $\leq 2\delta(\frac{7}{2}) + \delta(4) + 5\delta(\frac{1}{2}) = \frac{27}{2}\delta$

Volver a (1) : $\leq \frac{1}{5}.\frac{27}{2}\delta \cdot 4 = \frac{54}{5}\delta \cdot$ Hacer $\frac{54}{5}\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{5}{54}\varepsilon$ y elegir $\delta = \min\left\{1/2 \ , \ \frac{5}{54}\varepsilon\right\}$

PROBLEMA 12

Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(6x^3y^3)}{x^4+7y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \quad , & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Demostrar que existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$

b) Redefinir la función de modo que $f(x,y)$ resulte continua en el plano.

Solución:

a) Aplicar el teorema: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{Sen}\mu(x,y)}{\mu(x,y)} = 1$. Para ello, multiplicar y dividir por $6x^3y^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(6x^3y^3)}{6x^3y^3} \cdot \frac{6x^3y^3}{x^4+7y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}$$

Este, último límite, lo calculamos por caminos :

i) Si $y = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^3x^3}{x^4+7x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^6}{8x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{4} = 0$$

ii) Si $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^3\cdot x^6}{x^4+7x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^9}{x^4(1+7x^8)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^5}{1+7x^8}=\frac{0}{1}=0$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}=0 \iff \forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$ tal que $\left|\dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}\right|<\varepsilon$ siempre que $|x|<\delta \ \wedge\ |y|<\delta$, con $(x,y)\neq(0,0)$

Búsqueda de δ en términos de δ

Empecemos a acotar: $\left|\dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}\right| = |6x^3y^3|\dfrac{1}{(x^4+7y^4)}$

Pero:

$(x^2-\sqrt{7}\,y^2)^2\geq 0 \iff x^4+7y^4-2\sqrt{7}\,x^2y^2\geq 0 \Leftrightarrow x^4+7y^4\geq 2\sqrt{7}\,x^2y^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^4+7y^4}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{7}x^2y^2}$. Multiplicar por $|6x^3y^3|$:

$$\frac{|6x^3y^3|}{x^4+7y^4}\leq\frac{|6x^3y^3|}{2\sqrt{7}x^2y^2}=\frac{6}{2\sqrt{7}}|x||y|<\frac{3}{\sqrt{7}}\delta\delta=\frac{3}{\sqrt{7}}\delta^2\ .$$

Escoger $\varepsilon=\dfrac{3}{\sqrt{7}}\delta^2 \Rightarrow \delta=\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}}{3}\varepsilon}\ ,\ \forall\,\varepsilon>0$.

En consecuencia, afirmamos que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe y dicho límites es cero.

b) En el problema se tiene que $f(0,0)=1$ y el resultado obtenido en a) es $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Lo cual hace de f una función discontinua en $(0,0)$. Pero si definimos la función haciendo $f(0,0)=0=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, obtenemos :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(6x^3y^3)}{x^4+7y^4}\ , & \text{si}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & \text{si}\,(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Donde : *i)* $\dfrac{\operatorname{sen}(6x^3 y^3)}{6x^3 y^3}$ es continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

ii) $\dfrac{1}{x^4+7y^4}$ es continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Por lo tanto, $\dfrac{\operatorname{sen}(6x^3 y3)}{x^4+7y^4}$, es continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

y $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(6x^3 y^3)}{x^4+7y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \end{cases}$

es continua en $\mathbb{R}^2$ (plano) .

4.4 CONTINUIDAD

Definición 1.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es continua en el punto $(x_0, y_0) \in D =$ dominio de f, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ siempre que $(x,y) \in D \wedge \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$.

Definición 2.

La función $f(x,y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in D_f =$ dominio de f, si :

i) $f(x,y)$ está definido en (x_0, y_0). Es decir $f(x_0, y_0)$ es un número real que está en el rango de f.

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe . Esto es, el límite es un número real único.

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

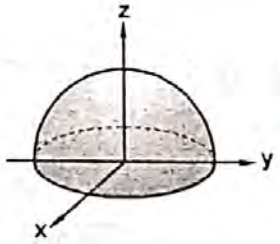
4.4.1 Significado Geométrico

Como la función $z = f(x,y)$ es una superficie en el espacio tridimensional IR^3, decir que f es continua en su dominio indica que la superficie no tiene agujeros, ni rajaduras.

Ejemplos:

a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $D_f : x^2 + y^2 \leq 4$

f es continua en su dominio.



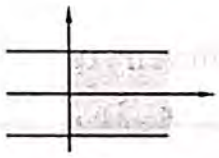
b) Si $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esta función no es continua en el punto $(0,0)$. Geométricamente la superficie tiene un agujero en el punto $(0,0)$.

c) $f(x,y) = \text{Ln}(x + y - 1)$. Es continua para todo (x,y) tal que $x + y - 1 > 0$

d) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$ es continua para todo (x,y,z) tal que $x^2 + y^2 - z^2 \neq 0$

e) $f(x,y) = \sqrt{x}\ e^{\sqrt{1 - y^2}}$



Df: $x \geq 0 \ \wedge \ 1 - y^2 \geq 0$

$x \geq 0 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1$

Para evitar alguna dificultad, la continuidad se define en regiones abiertas. En este caso, f es continua en $(x,y) : x > 0 \ \wedge \ -1 < y < 1$.

PROBLEMA 1

Investigue si la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\text{Ln}(x^2 + y^2)} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

es continua o no en $(0,0)$.

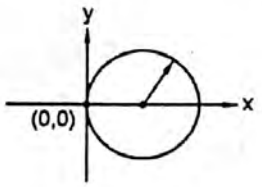
Solución:

i) $f(0,0) = 0$

ii) Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Elegir adecuadamente dos trayectoria que pasen por $(0,0)$.

a) $\mathcal{C}_1 : \quad x^2 + y^2 = 2x \quad , \quad x \in [0,2]$

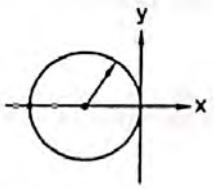


$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \to \pi$$

$$\lim_{t\to\pi} \frac{2(1+\cos t)}{\operatorname{Ln}(1+\cos t)} = 0$$

Por L'HOPITAL

$\mathcal{C}_2 : \quad x^2 + y^2 = -2x \quad , \quad x \in [-2, 0]$



$$\begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \to 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-2(-1+\cos t)}{\operatorname{Ln}(-1+\cos t)} = 0$$

Por L'HOPITAL

Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Por lo tanto, f es continua en $(0,0)$.

Nota : Con $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2x$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = -2x$ se puede hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} f$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f$, aplicando **L'HOPITAL** .

PROBLEMA 2 ¿ Es continua en $(0,0)$ la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

i) $f(0,0)=0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

Elegir dos caminos que pasan por $(0,0)$ o una familia de caminos que pasen por $(0,0)$.

Elegir la familia de caminos: $y=mx$, $m\neq 0$. Así, tendremos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(mx)^3}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m^3x^3}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{m^3x}{1+m^2}=0$$

Como vemos, el límite siempre será cero, para cualquier valor real de m. En consecuencia el límite es cero y es único. Faltaría demostrar la relación $\delta-\varepsilon$.

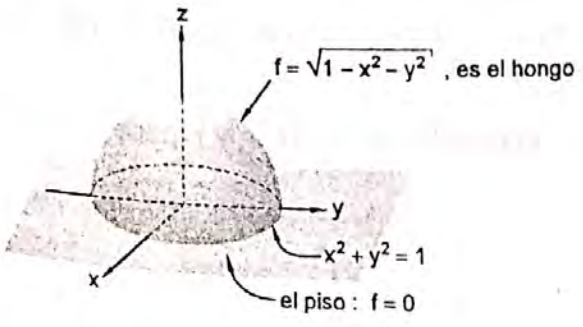
iii) Además: $f(0,0)=0=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$ En consecuencia $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

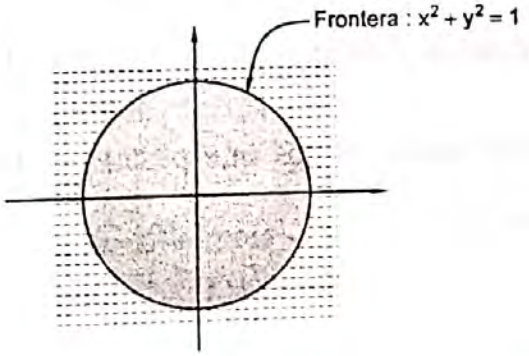
PROBLEMA 3 Averiguar si es continua la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & , \text{ si } x^2+y^2\leq 1\\ 0 & , \text{ si } x^2+y^2>1\end{cases}$$

Solución:

El gráfico de esta función es similar a un hongo esférico pegado al suelo y el mismo suelo.





- En $D: x^2+y^2<1$, $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ es continua.
- En $E: x^2+y^2>1$, $f(x,y)=0$ es continua
- Analizar la continuidad en la frontera: $x^2+y^2=1$

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

i) $f\left(x,\pm\sqrt{1-x^2}\right)=\sqrt{1-x^2-(1-x^2)}=0$

ii) a) El límite cuando $x^2+y^2<1$ es: $\lim\limits_{(x,y)\to(x,\pm\sqrt{1-x^2})} f(x,y)=0$

b) El límite cuando $x^2+y^2>1$ es: $\lim\limits_{(x,y)\to(x,\pm\sqrt{1-x^2})} f(x,y)=0$

iii) $f(0,0)=0=\lim\limits_{(x,y)\to(x,\pm\sqrt{1-x^2})} f(x,y)$. Por tanto, f es continua en $x^2+y^2=1$

PROBLEMA 4

Sea $f: IR^2-\{(0,0)\}\longrightarrow IR$ definida por $f(x,y)=\frac{x^3+x^2y}{x^4+y^2}$ ¿Es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en IR^2 ?

Solución:

Para poder definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$ deberá cumplirse que $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, siempre que exista éste límite.

Entonces debemos investigar si el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Para ello debemos elegir dos caminos que pasan por $(0,0)$ y reemplazar en $f(x,y)$ para luego calcular $\lim\limits_{x\to 0} f$.

Veamos:

i) Elegir el camino $y = x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2x}{x^4+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^2(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+1}=0$$

ii) Elegir el camino $y = -2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2(-2x)}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^3}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{x^2(x^2+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x^2+4}=0$$

Con la relación $\delta-\varepsilon$ se prueba que el límite es cero.

Se define $f(0,0)=0$ para que f sea continua en $\mathbb{R}^2$.

PROBLEMA 5 Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x+3}, & (x,y)\neq(-3,0)\\ 0 & (x,y)=(-3,0)\end{cases}$

a) Probar que f no es continua en $(-3,0)$.

b) Dar un esbozo de la gráfica de f .

Solución:

a) i) $f(-3,0)=0$, este resultado indica que f está definido en $(-3,0)$.

ii) Analizar el límite eligiendo dos caminos que pasen por $(-3,0)$.

Camino $\mathcal{C}_1$: $y=\sqrt{x+3}$, $x>-3$

$$\lim_{(x,y)\to(-3,0)}\frac{y^2}{x+3}=\lim_{x\to -3^+}\frac{x+3}{x+3}=1$$

Camino $\mathcal{C}_2$: $y=x+3$

$$\lim_{(x,y)\to(-3,0)}\frac{y^2}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)}=\lim_{x\to -3}(x+3)=0$$

Como para dos caminos diferentes, los límites son diferentes, afirmamos que no existe el $\lim_{(x,y)\to(-3,0)} f(x,y)$. Por lo tanto, $f(x,y)$ no es continua en $(-3,0)$.

b) Graficar $z = \frac{y^2}{x+3}$ *(tarea)*

PROBLEMA 6 Sea $f(x,y) = \frac{2(x-1)^3 y}{(x-1)^2+y^2}$ definida en todo $(x,y) \neq (1,0)$ ¿Es posible definir $f(x,y)$ en el punto $(1,0)$ de modo que la función f sea continua en todo su dominio? Justificar su respuesta.

Solución:

Bastará demostrar que existe el límite de $f(x,y)$ en $(1,0)$, para luego hacer $f(1,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

Entonces calculemos el límite. Para ello, elijamos una familia de caminos que pase por el punto $(1,0)$, digamos $y = m(x-1)$ y $m \in IR$ y sustituir en la función $f(x,y)$ y calcular $\lim\limits_{x\to 1} f$.

Así:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)^3 m(x-1)}{(x-1)^2+m^2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{2m(x-1)^4}{(1+m^2)(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{2m(x-1)^2}{1+m^2} = 0$$

para todo $m \in IR$, por lo tanto, la función $f(x,y)$ quedará redefinida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)^3 y}{(x-1)^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Faltaría probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0$

Veamos:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ t.q. $\left| \frac{2(x-1)^3 y}{(x-1)^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

siempre que $|x-1| < \delta \ \wedge \ |y| < \delta \quad (x,y) \neq (1,0)$

Busquemos δ en términos de ε

Acotar : $\left|\frac{2(x-1)^3 y}{(x-1)^2+y^2}\right| < \frac{2|x-1|^3|y|}{|x-1|^2} = 2|x-1|\,|y| < 2\delta\delta = 2\delta^2$

Elegir $\varepsilon = 2\delta^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

4.4.2 Propiedades de las Funciones de dos Variables

TEOREMA Si las funciones f y g son continuas en a, entonces :

1. $f+g$ es continua en a
2. $f-g$ es continua en a
3. fg es continua en a
4. $\frac{f}{g}$ es continua en a , siempre que $g(a) \neq 0$.

Demostración.

Basta aplicar la definición 1 de continuidad.

TEOREMA Si $f: D \subset IR^2 \longrightarrow E \subset IR$ es continua en $a \in D$ y $g: E \longrightarrow IR$ es continua en $f(a)$, entonces g o f es continua en a .

Definición 3

Una función $f(x,y)$ es continua si es continua en cada punto de su dominio.

Ejemplos:

1. $f(x,y) = \frac{x}{2y-x}$, $D_f : 2y - x \neq 0$. f es continua en todo $(x,y) \in D_f$
2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $D_f : x^2+y^2 \leq 1$. f es continua en todo $(x,y) \in D_f$

4.5 DERIVADAS PARCIALES

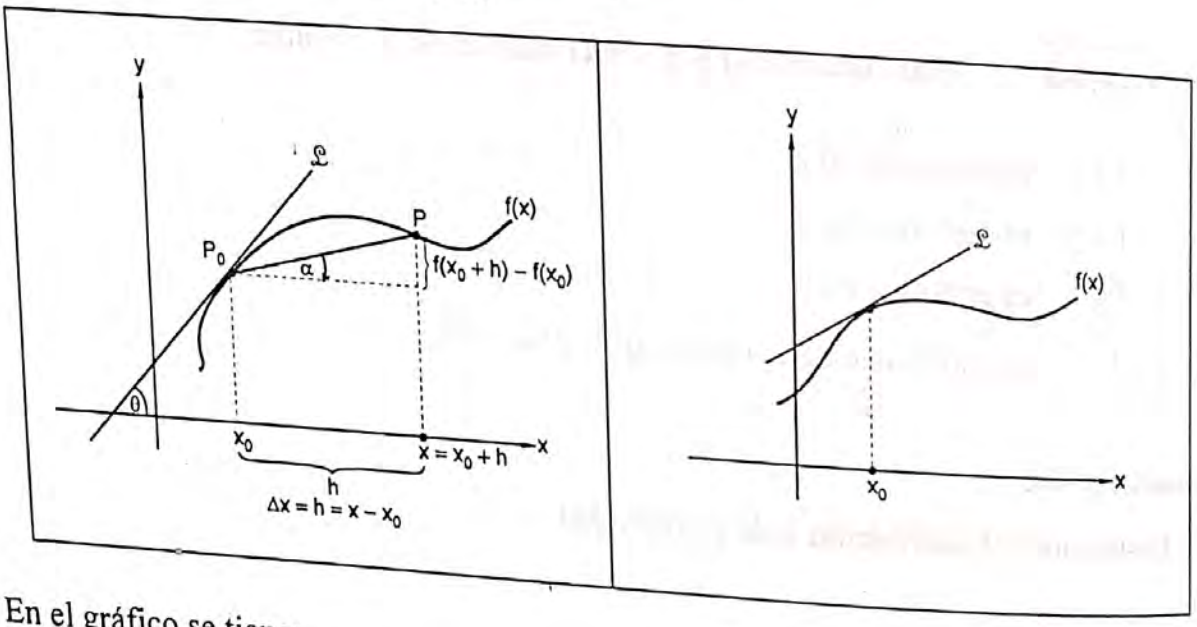
Introducción:

En el curso de Cálculo Diferencial, cuando hablamos de la derivada de una función $y = f(x)$, nos referimos a la pendiente de una recta, que es tangente a la gráfica de la función f en un punto x_0 del dominio de f.

En efecto:

Si $y = f(x)$ es una función real de variable real y $x_0 \in D_f$ = dominio de f, entonces la derivada de f en $x_0 = \frac{d_f}{d_x}(x_0)$ = pendiente de $\mathfrak{L}$ en $(x_0, f(x_0))$

$$= f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



En el gráfico se tiene:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ = pendiente de la recta secante $P_0 P$

$\operatorname{tg}\theta = f'(x_0)$ = pendiente de la recta tangente a la Gr(f) en el punto x_0

SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

Aclaremos con un ejemplo, la definición de derivada.

Sea x el precio de un libro en dólares y $f(x) = 400(15 - x)(x - 2)$ es la ganancia de una editorial en la venta de libros. Analicemos la función ganancia:

a) La ganancia debe ser $f(x) \geq 0$

$$400\,(15 - x)\,(x - 2) \geq 0 \iff x \in [2\,,\,15]$$

b) Si $x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$, este resultado nos indica que, si el precio del libro es 2 dólares no ganará nada la editorial.

c) Si $x = 15 \Rightarrow f(15) = 0$, este resultado nos indica que, si el precio del libro es 15 dólares no ganara nada la editorial.

d) Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = 400\,(15 - 3)\,(3 - 2)$

$$= 400\,(12)\,(1) = 4800$$

Si el precio del libro es 3 dólares la editorial ganará 4800 dólares.

e) Si $x = 3{,}2 \Rightarrow f(3{,}2) = 400\,(15 - 3{,}2) \cdot (3{,}2 - 2)$

$$= 5{,}664$$

f) Si el precio varia de $\underbrace{3{,}2 \quad a \quad 3}$ dólares

$$\underbrace{3}\ - \underbrace{3{,}2}\ = \underbrace{0{,}2}$$

$$x - x_0 = \Delta x \quad , \quad \Delta x = h$$

Se pregunta:

i) ¿En cuánto varía la ganancia cuando el precio aumenta de 3 a 3,2 dólares?

ii) ¿Cuál es la variación de la ganancia respecto a la variación del precio, cuando el precio varía de 3 dólares a 3,2 ? Esto es: $\frac{f(3{,}2) - f(3)}{3{,}2 - 3}$

iii) ¿Cuál es la variación instantánea de la ganancia cuando el precio del libro es $x = 3$ dólares?

Solución:

i) $f(3{,}2) - f(3) = 5664 - 4800 = 864$

Cuando el precio subió de 3 a 3,2, la ganancia subió 864. Esto es, el cambio de ganancia es de 864 dólares.

ii) $\frac{f(3,2)-f(3)}{3,2-3}=\frac{864}{0,2}=4320$

La razón de cambio de la ganancia respecto a la variación del precio de 3 a 3,2 es 4320 dólares.

iii) $f'(3)=?$

como $f'(x)=-800x+6800$, entonces

$f'(3)=-800\,(3)+6800=4400$

Este resultado nos dice que: cuando el precio del libro es 3 dólares, la ganancia de la Editorial habrá crecido a razón de 4400 dólares por precio de un libro.

Nota: Si la variación del precio es de 3 a 3,002 se tendrá:

i) $h=3,002-3=0,002$

ii) $f(3,002)-f(3)=4808,7984-4800=8.7984$

iii) $f'(3)\,h=(4400)\,(0,002)=8.8.$

Cuando h es muy pequeño, $f'(3)\,h$ se aproxima a $f(3,002)-f(3)$

Además $\underbrace{\frac{f(3,002)-f(3)}{0,002}}_{4399,2}$ se aproxima a $\underbrace{f'(3)}_{4400}$

Generalizando: si $y=f(x)$, donde $h=\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x+h)-f(x)$

Se tiene: a) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es la razón de cambio de y con respecto a x

b) $f'(x)=\frac{df}{dx}$, es la razón instantánea de cambio de y con respecto a x. También se dice tasa de variación instantánea de y con respecto a x

Ahora, extendamos este concepto para funciones reales de dos variables.

Sea la función $f: U\subset IR^2 \longrightarrow IR$, U es un conjunto abierto en IR^2.

$(x,y) \longrightarrow z=f(x,y)$

Si $(x_0 , y_0) \in U$ tendremos la siguientes notaciones.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 , y_0)$ es la derivada parcial de f respecto a x en el punto (x_0 , y_0) y representa la pendiente de una recta que es tangente a la curva. $z = f(x , y_0)$ en el punto $(x_0 , y_0) \in U$

↑ es el intercepto del plano $y = y_0$ con al superficie $z = f(x, y)$

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 , y_0)$ es la derivada parcial de f respecto a y en el punto (x_0, y_0) y representa la pendiente de una recta que es tangente a la curva. $z = f(x_0, y)$ en el punto $(x_0, y_0) \in U$

↑ es el intercepto del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$.

NOTACIONES PARA LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES:

Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables, entonces:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = D_x f$ denota la derivada parcial de f respecto a x.

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = D_y f$ denota la derivada parcial de f respecto a y.

CLASES DE DERIVADAS

Según el tipo de función que se tenga y según el estudio que se quiera hacer, las derivadas que se estudian en el análisis matemático son :

- Derivada simple, si $y = f(x)$
- Derivada parcial, si $z = f(x,y)$ o $z = f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$
- Derivada direccional, si $z = f(x,y)$ o $z = f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$

Los operadores Diferenciales son: el gradiente, la divergencia y el rotacional. En campos vectoriales se estudia la covariante. En matemáticas cualitativas se estudia la derivada generalizada (Distribuciones).

En el curso de cálculo vectorial, se estudian las derivadas parciales, la derivada direccional y los operadores diferenciales.

1. Definición de Derivadas Parciales de una Función $z = f(x,y)$ en un Punto $(x_0, y_0) \in U$

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables con valores reales. Entonces las derivadas parciales de f en el punto $P = (x_0 , y_0) \in U$ se definen del siguiente modo:

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

a) La derivada parcial de f con respecto a x en el punto $P = (x_0 , y_0) \in U$, es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad , \quad h \neq 0 \quad , \quad h = \Delta x = x - x_0$$

siempre que exista el limite.

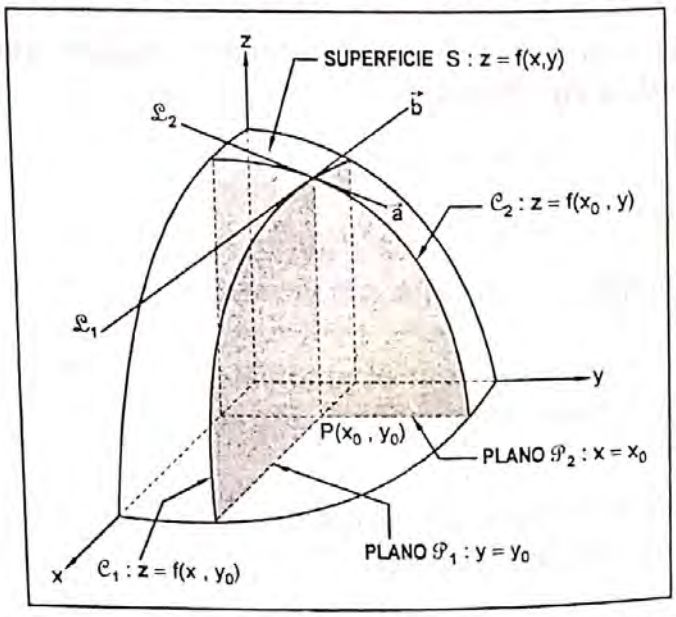
b) La derivada parcial de f con respecto a y en el punto $P = (x_0 , y_0) \in U$, es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad , \quad h \neq 0 \quad ; \quad h = \Delta y = y - y_0$$

siempre que exista el límite.

Nota: La razón de definir las derivadas parciales en un punto (x_0,y_0) perteneciente a un conjunto abierto U = Dom (f), es para asegurarse que $(x_0 , y_0) + he_i \in U$ y además tenga sentido la expresión $f((x_0 , y_0) + he_i)$; $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES



El GRAFICO de la función $f : U \subset IR^2 \longrightarrow IR$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

Definición

El gráfico de la función $f : U \subset IR^2 \longrightarrow IR$ es el conjunto

$$Gr(f) = \{ (x , y , f(x,y)) \in IR^3 / z = f(x,y) , (x,y) \in U \} \subset IR^3$$

cuya representación geométrica es una superficie en IR^3. Su dominio U es la proyección de la superficie sobre el plano XY, que puede ser una región cerrada o abierta.

Si por el punto $(x_0 , y_0) \in U$ hacemos pasar los planos $\mathcal{P}_1 : y = y_0$ y $\mathcal{P}_2 : x = x_0$ interseca a la superficie $S : z = f(x,y)$ formándose, respectivamente, las curvas $\mathcal{C}_1 : z = f(x,y_0)$ y $\mathcal{C}_2 : z = f(x_0 , y)$

Esto es: $\mathcal{P}_1 \cap S = \mathcal{C}_1$, $\mathcal{P}_2 \cap S = \mathcal{C}_1$
En el punto $(x_0,y_0 , f(x_0,y_0))$ se intersecan las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.
Ahora, interpretemos geométricamente las derivadas parciales :

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ es la pendiente de la recta $\mathcal{L}_1$, que es tangente a la curva $\mathcal{C}_1$ en el punto $(x_0 , y_0 , f(x_0 , y_0))$, donde $z_0 = f(x_0 , y_0)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ es la pendiente de la recta $\mathcal{L}_2$, que tangente a la curva $\mathcal{C}_2$ en el punto $(x_0 , y_0 , f(x_0 , y_0))$

Además :

i) Las ecuaciones de la recta tangente $\mathcal{L}_1$ son :

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial f}{dx}(x_0 , y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

..... Plano con normal : $\vec{n}_1 = (f_x , 0 , -1)$

..... Plano con normal : $\vec{n}_2 = (0 , 1 , 0)$

El vector dirección de $\mathcal{L}_1$ es $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(1 , 0 , \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 , y_0)\right)$

ii) Las ecuaciones de la recta tangente $\mathfrak{L}_2$ son :

$$\mathfrak{L}_2 : \begin{cases} z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 , y_0)(y - y_0) & \ldots\ldots \text{ Plano con normal : } \vec{n}_1 = (0 , f_y , -1) \\ x = x_0 & \ldots\ldots \text{ Plano con normal : } \vec{n}_2 = (1,0,0) \end{cases}$$

El vector dirección de $\mathfrak{L}_2$ es $\vec{b} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 = \left(0 , 1 , \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 , y_0)\right)$

PLANO TANGENTE:

Los vectores tangentes: $\vec{a}$ y $\vec{b}$ generan un plano que es tangente a la superficie S en el punto $(x_0 , y_0 , f(x_0 , y_0))$, cuya normal es el vector.

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{a} = (f'_x , f'_y , -1)$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie S: $z = f(x,y)$ en el punto $Q_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$, es:

Plano Tangente:	$(f'_x , f'_y , -1) \cdot ((x , y , z) - Q_0) = 0$
	$(x - x_0) f'_x + (y - y_0) f'_y - (z - z_0) = 0$

Observación: Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Si la aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $X(u,v) = (x(u,v) , y(u,v) , z(u,v))$ es una parametrización de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y elegimos un punto $P = X(u_0 , v_0)$ de S, definimos:

a) $X_u = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u} , \dfrac{\partial y}{\partial u} , \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)_P$ es el vector tangente a la curva $X(u , v_0)$ en el punto P.

b) $X_v = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v} , \dfrac{\partial y}{\partial v} , \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_P$ es el vector tangente a la curva $X(u_0 , v)$ en el punto P.

c) El plano tangente a la superficie S en el punto P, la denotamos por $T_P(S)$. El plano $T_P(S)$ está generada por los vectores $\{X_u , X_v\}$.

d) El vector: $N = X_u \wedge X_v$ (producto vectorial de X_u y X_v) es un vector NORMAL al plano $T_P(S)$.

e) La ecuación del plano tangente $T_P(S)$ es : $Q = P + u X_u + v X_v$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$.

Ejemplos Gráficos:

1. Sea la función; $f : U \longrightarrow IR$

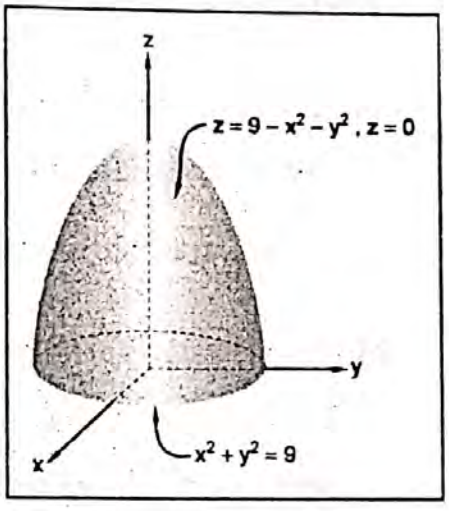
   $U = \{ (x,y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 9 \}$

   definido por $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$.

   El gráfico de f es la paraboloide:

   Para cualquier punto $(x,y) \in U$, las derivadas parciales existen y son:

   a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$ b) $\frac{\partial f}{dy}(x,y) = -2y$



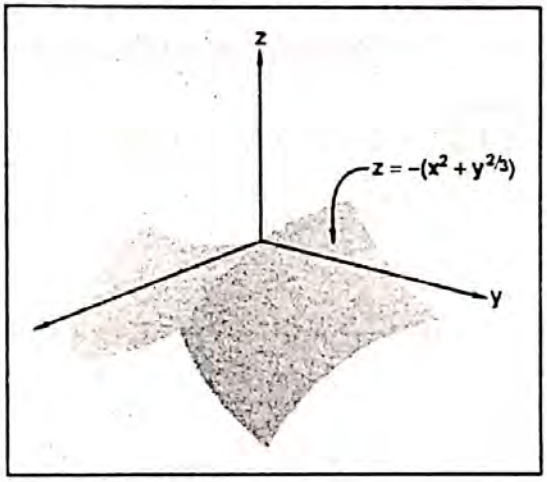
2. Sea la función $f : IR^2 \longrightarrow IR$, $U = IR^2$ definida por $f(x,y) = -(x^2 + y^{2/3})$

   El gráfico de f es:

   Sus derivadas parciales son:

   a) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ b) $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

   En este caso, existe la $\frac{\partial f}{\partial x}$ para todo $(x,y) \in IR^2$, pero la $\frac{\partial f}{\partial y}$ no existe en $y = 0$ porque $-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{0}} = \infty$ no es un número real .



Nota : Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 , y_0)$ es un número real, diremos que existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0 , y_0) \in U$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 , y_0)$ es un número real, diremos que existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0 , y_0) \in U$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 , y_0) = \pm\infty$, en el límite, diremos que no existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0 , y_0) \in U$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 , y_0) = \pm\infty$, en el límite, diremos que no existe $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0 , y_0) \in U$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 , y_0)$ tiende a tomar dos límites reales diferentes, también, diremos que no existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0 , y_0) \in U$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 , y_0)$ tiende a tomar dos límites reales diferentes, diremos que no existe $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0 , y_0) \in U$.

Reglas para Hallar las Derivadas Parciales

Si $z = f(x,y)$ y deseamos calcular la $\frac{\partial f}{\partial x}$ y la $\frac{\partial f}{\partial y}$, bastará aplicar las mismas reglas de derivación estudiadas en algún curso elemental de calculo diferencial.

a) Si se está calculando $\frac{\partial f}{\partial x}$, la variable "y" es constante.

b) Si se está calculando $\frac{\partial f}{\partial y}$, la variable "x" es constante. En general, si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)$ y estamos derivando respecto a la variable x_i, las demás variables permanecen constantes.

Ejemplos

Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones :

1 $z = x^3 + y^3 - 3axy$, a es una constante

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 3ay\,(1) = 3x^2 - 3ay$

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 - 3a\,x\,(1) = 3y^2 - 3ax$

2 $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

Entonces: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y)(1)-(x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$.

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x+y)(-1)-(x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(-x+y)^2}$

3 $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

Entonces: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Aplicar Formula : Si $z = \sqrt{\mu}$ $z' = \frac{\mu'}{2\sqrt{\mu}}$

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

4 $z = \text{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

Luego : a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\left(x + \sqrt{x^2+y^2} \right)\sqrt{x^2+y^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{0 + \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2} \right)}$

5 Si $z = e^{\text{Sen}\frac{y}{x}}$

Entonces : a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{\text{sen}\frac{y}{x}} . \cos\frac{y}{x}\left[\dfrac{x(0) - y(1)}{x^2} \right]$

$$= e^{\text{sen}\frac{y}{x}} \cdot \cos\frac{y}{x}\left[-\frac{y}{x^2} \right]$$

$$= -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\, e^{\text{sen}\frac{y}{x}}$$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{\text{sen}\frac{y}{x}} . \cos\frac{y}{x}\left[\frac{1}{x} \right]$

$$= \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\, e^{\text{sen}\frac{y}{x}}$$

6 Sí $z = \text{arc sen}\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

Entonces : a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)}{2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2}} \Big/ \sqrt{\frac{x^2+y^2-x^2+y^2}{x^2+y^2}}$$

Donde $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)(2x)-(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Luego : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \Big/ \sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}} = \frac{4xy^2}{2(x^2+y^2)^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \Big/ \sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}$

$$= \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$= \frac{2xy^2}{\frac{\sqrt{2}y(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}}$$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$

Pero : $$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} = \frac{\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$= \frac{\frac{-2x^2y-2y^3-2x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$= \frac{\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}}{2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2}} = \frac{-4x^2y}{2(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2-y^2/x^2+y^2}}$$

$$= \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$$

Luego : $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-x^2+y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$= \frac{-2x^2y}{\sqrt{2}y..\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\sqrt{2}x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}}$$

7 Si $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$, Hallar $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$

Solución:

a) $f_x(x,y)=\frac{y+\frac{1}{y}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$ *Notación :* $f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$

donde $f_x(2,1)=\frac{1+\frac{1}{1}}{2\sqrt{2(1)+\frac{2}{1}}}=\frac{2}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

b) $f_y(x,y)=\dfrac{x+\frac{y(0)-x(1)}{y^2}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$ *Notación :* $f_y(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$f_y(x,y)=\frac{x-\frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$$

donde $f_y(2,1)=\dfrac{2-\frac{2}{1}}{2\sqrt{2(1)+\frac{2}{1}}}=\dfrac{0}{2\sqrt{4}}=0$

8 Si $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$

Hallar las derivadas parciales en el punto $(3,4)$.

Solución:

a) $\underbrace{f_x(x,y)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}=1+0-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f_x(x,y)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_x(3,4)=1-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=1-\frac{3}{\sqrt{25}}=1-\frac{3}{5}=\frac{5-3}{5}$$

$$\boxed{f_x(3,4)=\frac{2}{5}}$$

b) $\underbrace{f_y(x,y)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}=0+1-\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f_y(x,y)=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(3,4)=1-\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=1-\frac{4}{\sqrt{25}}=1-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{5}$$

$$\boxed{f_y(3,4)=\frac{1}{5}}$$

9 Si $z = \text{Ln}\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto (1, 2).

Solución:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{y}{2x}\right)}{x + \frac{y}{2x}}$

$= \frac{1 + \frac{y}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x + \frac{y}{2x}} = \frac{1 - \frac{y}{2x^2}}{x + \frac{y}{2x}}$

ojo : $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{y}{2x}\right) = \frac{y}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$= \frac{y}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\right] = \frac{-y}{2x^2}$

Luego : $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{(1,2)} = \frac{1 - \frac{2}{2(1)^2}}{1 + \frac{2}{2(1)}} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{y}{2x}\right)}{x + \frac{y}{2x}}$

$= \frac{0 + \frac{1}{2x}}{x + \frac{y}{2x}}$

Luego: $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{(1,2)} = \frac{\frac{1}{2(1)}}{1 + \frac{2}{2(1)}} = \frac{1}{4}.$

10 Si $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1 + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, para $x = y = 0$.

Solución:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1 + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y)[\cos y - y(-\text{sen}\, x)] - (x\cos y - y\cos x)[0 + \cos x + 0]}{(1 + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y)^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1 + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y)[\cos y + y\,\text{sen}\, x] - (x\cos y - y\cos x)\cos x}{(1 + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y)^2}$

Luego : $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{(0,0)} = \frac{(1 + \text{sen}\, 0 + \text{sen}\, 0)[\cos 0 + 0\,\text{sen}\, 0] - (0\cos 0 - 0\cos 0)\cos 0}{(1 + \text{sen}\, 0 + \text{sen}\, 0)^2}$

$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{(0,0)} = \frac{1}{1} = 1}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{(1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y)[x(-\operatorname{sen} y)-\cos x]-(x\cos y - y\cos x)[0+0+\cos y]}{(1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y)^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y)[-x\operatorname{sen} y-\cos x]-(x\cos y - y\cos x)\cos y}{(1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y)^2}$$

Luego: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{(0,0)} = \dfrac{(1+0+0)[0(0)-1]-(0-0)1}{(1+0+0)^2} = \dfrac{-1}{1} = -1.$

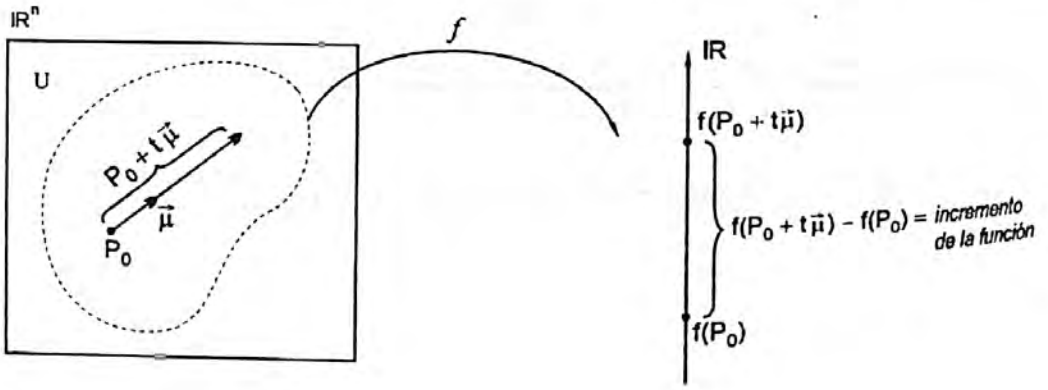
4.6 DERIVADA DIRECCIONAL DE UN CAMPO ESCALAR

Definición

Sea $f : U \subset IR^n \longrightarrow IR$
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

una función definida en el conjunto abierto U de IR^n y sea $P_0 \in U$ un punto dado de U. Sea $\vec{\mu} \in IR^n$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en P_0, en la dirección del vector $\vec{\mu}$, denotado por $D_{\vec{\mu}} f(P_0)$ o $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mu}}(P_0)$, como el limite.

$$D_{\vec{\mu}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{\mu}) - f(P_0)}{t} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{①}$$



Si en ① hacemos $f(P_0 + t\vec{\mu}) = F(t)$, tendremos $F(0) = f(P_0)$, por lo tanto:

$$D_{\vec{\mu}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) \quad , \quad \text{esto es}$$

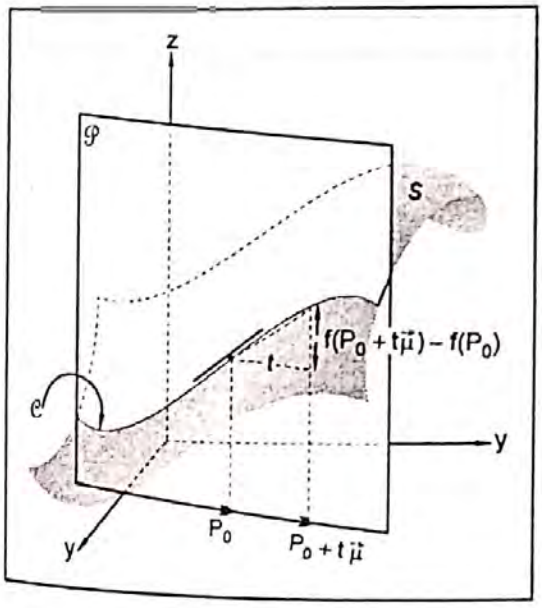
$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(P_0) = \frac{d}{dt}(f(P_0 + t\vec{\mu}))\Big|_{t=0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ ②$$

4.6.1 Interpretación Geométrica de la Derivada Direccional para Funciones Escalares de Dos Variables.

Sea la función $f: U \subset IR^2 \longrightarrow IR$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

Cuyo gráfico $Gr(f) = \{ (x, y, f(x,y)) \in IR^3 / (x,y) \in U \} \subset IR^3$ es una superficie $S \subset IR^3$



1. Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto de U y $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ un vector unitario de IR^2, entonces $\{P_0 + t\vec{\mu}, t \in IR\}$ es una recta contenida en el plano xy.

2. Si por dicha recta levantamos un plano $\mathcal{P}$, perpendicular a XY, intersecta a la superficie S formándose la curva $\mathcal{C}$.

3. Si por el punto $(x_0, y_0, f(P_0))$ trazamos una recta tangente a la curva $\mathcal{C}$, entonces la pendiente de dicha tangente es la $D_{\vec{\mu}} f(P_0)$

Observación: La derivada direccional es una generalización de la derivada parcial.

a) Sí $\vec{\mu} = \vec{e}_1 = (1,0)$ obtenemos $D_{\vec{e}_1}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$

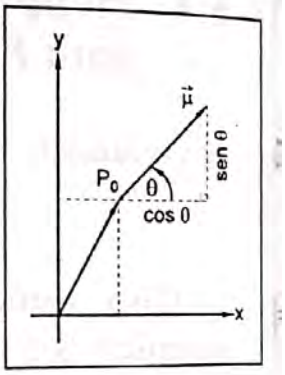
b) Si $\vec{\mu} = \vec{e}_2 = (0,1)$ obtenemos $D_{\vec{e}_2}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$

4.6.2 Proposición

Dado la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

y el vector unitario $\vec{\mu} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $0 \le \theta \le 2\pi$; la **DERIVADA DIRECCIONAL** de f en $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ en la dirección de $\vec{\mu}$, se define por:



$$D_{\vec{\mu}} f(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{\mu}) - f(P_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x_0,y_0) + t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\big) - f(x_0,y_0)}{t}$$

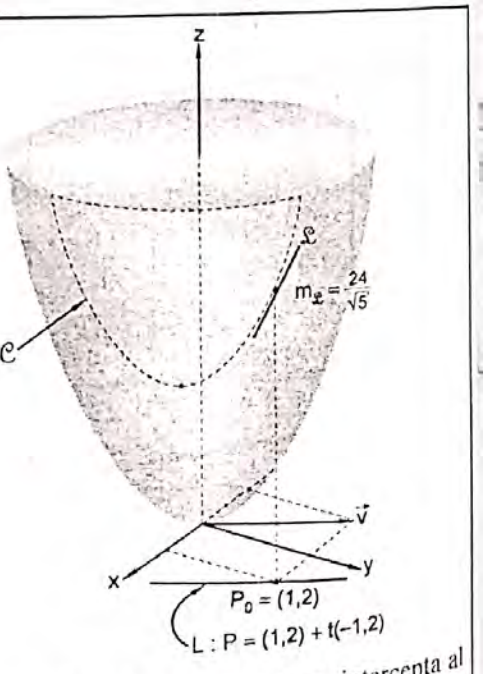
(3)..... $$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0,y_0)}{t}}$$

Ejemplo 1

Calcular la derivada direccional del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f(x,y) = 4(x^2 + y^2)$ en el punto $P_0(1,2)$ en la dirección del vector $\bar{v} = -i + 2j$.

Solución:

Se pide : $D_{\vec{\mu}}(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{\mu}) - f(P_0)}{t}$



Cuando por L se levanta un plano, intercepta al paraboloide formándose la curva $\mathcal{C}$. La pendiente de la recta tangente $\mathcal{L}$ es $m = \frac{24}{\sqrt{5}}$ en (1,2,20).

$$\text{Datos} \begin{cases} P_0 = (1,2) \\ \mu = \dfrac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}} \right) \end{cases}$$

Cálculos auxiliares:

a) $P_0 + t\,\vec{\mu} = (1,2) + t\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}} \right) = \left(\underbrace{1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,t}_{x}, \underbrace{2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,t}_{y} \right)$

b) $f(P_0 + t\vec{\mu}) = 4\left[\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}t \right)^2 + \left(2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}t \right)^2 \right] = 4\left[5 + \dfrac{6}{\sqrt{5}}t + t^2 \right]$

c) $f(p_0) = 4\,[\,(1)^2 + (2)^2\,] = 20$

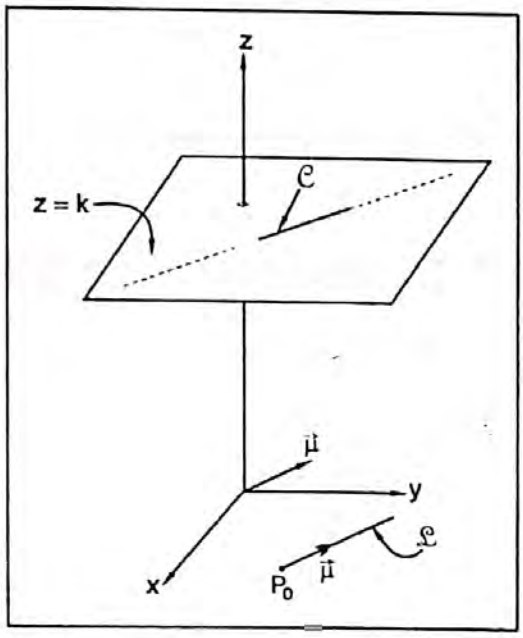
Luego, $D_{\vec{\mu}}\, f(P_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{4\left[5 + \frac{6}{\sqrt{5}}t + t^2 \right] - 20}{t} = \dfrac{24}{\sqrt{5}}$

Ejemplo 2 Dado la función $f(x,y) = k$ (plano paralelo al plano XY), hallar $D_{\mu}(P_0)$.

Solución:

$$D_{\vec{\mu}}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{k - k}{t} = 0$$

es la pendiente de $\mathcal{C}$ que es una recta que se obtiene interceptando el plano levantado por $\mathcal{L}$ y el plano $z = k$.



4.7 GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR.

Definición

Sea $f: U \subset IR^n \longrightarrow IR$

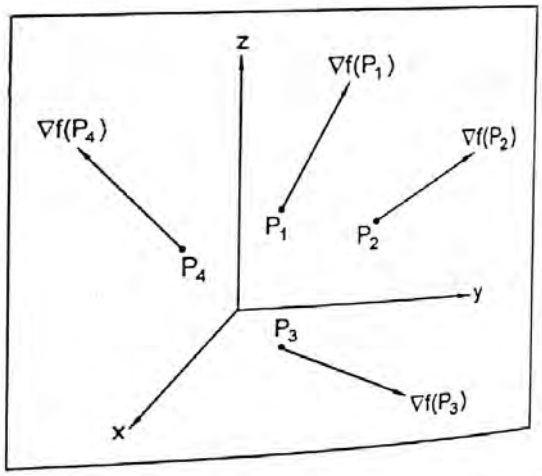
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Una función diferenciable definida en el conjunto abierto U de IR^n. Se define el (vector) **GRADIENTE** de la función f en el punto $P_0 \in U$, denotado por grad $f(P_0)$ o $\nabla f(P_0)$, como el vector de IR^n dado por:

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right)$$

Nota: ∇f es el campo vectorial gradiente. Además el ∇f asigna un vector a cada punto $P \in U \subset IR^n$, esto es:

$$\nabla f: U \subset IR^n \longrightarrow IR^n$$
$$P \longrightarrow \nabla f$$



El gradiente ∇f de una función $f: IR^3 \longrightarrow IR$ es un campo vectorial en IR^3, en cada punto P_i, $\nabla f(P_i)$ es un vector que sale de P_i.

4.7.1 Interpretación Geométrica del Gradiente

Dos Casos:

Caso 1

Si consideramos la función escalar $f: U \subset IR^2 \longrightarrow IR$

$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$

y k una constante, la ecuación $f(x,y) = k$ representa una curva en el espacio IR^2 y se llama **CURVA DE NIVEL** de la función f.

Proposición 1

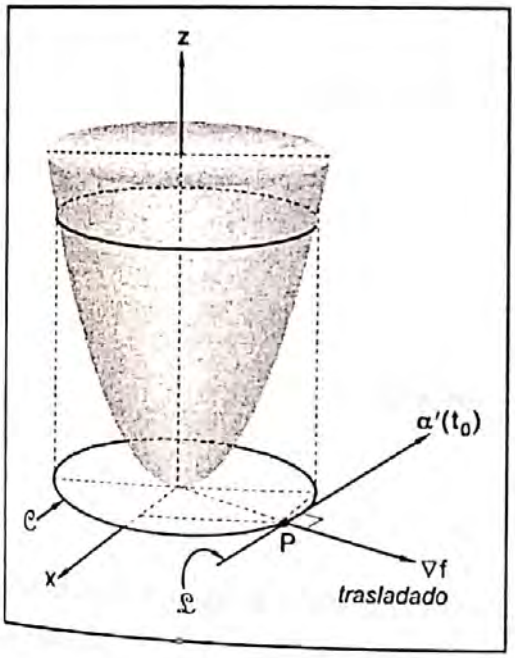
Sea $\mathcal{C}: f(x,y) = k$ una curva de **NIVEL** y P un punto de $\mathcal{C}$. Si $\nabla f(P) \neq 0$, entonces el $\nabla f(P)$ ***es perpendicular a $\mathcal{C}$ en P.***

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ (Paraboloide) y $\mathcal{C}: \underbrace{f(x,y)}_{x^2+y^2} = 4$ una curva de nivel.

Sea $P = (1, \sqrt{3})$ un punto en $\mathcal{C}$.

La $\nabla f(1, \sqrt{3})$ es $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$$\nabla f(1, \sqrt{3}) = (2, 2\sqrt{3}).$$



Entonces el $\nabla f(1, \sqrt{3})$ es perpendicular a $\mathcal{C}$ en $P = (1, \sqrt{3})$

$$\mathcal{C}: \alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$$

$$\alpha'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$$

$$\alpha'\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = (-\sqrt{3}, 1)$$

$\mathcal{L}$ es recta tangente a $\mathcal{C}$ en P. Se cumple: $\mathcal{L}$ y ∇f son perpendiculares, esto es:

$$\boxed{\alpha'(t_0) \cdot \nabla f(P) = 0}$$

$P = (1, \sqrt{3})$

$t_0 = \frac{\pi}{3}$

Caso 2

Si consideramos la función escalar $f: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longrightarrow z = f(x,y,z)$$

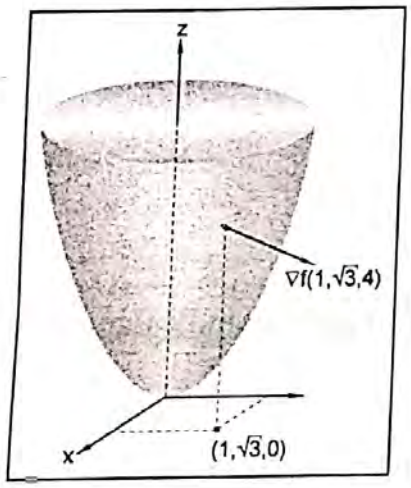
y k una constante, la ecuación $f(x,y,z) = k$ representa una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$ y se llama superficie de **NIVEL** de la función f.

Proposición 2

Sea $S : f(x,y,z) = k$ una superficie de **NIVEL** y P un punto de S. Si $\nabla f(P) \neq 0$, entonces el $\nabla f(P)$ ***es NORMAL a S en P.***

Ejemplo: Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

y $S : \underbrace{f(x,y,z)}_{x^2+y^2-z} = 0$ una superficie de nivel.



Sea $P = (1, \sqrt{3}, 4)$ un punto de S.

La $\nabla f(1, \sqrt{3}, 4)$ es $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$

$$\nabla f(1, \sqrt{3}, 4) = (2, 2\sqrt{3}, -1)$$

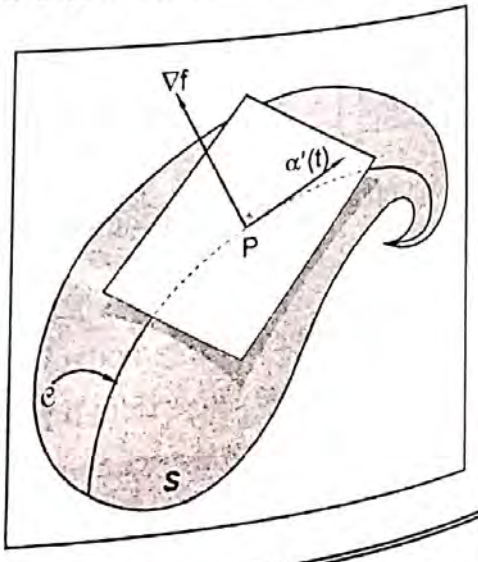
Entonces $\nabla f(1, \sqrt{3}, 4)$ es **NORMAL** a S en $P = (1, \sqrt{3}, 4)$

Demostración de la Proposición 2

Debo probar que $\nabla f(p) \cdot \alpha'(0) = 0$, siendo $\alpha'(0)$ un vector tangente a una curva $\mathcal{C}$ contenida en S en punto $\alpha(0) = P$.

Veamos:

Supongamos que la curva $\mathcal{C}$ esté contenida en la superficie S cuya ecuación vectorial es $\vec{\alpha}(t) = (x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t))$ con $\vec{\alpha}(0) = P$. Como $\mathcal{C}$ está contenido en S, entonces $f(x(t)\ ,y(t)\ ,z(t)) = k$.



Derivar: $$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) = 0$$

En $t = 0$, $P = \alpha(0)$ se cumple: $\nabla f(P) \cdot \alpha'(0) = 0$, donde $\alpha'(0)$ es tangente a la curva $\mathcal{C}$ en P. Por lo tanto, $\nabla f(P)$ es **NORMAL** a la curva $\mathcal{C}$ en P.

Como $\mathcal{C}$ es una curva cualquiera de S, concluimos que ∇f es normal a la superficie S.

Notación:

Si se tiene una función de tres variables $f(x,y,z)$.

a) El símbolo ∇ (nabla) es el operador diferencial $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$

b) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ es el GRADIENTE DE f.

↑ *se lee "GRADIENTE DE f"*

Propiedades:

Sean las funciones escalares $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$, α un escalar . Si existen ∇f y ∇g, entonces se cumplen:

1. $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$
2. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$

La demostración es sencillo, recurrir a la definición del operador ∇

4.8 PLANO TANGENTE

Definición

Sea S: $f(x,y,z) = k$ una superficie de nivel para k constante. El **Plano tangente** de S en el punto $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ de S está definido por:

$$\nabla f(P) \,.\, (x - x_0 , y - y_0 , z - z_0) = 0$$

Ejemplo: Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $P(1,0,1)$.

Solución:

Se pide hallar $\mathcal{P} : \nabla f(P) \,.\, (x - x_0 \,,\, y - y_0 \,,\, z - z_0) = 0$

Datos : $P = (1 \,,\, 0 \,,\, 1)$
$\quad\quad\quad x_0 \;\; y_0 \;\; z_0$

De la ecuación $Z = x^2 + y^2$ obtenemos $\underbrace{x^2 + y^2 - z}_{f(x,y,z)} = 0$

El gradiente de f es $\nabla f(x,y,z) = (2x \,,\, 2y \,,\, -1)$

y $\nabla f(1,0,1) = (2 \,,\, 0 \,,\, -1)$

Luego, la ecuación del plano tangentes es :

$$\mathcal{P} : (2 \,,\, 0 \,,-1) \,.\, (x - 1 \,,\, y \,,\, z - 1) = 0$$

$$2\,(x - 1) + 0\,(y) - 1\,.(z - 1) = 0$$

$$\boxed{2x - z - 1 = 0}$$

4.9 CÁLCULO DE LA DERIVADA DIRECCIONAL USANDO EL GRADIENTE.

Proposición

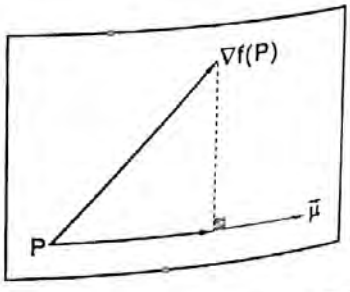
Supongamos que una función $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivadas parciales de

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$$

primer orden continuas. Sea P un punto del GRAFICO de f y $\vec{\mu}$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en el punto P, en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}$, está dado por:

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{\mu}} = \text{Comp}_{\vec{\mu}} \nabla f(P)$$

producto interno



Demostración

Por definición, la derivada direccional de la función f en el punto $P = (x_0 , y_0 , z_0)$ en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = (\mu_1 , \mu_2 , \mu_3)$, es:

$$D_{\vec{\mu}} f(P) = \frac{d}{dt}\left(f(P + t\vec{\mu})\right)$$

$$= \frac{d}{dt} f\left(\underbrace{x_0 + t\mu_1}_{x} , \underbrace{y_0 + t\mu_2}_{y} , \underbrace{z_0 + t\mu_3}_{z}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y} , \frac{\partial f}{\partial z}\right) . \left(\frac{dx}{dt} , \frac{dy}{dt} , \frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y} , \frac{\partial f}{\partial z}\right) . (\mu_1 , \mu_2 , \mu_3)$$

$$= \nabla f(P) . \vec{\mu}$$

Si se tiene la función $z = f(x,y)$, $(x,y) \in U \subset IR^2$ y $\vec{\mu} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces:

$$D_{\vec{\mu}} f = \nabla f . \vec{\mu}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y}\right) . (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$$

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta}$$

4.10 EL GRADIENTE COMO DIRECCIÓN DE MÁXIMA VARIACIÓN

Proposición

Sea la función $f : U \subset IR^3 \longrightarrow IR$ que posee derivadas Parciales
$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$

de primer orden continuas. Entonces en cada punto P para el cual $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, el vector ∇f apunta una dirección en que f crece más rápidamente. La magnitud del vector ∇f es la tasa máxima de crecimiento de f.

Demostración

La proposición afirma que:

a) El valor máximo de $D_{\vec{\mu}} f(x, y, z)$ en $P(x,y,z)$ es $|\nabla f(x,y,z)|$.

b) La tasa de crecimiento máximo de $f(x,y,z)$ en $P(x,y,z)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y, z)$.

Veamos:

1. La derivada direccional de f en P en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}$, es

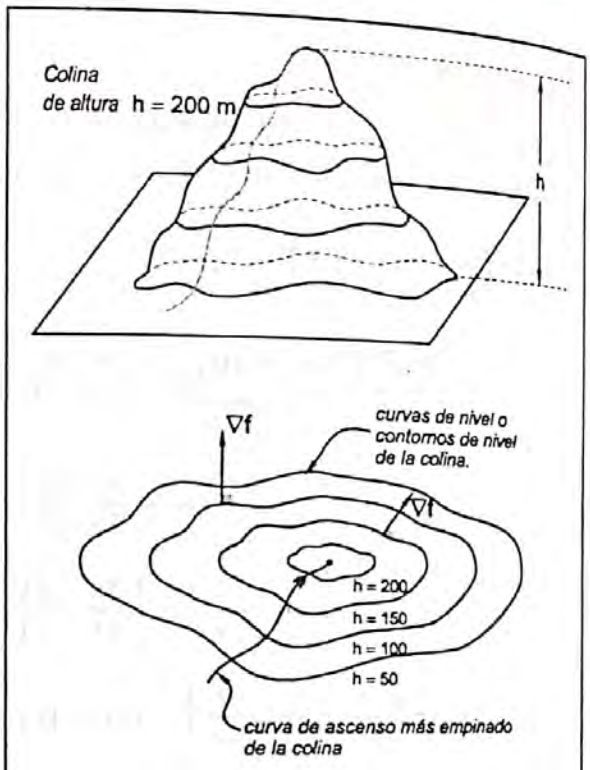
$$D_{\vec{\mu}} f(P) = \nabla f(P) . \vec{\mu}$$

2. Pero : $\nabla f(P) . \vec{\mu} = |\nabla f(P)| |\vec{\mu}| \cos\theta$, $|\vec{\mu}| = 1$

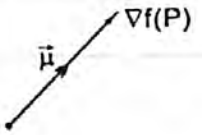
$$= |\nabla f(P)| \cos\theta$$

3. El valor máximo de $\nabla f(P) \cdot \vec{\mu}$ se obtiene cuando $\theta = 0$, esto es, cuando elegimos $\vec{\mu}$ en la misma dirección y sentido de ∇f, se cumple:

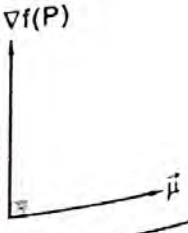
Valor máximo de $D_{\vec{\mu}} f(P) = |\nabla f(P)|$



Para llegar más rápido a la cima de la colina, que tiene 200m de altura, se deberá caminar perpendicular a los contornos de nivel. La curva de ascenso más empinado de la colina sigue la dirección del ∇f. El vector ∇f. es ortogonal a las curvas de nivel



4. Así mismo, el vector ∇f apunta una dirección en que f crece más rápidamente y su variación es la tasa máxima de crecimiento de f.

Si $\theta = 0$, obtenemos el valor máximo de la derivada direccional. $D_{\vec{\mu}} f(P)$ máxima $= \|\nabla f(P)\|$	Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtenemos el valor nulo de la derivada direccional.  $D_{\vec{\mu}} f(P) = 0$

4.11 PROBLEMAS SOBRE DERIVADA DIRECCIONAL

PROBLEMA 1 Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

a) ¿En qué dirección unitaria es igual a cero la derivada direccional en el punto (1,1)?

b) ¿En qué dirección unitaria es igual a cero la derivada direccional en el punto arbitrario (x_0, y_0) en el primer cuadrante?

Solución:

a) Se pide hallar el vector unitario $\vec{\mu}$ tal que $D_{\vec{\mu}}f(1,1)=0$

Veamos:

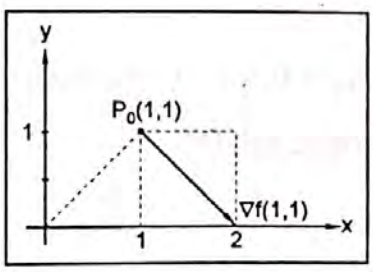
1. El dominio de f es : $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ Se pide, para qué vectores unitarios $\vec{\mu}$ se cumpla $D_{\vec{\mu}}f(1,1)=0$

2. Por definición de $D_{\vec{\mu}}f(1,1)$, se tiene:
   $D_{\vec{\mu}}f(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot\vec{\mu}$, donde elegimos $\vec{\mu}=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$

3. Hallar $\nabla f(x,y)$, luego $\nabla f(1,1)$ para hacer el producto interno

a) $$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{(x^2+y^2)(2x)-(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2},\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

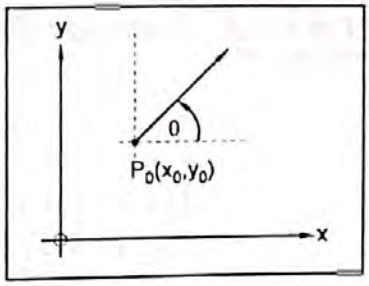
$$=\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$



b) $\nabla f(1,1)=(1,-1)$

El vector $\nabla f(1,1)$ sale de $(1,1)$.

3. Luego, $$D_{\vec{\mu}}f(1,1)=(1,-1)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$$
$$=\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$$



4. Si $D_{\vec{\mu}} f(1,1) = 0 \Rightarrow \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 0 \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 1 = \operatorname{tg}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Los vectores unitarios son: $\vec{\mu} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, $\vec{\mu} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

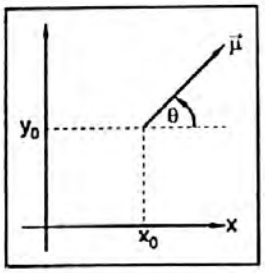
b) Se pide hallar los vectores $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$, $\theta = ?$ tal que $D_{\vec{\mu}}(x_0 , y_0) = 0$, con $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Como $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} , \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

entonces $$\nabla f(x_0 , y_0) = \left(\frac{4x_0 y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} , \frac{-4x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} \right)$$

Debemos hallar θ tal que:

$$D_{\vec{\mu}} f(x_0 , y_0) = \nabla f(x_0 , y_0) \cdot (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta) = 0$$



$$\frac{4x_0 y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \cos\theta - \frac{4x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$y_0 \cos\theta - x_0 \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_0}{x_0}$$

Como $x_0 > 0$, $y_0 > 0$; entonces para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ existen los vectores unitarios $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$

PROBLEMA 2 *Derivada direccional*

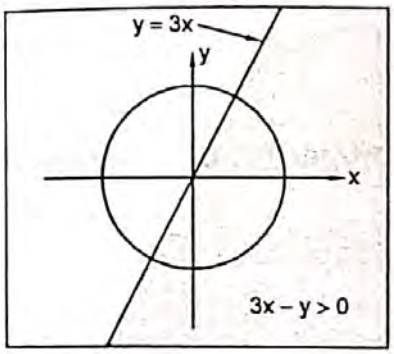
Sea $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3x-y}}{1+x^2}$

Hallar las direcciones unitarias $\mu = (\mu_1 , \mu_2)$ en los cuales existe $D_{\vec{\mu}} f(P)$, $P \in \text{Dom}(f)$.

Solución:

Se pide hallar μ en los cuales existe $D_{\vec{\mu}} f(P)$.

Veamos: El dominio de f es: $Dom(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - y \geq 0 \}$



Sea $\vec{\mu} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ el vector unitario.

Hallemos la $\nabla f(x,y)$, hacer el producto escalar $\nabla f(x,y).(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y luego analizar la existencia de la $D_{\vec{\mu}} f(x,y)$.

Nota: Analizar la existencia de $D_{\vec{\mu}} f(x,y)$, significa analizar qué valores reales toma "x" e "y" y para qué valores de θ, la $D_{\vec{\mu}} f(x,y)$ es un número real.

Veamos:

a) Se tiene que $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{4xy - 9x^2 + 3}{2\sqrt{3x-y}\,(1+x^2)^2} \;,\; \dfrac{-1}{2\sqrt{3x-y}\,(1+x^2)} \right)$

b) Hacer el producto escalar $\nabla f(x,y) \,.\, (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$:

$$D_{\vec{\mu}} f(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x-y}\,(1+x^2)} \left[\frac{4xy - 9x^2 + 3}{1+x^2} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \right]}_{\text{esta función existe para todo } \theta \in [0, 2\pi], \text{ siempre que } 3x - y > 0}$$

Conclusión: Para todas las direcciones de $\vec{\mu} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ existe $D_{\vec{\mu}} f(x,y)$.

PROBLEMA 3 Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que:

a_1) f es discontinua en el origen, y

a_2) Hallar la derivada direccional de f en el origen según cualquier dirección unitaria $\mu = (\mu_1 , \mu_2)$ existe.

Solución:

a_1) Analizar, eligiendo dos caminos que pasan por $(0,0)$, si existe o no el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

Veamos:

i) Camino : $y = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x)}{x^4+x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x)}{x^2(x^2+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

ii) Camino : $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2)}{x^4+x^4} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Para dos caminos diferentes, hemos obtenido dos límites diferentes, lo cual implica que no existe límite en $(0,0)$. Si $f(0,0) = 0$ y no existe límite en $(0,0)$, afirmamos que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

a_2) Elegir $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$ y aplicar la definición:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\theta , h\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{h} \quad , \text{donde } f(0,0) = 0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2\cos^2\theta \,.\, h\operatorname{sen}\theta}{h^4\cos^4\theta + h^2\operatorname{sen}^2\theta}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3\cos^2\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta}{h^3[h^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta}{h^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos^2\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Se ha obtenido $D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, que existe para todo $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Ahora, analizar en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$:

a) En $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene $\vec{\mu} = (0,1)$

La $D_{\vec{\mu}} f(0,0)$ en la dirección de $\vec{\mu} = (0,1)$, es:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

b) En $\theta = \frac{3\pi}{2}$, se tiene $\vec{\mu} = (0,-1)$

La $D_{\vec{\mu}} f(0,0)$ en la dirección de $\vec{\mu} = (0,-1)$, es:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,-t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

CONCLUSIÓN:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \begin{cases} \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} & , \ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \ \theta \neq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & , \ \theta = \frac{\pi}{2}, \ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Lo cual indica que la $D_{\vec{\mu}} f(0,0)$ existe en todas las direcciones.

PROBLEMA 4

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{x}\right] & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Encontrar todas las direcciones $\vec{\mu} = (\mu_1, u_2)$ en las cuales existe la derivada direccional de f en (0,0).

Solución:

Lo que se pide es hallar los vectores $\vec{\mu} = (\mu_1 , \mu_2)$ de tal modo que existe el siguiente límite en $(0,0)$.

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(\mu_1,\mu_2))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mu_1, t\mu_2)-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mu_1, t\mu_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t\mu_1, + t\mu_2)^2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right]}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 (u_1 + tu_2)^2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right]}{t} = \lim_{t\to 0} t(\mu_1 + \mu_2)^2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right]$$

Ahora, analicemos si existe o no este último límite. para ello partimos de la desigualdad:

$$-1 \le \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right] \le 1 \quad , \quad \mu_1 \neq 0$$

Multiplicar por $t(\mu_1 + \mu_2)$, $t > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$:

$$-t(\mu_1 + \mu_2) \le t(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right] \le t(\mu_1 + \mu_2)$$

Aplicar lim: $\lim_{t\to 0} [-t(\mu_1 + \mu_2)] \le \lim_{t\to 0} t(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right] \le \lim_{t\to 0} [t(\mu_1 + \mu_2)]$

$$0 \le \lim_{t\to 0} t(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right] \le 0$$

Este resultado implica que : $\lim t(\mu_1 + \mu_2) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{t\mu_1}\right] = 0$ para todo $\mu_1 \neq 0$

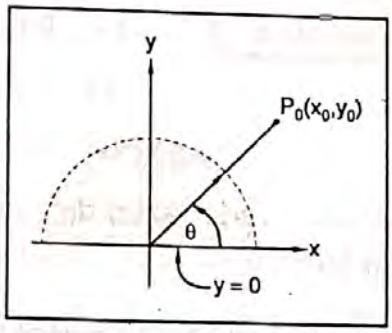
Conclusión : $D_{\vec{\mu}} f$ existe para los vectores $\vec{\mu} = (\mu_1 , \mu_2)$ donde $\mu_1 \neq 0$.

Problema 5 Sea $f(x,y) = x\sqrt{y}$

Analizar en qué direcciones $\vec{\mu} = (\mu_1 , \mu_2)$ existen las derivadas direccionales en el punto (x,y).

a) si $(x,y) \neq (0,0)$ b) Si $(x,y) = (0,0)$

Solución:



1. El dominio de f es : $y \geq 0$, esto es, Dom (f) = $\{(x,y) \in IR^2 / y \geq 0\}$.

   El análisis se hace en el abierto.

   $U = \{ (x,y) \in IR^2 / y > 0 \}$

2. Si elegimos $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$, para qué valores de θ, existe la derivada direccional siguiente en el punto $P_0 = (x_0 , y_0)$, $y_0 > 0$.

$$D_{\vec{\mu}} f(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(x_0 + t\cos\theta)\sqrt{y_0 + t\operatorname{sen}\theta} - x_0\sqrt{y_0}}{t}$$

b) Si $(x_0 , y_0) = (0,0)$, tendremos:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos t\sqrt{t\operatorname{sen}\theta}}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\cos t\sqrt{t\operatorname{sen}\theta}\right)$$

Este límite existe, sólo cuando $t\operatorname{sen}\theta > 0$. Si $t > 0$, entonces $\operatorname{sen}\theta > 0 \Longleftrightarrow 0 < \theta < \pi$. Las derivadas direccionales en $(0,0)$ existen para $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$ tal que $0 < \theta < \pi$

a) Si $(x_0 , y_0) \neq (0 , 0)$, analizar el limite siguiente:

$$D_{\vec{\mu}} f(x_0 , y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{(x_0 + t\cos\theta)\sqrt{y_0 + t\operatorname{sen}\theta} - x_0\sqrt{y_0}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{x_0\sqrt{y_0 + t\operatorname{sen}\theta} - x_0\sqrt{y_0}}{t} + \cos\theta\sqrt{y_0 + t\operatorname{sen}\theta} \right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{x_0\left(\sqrt{y_0 + t\operatorname{sen}\theta} - \sqrt{y_0}\right)}{t} + \cos\theta\sqrt{y_0 + t\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{x_0\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{y_0}} + \cos\theta\sqrt{y_0}$$

Este número real existe para $y_0 > 0$ y $\vec{\mu} = (\cos\theta , \operatorname{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

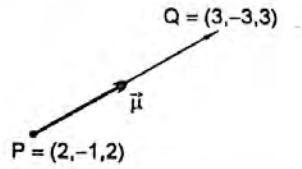
PROBLEMA 6 La temperatura en el punto (x,y,z) está dada por $T(x,y,z) = 200\,e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ donde T se mide en grados celcius y x, y, z se mide en metros.

a) Encuentre la razón de cambio de la temperatura, en el punto $P = (2,-1,2)$. en la dirección hacia el punto $(3,-3,3)$.

b) ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura en P? y ¿cuál es la máxima razón de aumento de T en P?

Solución:

a) La razón de cambio de la temperatura, en el punto $P = (2,-1,2)$ en la dirección hacia el punto $(3,-3,3)$ es la **DERIVADA DIRECCIONAL** de T en P en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}$, esto es $D_{\vec{\mu}}\,T(P)$.



donde $\vec{\mu} = \dfrac{Q-P}{|Q-P|} = \dfrac{(1,-2,1)}{|(1,-2,1)|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$

Donde : $$\boxed{D_{\vec{\mu}}\,T(P) = \nabla T(2,-1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Si $$T(x,y,z) = 200\,e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

Entonces : $$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$= 200\,e^{-x^2-3y^2-9z^2}(-2x,-6y,-18z)$$

Luego $$\nabla T(2,-1,2) = 200e^{-43}(-4,6,-36)$$

Por tanto : $$D_{\vec{\mu}}\,T(P) = 200\,e^{-43}(-4,6,-36)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

$$= \frac{200}{\sqrt{6}}\,e^{-43}[-4-12-36] = -\frac{400}{\sqrt{6}}(26)e^{-43}$$

$$\boxed{D_{\vec{\mu}}\,T(P) = -\frac{10400}{\sqrt{6}}\,e^{-43}}$$

b) La temperatura aumenta más rápidamente en P en la dirección del gradiente $\nabla T(P)$, esto es : $\nabla T(p) = -400\, e^{-43}\,(2\,,-3\,,18)$.

La máxima razón de aumento de T en P es el módulo de la gradiente, esto es :

$$\|\nabla T(P)\| = 400\, e^{-43}\sqrt{4+9+18^2} = 400\sqrt{337}\, e^{-43}.$$

PROBLEMA 7 *(Derivada direccional.)*

Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad, está dado por $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1\,,2)$.

a) ¿En qué dirección deberá moverse el insecto para que se aleje lo más rápido posible de la toxicidad?

b) En la curva de nivel apropiada, ubique y dibuje el vector gradiente $\nabla T\,(-1\,,2)$

c) ¿Cuál es la razón de cambio de la toxicidad del ambiente en el punto $(-1\,,2)$ en la dirección $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1\,,2)$?

Solución:

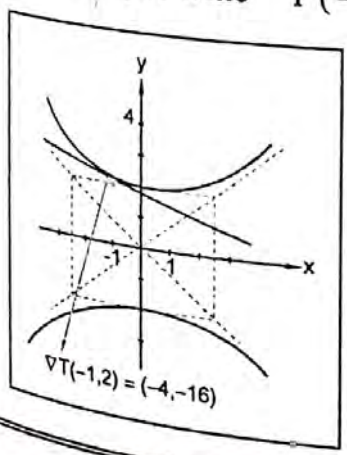
a) Se pide hallar : $\nabla T\,(-1,2)$

Veamos: $$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\,,\frac{\partial T}{\partial y}\right) = (4x\,,-8y)$$

$$\Rightarrow \nabla T(-1\,,2) = (4\,(-1)\,,-8\,(2)) = (-4\,,-16) = -4\,(1\,,4)$$

El insecto deberá moverse en la dirección del rector $(-4\,,-16)$ para que se aleje lo más rápido posible de la toxicidad.

b) En $(-1\,,2)$ se tiene $T(-1\,,2) = 2\,(-1)^2 - 4\,(2)^2 = -14$ luego la curva de nivel es :



$$-14 = 2x^2 - 4y^2$$

$$7 = 2y^2 - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y^2}{7/2} - \frac{x^2}{7} = 1$$

HIPÉRBOLA

c) La razón de cambio de la toxicidad del ambiente en el punto $(-1\ ,\ 2)$ en la dirección $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ es la $D_{\vec{\mu}}T(-1,2)$, siendo $\vec{\mu}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$.

Veamos.

Por definición de derivada direccional de T en el punto $(-1\ ,\ 2)$ en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}$, es :

$$D_{\vec{\mu}}T(-1,2)=\nabla T(-1,2)\cdot\vec{\mu}$$

i) Hallar $\nabla T=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, sabiendo que $T(x,y)=2x^2-4y^2$

$=(4x\ ,-8y)$ y $\nabla T\ (-1\ ,\ 2)=(-4\ ,-16)$

ii) Luego, $D_{\vec{\mu}}T(-1,2)=(-4,-16).\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(4-32)=-\frac{28}{\sqrt{5}}$

Problema 8 Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por : $f(x,y)=\text{Ln}\,(1+x^2+y^2)-\text{Arc}\tan(x^2)$. En el punto $(1,1)$, calcular el valor de la derivada direccional máxima de f y encontrar la dirección en la cual alcanza este valor máximo.

Solución:

Se pide hallar :

a) $\|\nabla f(1\ ,\ 1)\|$, y b) $\nabla f(1\ ,\ 1)$

Veamos:

a) $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\frac{2x}{1+x^4}\ ,\ \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$$

$$\nabla f(1,1)=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{2},\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\|\nabla f(1,1)\|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

b) $\nabla f(1,1)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

PROBLEMA 9 En qué puntos del dominio de la función : $f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{3+x^2}$ y qué direcciones unitarias $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2)$ existen las derivadas direccionales.

a) cuando $y>0$ b) cuando $y=0$

Solución:

1. El dominio de f es : $y \geq 0$, esto es, $D=\{(x,y) \in / \, y \geq 0\}$

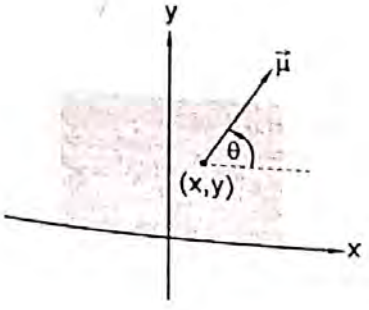
2. La derivada direccional de f en el punto $(x,y) \in D$ en la dirección del vector $\vec{\mu}=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, es :

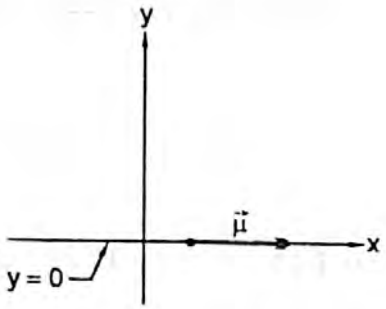
$$D_{\vec{\mu}} f(x,y)=\nabla f(x,y).(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$$

$$=\left(\frac{-2x\sqrt{y}}{(3+x^2)^2},\frac{1}{2\sqrt{y}(3+x^2)}\right).(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3+x^2}\left[\frac{-2x\sqrt{y}}{3+x^2}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos\theta\right]}_{(*)}$$

3. Responder la parte a) $y>0$. La función que aparece en (*) es un número real para $y>0$ y θ toma valores en $[0,2\pi]$. Por lo tanto, la $D_{\vec{\mu}} f(x,y)$ existe en todas las direcciones de $\vec{\mu}$ para $y>0$.





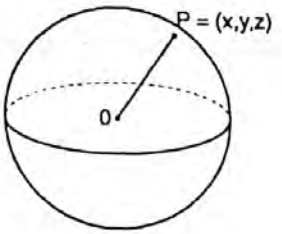
4. Responder la parte b) $y=0$. Al observar (*), notamos que para $y=0$, la expresión (*) no es un número real. Luego, para $y=0$, la $D_{\vec{\mu}} f(x,y)$ no existe.

PROBLEMA 10 La temperatura T en una esfera de metal sólida es inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera el cual se considera que es el origen. La temperatura en el punto $(1,2,2)$ es 120° C.

a) Encontrar la razón de cambio de T en $(1,2,2)$ en dirección hacia el punto $(2,1,3)$.

b) Demostrar que en cualquier punto de la esfera la dirección de máximo aumento de la temperatura está dada por un vector que apunta hacía el origen.

Solución:



Por dato del Problema :

$$T(x,y,z)=\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad , \text{ donde} \quad d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

es la distancia de P al origen.

La temperatura en $(1,2,2)$ es 120° C, esto es, $T(1,2,2)=120$

$$\frac{K}{\sqrt{1+4+4}}=120$$

$$k=360$$

Luego, $\boxed{T(x,y,z)=\frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$

a) Se pide : $\boxed{D_{\vec{\mu}}T(1,2,2)=\nabla T(1,2,2).\vec{\mu}}$, donde $\vec{\mu}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$

$P=(1,2,2)$

$Q=(2,1,3)$

1° hallar $\nabla T=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial z}\right)$

$$=\left(\frac{-360x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{-360y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{-360z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

y $\nabla T(1,2,2)=\left(\frac{-360}{3},\frac{-360(2)}{3},\frac{-360(2)}{3}\right)=-120(1,2,2)$

2° hallar $\vec{\mu}=\frac{Q-P}{|Q-P|}=\frac{(1,-1,1)}{|(1,-1,1)|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

3° Luego, $D_{\vec{\mu}}T(P)=-120(1,2,2).\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)=-\frac{120}{\sqrt{3}}$

b) La dirección del máximo crecimiento de la temperatura está dado por la $\nabla T(x,y,z)$, esto es $\nabla T(x,y,z) = \frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-x,-y,-z)$.

PROBLEMA 11 El capitán Ralph tiene dificultades acerca del lado soleado de mercurio. La temperatura del casco de la nave cuando él está en la posición (x,y,z) estará dada $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ donde x, y, z están medidas en metros. Actualmente está en $(1,1,1)$.

a) ¿En **que dirección** deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?

b) Si la nave viaja a e^8 m. por segundo ¿con qué rapidez decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?

c) Si se dirige hacia el punto $(1,2,1)$ ¿Cuál será la razón de cambio de la temperatura del casco?.

Solución:

a) La dirección de avanzar para **disminuir** más rápidamente la temperatura T es $-\nabla T(1,1,1)$.

1° hallar $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$

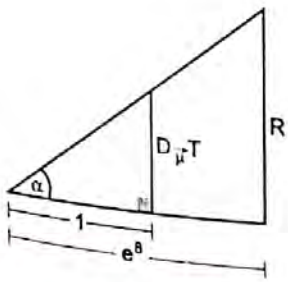
$$= \left(-2x\,e^{-x^2-2y^2-3z^2}, -4y\,e^{-x^2-2y^2-3z^2}, -6z\,e^{-x^2-2y^2-3z^2}\right)$$

2° $\nabla T(1,1,1) = \left(-2e^{-6}, -4e^{-6}, -6e^{-6}\right)$

Luego $-\nabla T(1,1,1) = e^{-6}(2,4,6)$.

Es decir, la nave debe moverse en la dirección $e^{-6}(2,4,6)$

b)



Se pide hallar R.

Por semejanza: $\frac{R}{D_{\vec{\mu}}T} = \frac{e^8}{1} \Rightarrow \boxed{R = e^8 D_{\vec{\mu}}T}$ .... (1)

donde $\vec{\mu} = \frac{-\nabla T(1,1,1)}{|-\nabla T(1,1,1)|} = \frac{e^{-6}(2,4,6)}{|e^{-6}(2,4,6)|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$

Pero $D_{\vec{\mu}} T(1,1,1) = \nabla T(1,1,1).\vec{\mu}$

$$= e^{-6}(-2,-4,-6).\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{14}} e^{-6}[1+4+9] = -2e^{-6}\sqrt{14}$$

Luego $R = e^{8}.[-2e^{-6}\sqrt{14}]$

$$\boxed{R = -2e^{2}\sqrt{14}}$$

c) Se pide : $D_{\vec{\mu}} T(1,1,1)$, cuando $\vec{\mu}_{\overrightarrow{PQ}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$, $P = (1,1,1)$, $Q = (1,2,1)$

$$= \frac{(0,1,0)}{|(0,1,0)|} = (0,1,0)$$

Pero : $D_{\vec{\mu}} T(1,1,1) = \nabla T(1,1,1).\vec{\mu}$

$$= -e^{-6}(2,4,6).(0,1,0)$$

$$= -4\,e^{-6}$$

PROBLEMA 12 Sea $f(x,y) = \frac{x^2}{2+y^2}$

a) Si $f(x,y)$ es una colina. Hallar la dirección de máximo crecimiento si se parte del punto $(2, 1, 4/3)$

b) Una persona camina sobre la colina partiendo del punto $(2, 1, 4/3)$ en dirección al punto $(3, 2, 3/2)$. Hallar la razón de cambio instantáneo de la temperatura del medio ambiente dado por $T(x,y,z) = 4 + 2x^2 + y + z^3$ en el punto $(2, 1, 4/3)$.

Solución:

a) Como la función f va de IR^2 en IR, esto es $f : IR^2 \longrightarrow IR$, definido por $f(x,y) = \frac{x^2}{2+y^2}$; entonces debemos analizar en el punto $(2,1)$.

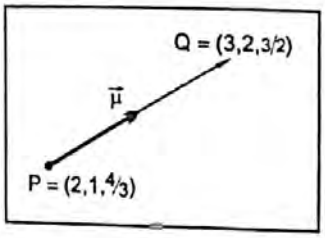
Se pide hallar $\nabla f(2,1)$:

Primero, hallar $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$= \left(\frac{2x}{2+y^2}, \frac{-2x^2y}{(2+y^2)^2}\right)$$

Segundo, $\boxed{\nabla f(2,1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-8}{9}\right)}$

b) Como la función es $T : IR^3 \longrightarrow IR$ definido por $T(x,y,z) = 4 + 2x^2 + y + z^3$, entonces la razón de cambio instantáneo de la temperatura T en P en la dirección de P a Q es $D_{\vec{\mu}} T(P)$, donde $P = \left(2, 1, \frac{4}{3}\right)$ y $\vec{\mu} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$.



Hallemos : $\boxed{D_{\vec{\mu}} T(P) = \nabla T(P) . \vec{\mu}}$

- De $T(x,y,z) = 4 + 2x^2 + y + z^3$ se obtiene :

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$= \left(4x, 1, 3z^2\right)$$

$$\Rightarrow \nabla T(2,1,4/3) = \left(8, 1, \frac{16}{3}\right)$$

- Hallar $\vec{\mu}$: $\vec{\mu} = \frac{Q-P}{|Q-P|} = \frac{(1,1,1/6)}{\sqrt{1+1+\frac{1}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{73}}(6,6,1)$

- Luego, $D_{\vec{\mu}} T(P) = \left(8, 1, \frac{16}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{73}}(6,6,1) = \frac{178}{3\sqrt{73}}$

PROBLEMA 13

a) La temperatura $T(x,y)$, en grado celsius, en cualquier punto (x,y) de una placa rectangular está dada por $T(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$. Encontrar la tasa de cambio de la temperatura en el punto $(1,1)$, en el sentido del vector $(1, -2)$.

b) Dada la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(P) = \| P \|$, hallar su mayor y su menor derivada direccional en el punto $P_0 = (1 , 1 , 1 , \dots , 1) \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

a) Se pide hallar: $D_{\vec{\mu}} T(1,1)$ siendo $\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$

Pero: $D_{\vec{\mu}} T(1,1) = \nabla T(1,1) . \vec{\mu}$; donde: $\nabla T(x , y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x} , \frac{\partial T}{\partial y} \right)$

De $T(x , y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ obtenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(1+x^2+y^2)(y) - xy(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y(1+y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{(1+x^2+y^2)(x) - xy(2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Luego: $\frac{\partial T}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{9}$

$\frac{\partial T}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{9}$

Entonces: $\boxed{\nabla T(1,1) = \left(\frac{1}{9} , \frac{1}{9} \right)}$

y $D_{\vec{\mu}} T(1,1) = \left(\frac{1}{9} , \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2) = -\frac{1}{9\sqrt{5}}$

b) Se pide hallar:

i) $\| \nabla f(P_0) \|$ y *ii)* $- \| \nabla f(P_0) \|$

Si $P \in \mathbb{R}^n \Rightarrow P = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$

PROBLEMA 14 Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) \neq 0$, demostrar que la mayor derivada direccional de f en x_0 tiene lugar en la dirección $\nabla f(x_0)$ y su valor es $\| \nabla f(x_0) \|$

Solución:

1. Si la función $f: IR^n \longrightarrow IR$ es una función diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces existe la : $D_{\vec{\mu}} f(x_0) = \nabla f(x_0) . \vec{\mu}$, $\vec{\mu}$ vector unitario de IR^n .

2. Supongamos que θ es el ángulo entre los vectores $\nabla f(x_0)$ y $\vec{\mu}$, entonces:

$$\nabla f(x_0) . \vec{\mu} = \| \nabla f(x_0) \| \, \| \vec{\mu} \| \cos\theta \quad , \quad \text{pero} \quad \| \vec{\mu} \| = 1$$

$$= \| \nabla f(x_0) \| \cos\theta$$

Analizar:

El máximo valor que tiene $\nabla f(x_0) . \vec{\mu}$ es cuando $\theta = 0°$, esto es :

$$\text{Máx}\left(\nabla f(x_0) . \vec{\mu} \right) = \| \nabla f(x_0) \|$$

Este valor máximo, tiene lugar en la dirección del vector $\nabla f(x_0)$.

PROBLEMA 15 Una abeja está volando desde un foco caliente que se encuentra en el origen, en una trayectoria que describe una curva C, de tal manera, que el vector posición (0 posición de la abeja) en el instante t es : $f(t) = (t \cos \pi t , t \operatorname{sen} \pi t , t)$, $t \in IR_+$.

a) Determinar la posición de la abeja en el instante $t = 1$ y el vector tangente a C en ese punto.

b) La temperatura T en grados Celcius en (x,y,z) es $T(x,y,z) = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2}$

Hallar la razón de cambio de la temperatura si la abeja decide seguir en dirección del vector tangente a la curva

Solución:

a) La posición de la abeja en el instante $t = 1$, es: $f(1) = (\cos \pi, \operatorname{sen} \pi, 1) = (-1 , 0 , 1)$

El vector tangente a la curva C en el punto $(-1 , 0 , 1)$, es :

$$f'(t) = (\cos \pi t - t \pi \operatorname{sen} \pi t, \operatorname{sen} \pi t + t \pi \cos \pi t , 1)$$

$$f'(1) = (\cos \pi - \pi \operatorname{sen}\pi , \operatorname{sen} \pi + \pi \cos \pi , 1)$$

$$= (-1 , -\pi , 1).$$

b) La razón de cambio de la temperatura si la abeja sigue la dirección del vector tangente $(-1, -\pi, 1)$ es:

$$D_{\vec{\mu}} T(-1,0,1) = \nabla T(-1,0,1) . \vec{\mu}$$

$$= (5,0,-5) . \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}} (-1,-\pi,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}} (-5-5)$$

$$= \frac{-10}{\sqrt{2+\pi^2}}$$

donde: $\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}} (-1,-\pi,1)$

$$\nabla T(x,y,z) = \left(\frac{-20x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-20y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-20z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right)$$

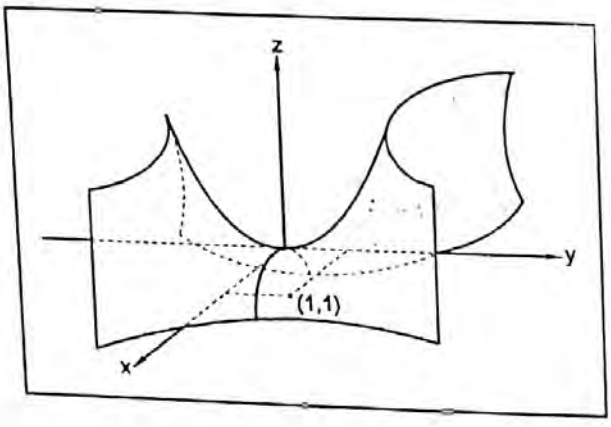
$$\nabla T(-1,0,1) = \left(\frac{20}{4}, 0, \frac{-20}{4} \right)$$

$$= (5,0,-5)$$

PROBLEMA 16

Una hormiga se encuentra en el punto $(1,1,0)$ del paraboloide hiperbólico $S : z = y^2 - x^2$. ¿En cuál sentido del plano xy debe moverse para seguir la cuesta más empinada?

Solución:



Se pide hallar $\nabla f(1,1)$, donde :

$f(x,y) = y^2 - x^2$

Veamos:

1. $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$= (-2x, 2y)$

2. $\nabla f(1,1) = (-2,2)$.

La hormiga debe moverse en el sentido del vector $(-2, 2)$ del plano XY para seguir la cuesta más empinada .

PROBLEMA 17

Calcule la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2 - 8xy + z^2$ en el punto $(4,0,1)$ en la dirección de la "normal exterior" a la superficie $x^2 + y^2 + z = 17$.

Solución:

Se pide hallar: $D_{\vec{\mu}} f(4,0,1)$, donde $\vec{\mu}$, es un vector unitario que sigue la dirección de la normal exterior a la superficie $x^2 + y^2 + z = 17$.

Veamos:

1. La definición de la derivada de f en el punto $(4,0,1)$ en la dirección del vector $\vec{\mu}$, es: $D_{\vec{\mu}} f(4,0,1) = \nabla f(4,0,1) . \vec{\mu}$

2. Hallar $\nabla f(4,0,1)$ y el vector unitario $\vec{\mu}$

Veamos:

a) dado $f(x,y,z) = x^2 - 8xy + z^2$, se tiene :

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= (2x - 8y, -8x, 2z)$$

y $\nabla f(4,0,1) = (8, -32, 2)$

b) La normal exterior a la superficie $x^2 + y^2 + z = 17$ en el punto $(4,0,1)$ es $\nabla g(4\,0,1)$, siendo $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 17$.

i) De $g(x,y,z)$, obtenemos $\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$

$$= (2x, 2y, 1)$$

$$y \quad \nabla g(4,0,1) = (8,0,1)$$

ii) $\vec{\mu} = \frac{(8,0,1)}{\|(8,0,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{65}}(8,0,1)$

3. Luego, $D_{\vec{\mu}} f(4,0,1) = (8,-32,2) . \frac{1}{\sqrt{65}}(8,0,1)$

$$= \frac{66}{\sqrt{65}} = \frac{66\sqrt{65}}{65}$$

PROBLEMA 18 Sea $f(x,y)=\text{Ln}(1+x^2+y^2)-\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt$

a) Hallar la derivada direccional máxima de f en $(1,1)$ y la dirección en que se alcanza este valor.

b) Hallar todos los vectores unitarios $\vec{\mu}$ tales que $D_{\vec{\mu}} f(1,1)=0$

Solución:

a) Se pide hallar : *i*) valor máximo de $D_{\vec{\mu}} f(1,1)=|\nabla f(1,1)|$

ii) dirección que alcanza el máximo valor de f en $P=\nabla f(1,1)$

Veamos:

Mirando La función $f(x,y)$, hallar :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\frac{2x}{1+x^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{2y}{1+x^2+y^2}-0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(1,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right)$$

$$=\left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{2}\ ,\ \tfrac{2}{3}\right)$$

$$=\left(-\tfrac{1}{3}\ ,\ \tfrac{2}{3}\right)$$

Luego , *i*) valor máximo de $D_{\vec{\mu}} f(1,1)=\left\|\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)\right\|=\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{9}}=\tfrac{\sqrt{5}}{3}$

ii) dirección de crecimiento máximo de $f(1,1)=\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)$.

b) Elegir $\vec{\mu}=(\cos\theta,\text{sen}\,\theta)$, debemos hallar θ

Veamos:

$$D_{\vec{\mu}} f(1,1)=\nabla f(1,1).\vec{\mu}$$

$$=\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right).(\cos\theta,\text{sen}\,\theta).$$

$$=-\tfrac{1}{3}\cos\theta+\tfrac{2}{3}\text{sen}\,\theta$$

Hacer $D_{\vec{\mu}} f(1,1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta = 0$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\right) + k\pi$$

$$k = 0, 1$$

PROBLEMA 19 Sea la función $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ y C la curva de intersección de las superficies $S_1 : 2x + y + z = 2$ y $S_2 : 2x^2 + y - z = 0$. Hallar la derivada direccional de f en el punto $(0,0,0)$ y en la dirección del vector normal a C en el punto $(0,1,1)$.

Solución:

a) Se pide hallar $D_{\vec{\mu}} f(0,0,0)$, $\vec{\mu}$ = vector normal a C en $(0,1,1)$

Necesitamos:

i) Hallar la curva $C = S_1 \cap S_2 \begin{cases} 2x + y + z = 2 & (1) \\ 2x^2 + y - z = 0 & (2) \end{cases}$

Al sumar (1) + (2) : $2x^2 + 2x + 2y = 2 \iff x^2 + x + y = 1$

$$\iff y = 1 - x^2 - x \ldots\ldots (3)$$

Hacer $\boxed{x = t}$, en (3) : $\boxed{y = 1 - t^2 - t}$

De (1) Despejar z : $z = 2 - 2x - y$

$$z = 2 - 2t - 1 + t^2 + t \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = t^2 - t + 1}$$

Así obtenemos C : $\alpha(t) = (t, 1 - t^2 - t, t^2 - t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$

cuando $t = 0$, $\alpha(0) = (0, 1, 1)$

El vector normal a C en $t = 0$ es $N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$

donde $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$

De α (t) obtenemos: $\alpha'(t) = (1, -2t-1, 2t-1)$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1+(-2t-1)^2+(2t-1)^2} = \sqrt{8t^2+3}$$

Luego $$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{8t^2+3}} , \frac{-2t-1}{\sqrt{8t^2+3}} , \frac{2t-1}{\sqrt{8t^2+3}} \right)$$

$$T'(t) = \left(-\frac{8t}{(8t^2+3)^{3/2}} , \frac{8t-6}{(8t^2+3)^{3/2}} , \frac{8t+6}{(8t^2+3)^{3/2}} \right)$$

Donde $$T'(0) = \left(0 , \frac{-6}{3\sqrt{3}} , \frac{6}{3\sqrt{3}} \right) = \left(0 , \frac{-2}{\sqrt{3}} , \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}(0,-1,1)$$

La normal unitaria es : $\vec{N} = \vec{\mu} = \left(0 , -\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

b) $D_{\vec{\mu}} f(0,0,0) = \nabla f(0,0,0) . \vec{\mu}$

$$= (1,1,1) \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 0$$

Donde $\nabla f = \left(e^{x+y+z} , e^{x+y+z} , e^{x+y+z} \right)$

$\nabla f(0,0,0) = (1,1,1)$

PROBLEMA 20

a) Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

probar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es discontinua en el origen y que la función f es diferenciable en (0,0).

b) Hallar la derivada de la función $T(x,y) = \text{Ln}(x^2 + y^2)$ en el punto $(1,2)$ de la curva $y^2 = 4x$, en la dirección del vector tangente a la curva en dicho punto.

Solución:

a) Vamos a probar que f es diferenciable en (0,0).

i) En primer lugar, comprobemos que existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}} = 0$$

ii) De manera similar, se cumple $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

iii) Probar que el siguiente límite es cero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right](x-0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right](y,0)\right|}{\|(x,y)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 0$$

Pues, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

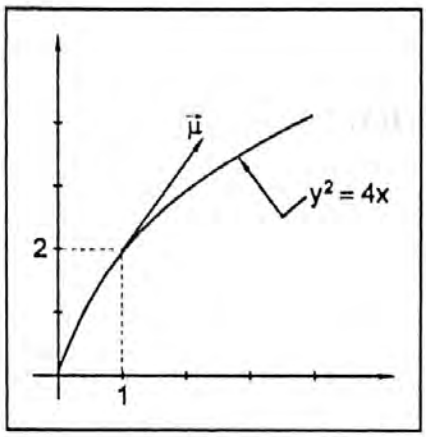
$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon \text{ siempre que } \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Búsqueda de δ en términos de δ

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad , \quad \text{pues } |\operatorname{sen} u| < 1.$$

Elegir $\delta = \varepsilon$

b) Se pide hallar la derivada direcional de la función T en la dirección del vector unitaro $\vec{\mu}$, en el punto $(1,2)$ de la curva $y^2 = 4x$, esto es $D_{\vec{\mu}}\,T$; donde $\vec{\mu}$ sigue la dirección del vector tangente a la curva en $(1,2)$. Ver el gráfico.



Por definición de derivada direccional se tiene:
$D_{\vec{\mu}}\,T = (\nabla T(1,2)) \cdot \vec{\mu}$

i) Cálculo de ∇T en $(1,2)$.

De $T(x,y) = \text{Ln}(x^2 + y^2)$ se obtiene

$$\nabla T(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} , \frac{2y}{x^2+y^2} \right)$$

y $\nabla T(1,2) = \left(\frac{2}{5} , \frac{4}{5} \right)$

ii) Cálculo del vector unitario $\vec{\mu}$.

Si parametrizamos la curva $y^2 = 4x$ por $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{4} , t \right)$, $y = t$

El vector tangente es : $\alpha'(t) = \left(\frac{t}{2} , 1 \right)$

En $y = t = 2$ es : $\alpha'(2) = (1,1)$

Luego , $\vec{\mu} = \frac{(1,1)}{|(1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

En consecuencia : $D_{\mu}\,T = (\nabla T(1,2)) \cdot \vec{\mu} = \left(\frac{2}{5} , \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

a) Falta probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$:

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \,\text{sen}\, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Haciendo : $r = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$;

el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ es equivalente a $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta)$.

En este problema, el $\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta)$ **NO** existe. Esta es la razón por lo que afirmamos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ **NO** es continua en $(0,0)$.

4.12 INCREMENTOS Y DIFERENCIALES

Sea la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$

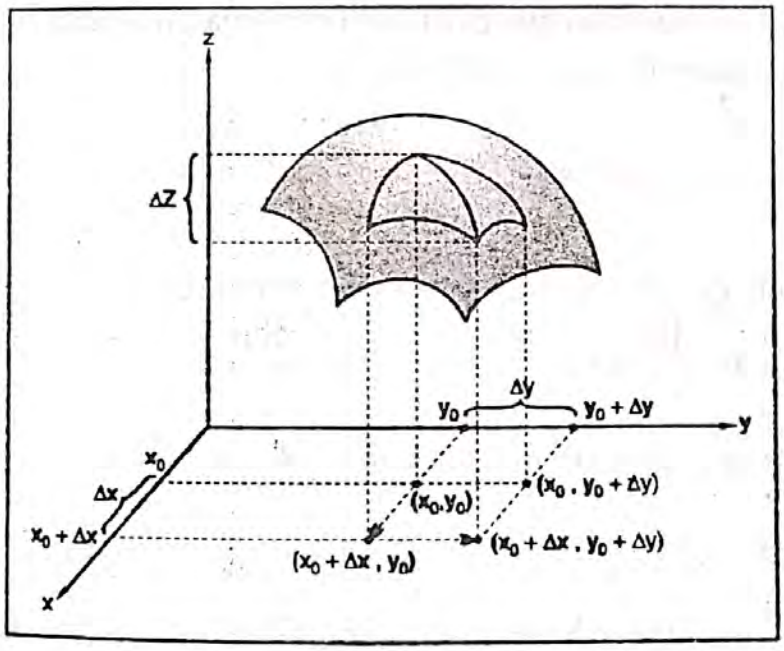
Definición 1

Si $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ son los incrementos de x e y, respectivamente, el incremento Δz de $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0)

es $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

En general, el incremento de $z = f(x,y)$ en (x,y), es:

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$



Ejemplo 1 Dado $f(x,y) = 5x^2 - xy$,

a) hallar Δz

b) Si (x,y) varía de $(1,2)$ a $(0.9, 2.02)$, calcular Δz

Solución:

a) $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$= 5(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) - 5x^2 + xy$

$= 5x^2 + 10x\,\Delta x + 5(\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - (\Delta x)(\Delta y) - 5x^2 + xy$

$= 10x\,\Delta x + 5(\Delta x)^2 - x\Delta y - y\Delta x - (\Delta x)(\Delta y)$

b) Sustituyendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.9 - 1 = -0.1$, $\Delta y = 2.02 - 2 = 0.02$ en Δz obtenemos:

$$\Delta z = 10\,(1)\,(-0.1) + 5\,(-0.1)^2 - (1)\,(0.02) - (2)\,(-0.1) - (-0.1)\,(0.02)$$
$$= -1 + 0.05 - 0.02 + 0.2 + 0.002 = -0.768$$

Este resultado, también se obtiene haciendo:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(0.9\,,\,2.02) - f(1,2)\\ &= 5\,(0.9)^2 - (0.9)\,(2.02) - [\,5\,(1)^2 - (1)\,(2)\,]\\ &= 4.05 - 1.818 - [\,5 - 2\,]\\ &= -0.768\end{aligned}$$

En el teorema 1 probaremos que existe una pequeña diferencia entre el

Δz y el $dz = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y\,\Delta y$

Δz: *Incremento de Z*; dz: *Diferencial de Z*

Dicha diferencia es $\Delta z - dz = \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$, donde ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy tal que $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

Antes de enunciar y demostrar el teorema 1, volvamos al Ejemplo 1

Se tenía : $\Delta z = \underline{10x\,\Delta x} + 5\,(\Delta x)^2 - \underline{x\Delta y} - \underline{y\Delta x} - (\Delta x)\,(\Delta y)$

$$= \underbrace{(10x - y)}_{f_x}\,\Delta x + \underbrace{(-x)}_{f_y}\,\Delta y + \underbrace{(5\Delta x)}_{\varepsilon_1}\,\Delta x + \underbrace{(-\Delta x)}_{\varepsilon_2}\,\Delta y$$

$$= \underbrace{f_x(x\,,\,y)\,\Delta x + f_y(x\,,\,y)\,\Delta y}\; + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

$$= \underbrace{(f_x(x\,,\,y)\,,\,f_y(x\,,\,y))}_{Df(x,y)}\,.\,(\Delta x\,,\,\Delta y) + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

$.$: *producto interno*

En resumen se tiene:

$$\Delta z = Df(x\,,y)\,.\,(\Delta x\,,\,\Delta y) + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

Donde: 1) Δz se llama incremento de la función $f(x,y)$

2) $Df(x,y)\cdot(\Delta x\,,\,\Delta y) = f_x\,\Delta x + f_y\,\Delta y$ se llama diferencial de f en (x,y) y $(\Delta x\,,\,\Delta y)$.

3) $Df(x,y) = (f_x\,,\,f_y)$ es la derivada de f en (x,y)

En el ejemplo 1, Para $x = 1$, $x = 2$, $\Delta x = -0.1$, $\Delta y = 0.02$, se tiene :

a) El valor de : $Df(x,y)$ en el punto $(1,2)$ es :

$$Df(1,2) = (f_x(1,2),\, f_y(1,2)) = (8\,,-1)$$

donde
$$\begin{cases} \text{De } f(x,y) = 5x^2 - xy \\ f_x(x,y) = 10x - y \Rightarrow f_x(1,2) = 8 \\ f_y(x,y) = -x \Rightarrow f_y(1,2) = -1 \end{cases}$$

b) El valor de $Df(x\,,\,y).(\Delta x\,,\,\Delta y)$ es $Df(1,2) = (8\,,-1).(-0.1\,,\,0.02)$

$$= -0.8 - 0.02 = -0.82$$

c) En $\Delta z = \underbrace{Df(x,y).(\Delta x\,,\,\Delta y)} + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$

$$-0.768 = -0.82 + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

$$\boxed{0.052 = \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y}$$

este resultado es casi cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)$

d) De la relación $\Delta z - Df(x,y)\,.\,(dx\,,\,dy) = \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$, se obtiene :

$$\boxed{f(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y) - f(x,y) - f_x(x,y)\,dx - f_y(x,y)\,dy = \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y}$$

En esta igualdad, cuando $\varepsilon_1 \longrightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \longrightarrow 0$, entonces

$$|\,f(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y) - f(x,y) - f_x(x,y)\,dx - f_y(x,y)\,dy\,| \longrightarrow 0$$

Este límite nos indica que :

$$\underbrace{f(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)}_{\text{valor de la función } f \text{ en el punto } (x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)} \approx \underbrace{f(x,y) + f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)dy}_{\text{Ecuación del plano tangente en el punto } (x\,,\,y\,,\,f(x,y)) \in Gr(f)}$$

Esta igualdad nos indica que el plano tangente es una buena aproximación a la función $f(x,y)$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)$ en $(x, y, f(x,y))$.

TEOREMA 1 Sea la función $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

donde $D = \{ (x,y)/a < x < b,\ c < y < d \}$ es la región rectangular abierto. supongamos que f_x y f_y existen en todo D y son continuas en $(x_0, y_0) \in D$, si $(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y) \in D$ y $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0)$, entonces.

$$\boxed{\Delta z = f_x (x_0 , y_0)\, \Delta x + fy (x_0 , y_0)\, \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}$$

donde ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy tal que $\lim\limits_{(\Delta x , \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$ y $\lim\limits_{(\Delta x , \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

Demostración:

1. Partimos de la hipótesis: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0)$ ..... (1)

2. Restar y sumar el término $f(x_0 , y_0 + \Delta y)$ en (1)

$$\Delta z = [f(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta x) - f(x_0 , y_0 + \Delta y)] + [f(x_0 , y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0)] \ldots (a)$$

3. definimos la función g de una variable x del siguiente modo

$$g : \langle a, b\rangle \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x , y_0 + \Delta y)$$

Al derivar obtenemos $g'(x) = f_x (x , y_0 + \Delta y)$ para $a < x < b$

4. Aplicar en g el teorema del valor medio en el intervalo $[x_0 , x_0 + \Delta x]$:

"existe un número $\mu \in \langle x_0 , x_0 + \Delta x\rangle$ tal que $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(\mu)\, \Delta x$ .... (*)

5. De la función $g(x) = f(x , y_0 + \Delta y)$ deducimos :

$$\left.\begin{array}{l} g(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y) \\ g(x_0) = f(x_0 , y_0 + \Delta y) \end{array}\right\} (i)$$

Derivar : $g'(x) = f_x(x , y_0 + \Delta y)$

Si $x = \mu$. $g'(\mu) = f_x(\mu , y_0 + \Delta y)$ ..... *(ii)*

Reemplazar *(i)* y *(ii)* en (*) :

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0 + \Delta y) = f_x(\mu , y_0 + \Delta y)\,\Delta x} \quad \text{..... (b)}$$

6. De manera similar al paso 3, definamos la función

$$h : \langle c , d\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow h(y) = f(x_0 , y)$$

que al derivar obtenemos $h'(y) = f_y(x_0 , y)$

Aplicar el teorema del valor medio a la función h en el intervalo $[y_0 , y_0 + \Delta y]$:

"existe $\upsilon \in \langle y_0 , y_0 + \Delta y\rangle$ tal que $h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(\upsilon)\,\Delta y$

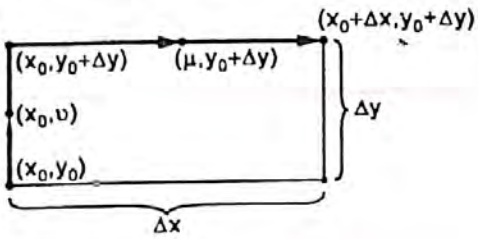
o $\boxed{f(x_0 , y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0) = f_y(x_0 , \upsilon)\,\Delta y}$ .... (c)

7. Sustituir (c) y (b) en (a) :

$$\boxed{\Delta z = f_x(\mu , y_0 + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0 , \upsilon)\,\Delta y} \quad \text{..... (d)}$$

8. Ahora, tenemos $f_x(\mu , y_0 + \Delta y)$ que es una función en la variable μ, además $f_y(x_0 , \upsilon)$ es una función en la variable υ. Las diferencias de éstas funciones en los puntos $(\mu , y_0 + \Delta y)$, (x_0 , y_0) y (x_0 , υ), (x_0 , y_0)

son respectivamente: $\begin{cases} f_x(\mu , y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 , y_0) \\ f_y(x_0 , \upsilon) - f_y(x_0 , y_0) \end{cases}$



Estas diferencias tienen las siguientes características:

i) Son funciones de μ y υ, respectivamente

ii) f_x y f_y son continuas, según la hipótesis dada en el enunciado

iii) Si $\mu \longrightarrow x_0$, $y \longrightarrow y_0$, $\Delta x \longrightarrow 0$, $\Delta y \longrightarrow 0$, entonces dichas diferencias tienden a cero.

iv) Llamemos a dichas diferencias ε_1 y ε_2, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = f_x(\mu , y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 , y_0) & \Rightarrow f_x(\mu , y_0 + \Delta x) = f_x(x_0 , y_0) + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 = f_y(x_0 , \upsilon) - f_y(x_0 , y_0) & \Rightarrow f_y(x_0 , \upsilon) = f_y(x_0 , y_0) + \varepsilon_2 \end{array}\right\} \ldots . (e)$$

9. Reemplazar (e) en (d):

$$\Delta z = \left(f_x(x_0 , y_0) + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(f_y(x_0 , y_0) + \varepsilon_2\right)\Delta y$$

$$= f_x(x_0 + y_0)\,\Delta x + f_y(x_0 , y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

Definición 2

Sea la función $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

y sean Δx y Δy incrementos de x e y, respectivamente.

a) Las diferenciales dx y dy de las variables independientes x e y son $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$.

b) La diferencial dz de la variable dependiente z es :

$$dz = f_x(x , y)\,dx + f_y(x , y)\,dy$$

o

$$df(x , y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x , y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x , y)\,dy$$

Ejemplo Sea la función $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ definido por $f(x , y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ donde $D = \{(x,y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Hallar $df\left(\sqrt{3} , \sqrt{6}\right)$

Solución:

En primer lugar, hallamos las derivadas parciales:

De $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ $\begin{cases} f_x(x,y)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \\ f_y(x,y)=\dfrac{-2y}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}=-\dfrac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \end{cases}$

En segundo lugar, evaluar en el punto $(\sqrt{3},\sqrt{6})\in D$

$$f_x\left(\sqrt{3},\sqrt{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\quad,\quad f_y\left(\sqrt{3},\sqrt{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

En tercer lugar, reemplazar en la definición de diferencial de f en el punto $\left(\sqrt{3},\sqrt{6}\right)$:

$$\boxed{df\left(\sqrt{3},\sqrt{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}dx-\frac{\sqrt{6}}{4}dy}$$

DEDUCCIÓN IMPORTANTE: En el segundo miembro, los símbolos dx, dy son variables, digamos $dx=h$, $dy=k$. Entonces el segundo miembro es la aplicación lineal

$T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por $\boxed{T(h,k)=-\frac{\sqrt{3}}{4}h-\frac{\sqrt{6}}{4}k}$

Usando matrices, la aplicación lineal T se puede expresar del siguiente modo :

$$T\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$$

que es el producto de una matriz 1×2 por otra matriz 2×1.

De este producto de matrices, deducimos:

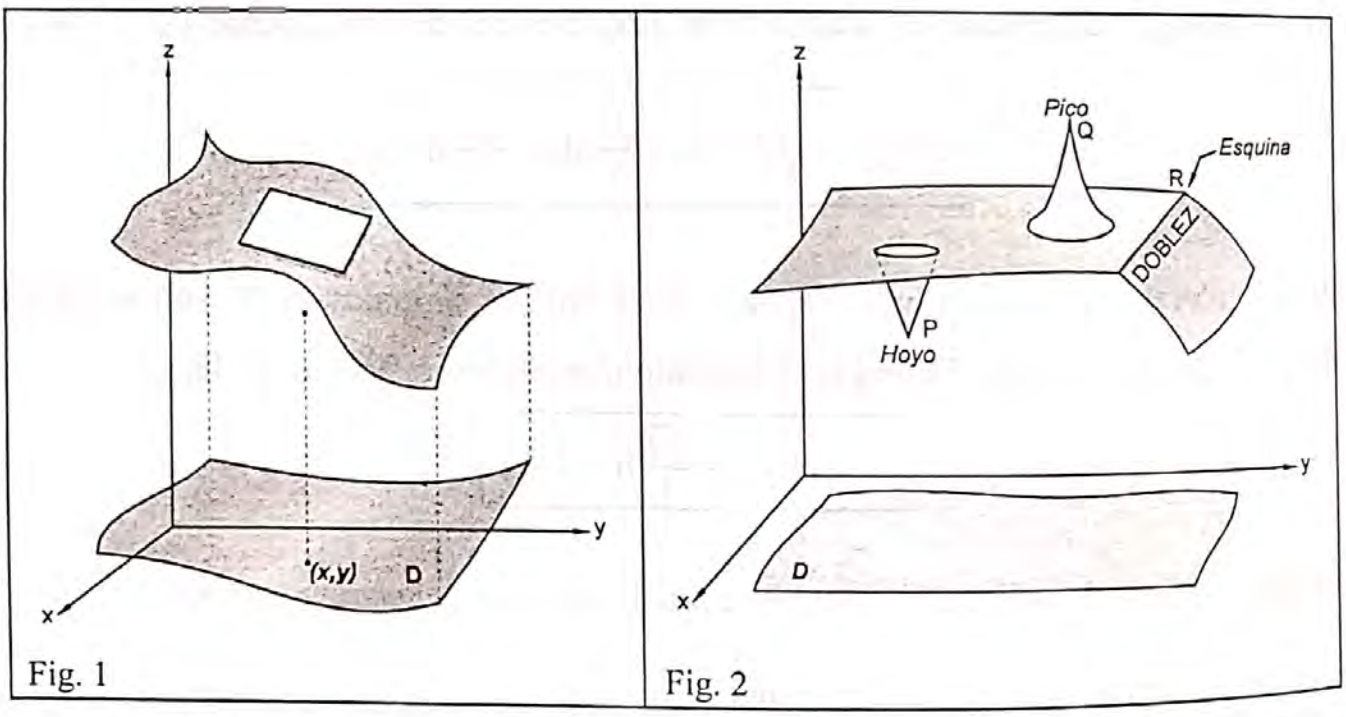
a) La matriz $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4}\end{bmatrix}$ "es la derivada de f en $(\sqrt{3},\sqrt{6})$". Esta matriz, es la GRADIENTE de f en $(\sqrt{3},\sqrt{6})$.

b) La aplicación lineal $T\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ es "la diferencial de f en $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ y (h, k)"

CONCLUSIÓN: El resultado obtenido, usando matrices, nos ilustra que el calculo diferencial se ha algebrizado.

4.13 DIFERENCIABLIDAD

Supongamos que el gráfico de la función $f: D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ tenga una de las siguientes formas : $(x,y) \longrightarrow Z = f(x,y)$



En la figura 1: tenemos una función continua (intuitivamente es una superficie cuya gráfica no está rota ni tiene agujeros), pero además en cada punto $(x, y, f(x,y)) \in Gr(f)$ queda bien definida un único plano tangente.

En la figura 2: ocurre que en los puntos P, Q y R del gráfico de f se puede trazar más de un plano tangente. Esto es, en los puntos P, Q y R la función $f(x,y)$ no es diferenciable.

Para precisar estas ideas, necesitamos una definición adecuada de "$f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0)". En realidad esta definición no es tan sencillo, sin embargo daremos dos definiciones equivalentes y un teorema que nos dará un criterio más sencillo de manejar.

Definición 1

Sea la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D conjunto abierto.

"f(x,y) es diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$" si $\Delta f(x,y)$ se puede expresar en la forma :

$$\Delta f(x,y) = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta x \quad \text{tal que}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2 = 0 \quad ; \quad \text{donde } (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D.$$

Definición 2

Sea la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D abierto. Decimos que "f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$" si f_x y f_y existen en (x_0, y_0) y si"

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - [f'_x(x_0,y_0)](x - x_0) - [f'_y(x_0,y_0)](y - y_0)|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0 \quad ..(1)$$

Si hacemos $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$

$x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$ tendremos:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\,h - f'_y(x_0, y_0)\,k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Observación: La definición 2 implica probar tres cosas:

1° Existen las derivadas parciales f'_x y f'_y en $(x_0, y_0) \in D$.

2° Que el $$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

es equivalente probar que: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

3° $$\frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'(x_0,y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} < \varepsilon$$

Siempre que $|x - x_0| < \delta \ \wedge \ |y - y_0| < \delta \ \wedge \ (x,y) \in D$

La igualdad (1) nos dice que el **PLANO TANGENTE**

$$z = f(x_0, y_0) + [f'_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f'_y(x_0, y_0)](y - y_0)$$

es un valor aproximado de $f(x,y)$ en el entorno de (x_0, y_0).

De aquí parte la siguiente definición:

> f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existe el **PLANO TANGENTE** al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, siendo la ecuación de ese plano :
>
> $$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0).(y - y_0).$$

TEOREMA 2 *(Condición suficiente de diferenciabilidad)* Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D abierto y (x_0, y_0) un punto de la región D. Si existen las derivadas parciales $f'_x(x_0, y_0)$ y $f'_y(x_0, y_0)$ y si además f, f'_x, f'_x son continuas en una bola abierta centrada en (x_0, y_0); entonces $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0).

Demostración:

Por demostrar que $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)h - f'_y(x_0,y_0)k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

esto es, debemos demostrar que:

$$\frac{\left| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} < \varepsilon$$

Veamos:

1. En la diferencia $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ restar y sumar el término $f(x_0, y_0 + k)$, para obtener :

$$\underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{(I)} + \underbrace{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{(II)} =$$

2. Aplicar el teorema del valor medio en (I) y (II):
   a) Para (I), existe $y_1 = (c_1 , y_0 + k)$, con $c_1 \in \langle x_0 , x_0 + h \rangle$ tal que

$$f(x_0 + h , y_0 + k) - f(x_0 , y_0 + k) = f'_x(y_1)\, h \quad , \quad h = x - x_0$$

   b) Para (II), existe $y_2 = (x_0 , c_2)$ con $c_2 \in \langle y_0 , y_0 + k \rangle$ tal que

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 , y_0) = f'_y(y_2)\, k \quad , \quad k = y - y_0$$

3. Los resultados obtenidos en a) y b) reemplazar en 1 :

$$f(x_0 + h , y_0 + k) - f(x_0 , y_0) = f'_x(y_1)\, h + f'_y(y_2)\, k$$

4. Por lo tanto, tendremos :

$$\left| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0 , y_0) - f'_x(x_0 , y_0)\, h - f'_y(x_0 , y_0)\, k \right| = \left| f'_x(y_1)h + f'_y(y_2)k - f'_x(x_0 , y_0)h - f'_y(x_0 , y_0)k \right|$$

$$= \left| \left(f'_x(y_1) - f'_x(x_0 , y_0)\right)h + \left(f'_y(y_2) + f'_y(x_0 , y_0)\right)k \right|$$

$$\leq \left| f'_x(y_1) - f'_x(x_0 , y_0) \right| |h| + \left| f'_y(y_2) - f'_y(x_0 , y_0) \right| |k| \quad \text{pero} \quad |h| \leq \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h , k)\|$$

$$|k| \leq \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h , k)\|$$

$$\leq \left\{ \left| f'_x(y_1) - f'_x(x_0 , y_0) \right| + \left| f'_y(y_2) - f'_y(x_0 , y_0 \right| \right\} \|(h , k)\|$$

5. Por transitividad, hemos probado que :

$$\left| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0 , y_0) - f'_x(x_0 , y_0)\, h - f'_y(x_0 , y_0)\, k \right| \leq \left\{ \left| f'_x(y_1) - f'_x(x_0 , y_0) \right| + \left| f'_y(y_2) - f'_y(x_0 , y_0) \right| \right\} \|(h , k)\|$$

$$\frac{\left| f(x_0+h, y+k) - f(x_0 , y_0) - f'_x(x_0 , y_0)\, h - f'_y(x_0 , y_0)\, k \right|}{\|(h , k)\|} \leq \left| f'_x(y_1) - f'_x(x_0 , y_0) \right| + \left| f'_y(y_2) - f'_y(x_0 , y_0) \right|$$

6. Por hipótesis, las derivadas parciales f'_x y f'_y son continuas, por tanto los valores absolutos (1) y (2) tienden a cero cuando $(h , k) \longrightarrow (0 , 0)$. En consecuencia el lado izquierdo también tiende a cero, esto es, menor que ε. Esto prueba el teorema.

Nota : El recíproco de este teorema no es cierto.

4.13.1 Funciones de Clase C^1

Definición

Sea la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D es una región abierta, si la función f es continua en D y sus derivadas parciales f'_x y f'_y existen y son continuas en D, diremos que f es una función de clase C^1.

Función de Clase C^∞

Definición

Si $f(x,y)$ y todas sus derivadas de $f(x,y)$ existen y son continuas, diremos que f es de clase C^∞

Ejemplo Las funciones $f(x,y) = \text{sen}(x\ y)$; $g(x,y) = \cos(xy)$, $h(x) = e^{x^2+y^2}$ son funciones de clase C^∞.

Ejemplos Aclaratorios:

Ejemplo 1 Dado la función $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & , \text{ si } xy \geq 0 \\ 0 & , \text{ si } xy < 0 \end{cases}$

¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

Solución:

Analicemos:

1° Calculemos, si las derivadas parciales de $f(x,y)$ existen en $(0,0)$:

a) $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$, $h \neq 0$

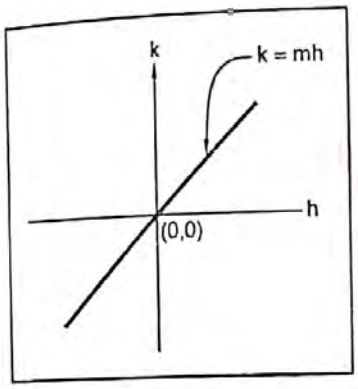
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(h)(0)}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} [0] = 0$$

b) $f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{(0)(k)}-0}{k}, k \neq 0$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} [0] = 0$$

Como vemos, sí existen las derivadas parciales de $f(x,y)$ en $(0,0)$, porque los resultados son números reales únicos.

2° Ahora, calcular el $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|f(0+h,0+k)-f(0,0)-(0)h-(0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$



$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{hk}}{\sqrt{h^2+y^2}}$$

Para calcular este límite, hagamos pasar por (0,0) el camino k = mh, donde m es cualquier número real :

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h(mh)}}{\sqrt{h^2+(mh)^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\sqrt{m}}{|h|\sqrt{1+m^2}}, \quad \sqrt{h^2} = |h|$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{1+m^2}}$$

Como m es cualquier número real, entonces el límite es cero si m = 0, pero si $m \neq 0$ se obtienen otros límites. Lo que se esperaba es que el límite sea sólo cero. Esto es, no existe límite cuando $(h,k) \longrightarrow (0,0)$.

Por lo tanto, afirmamos que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 2

Sea $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demostrar que la función f es diferenciable en el origen.

Solución:

Aplicar la definición:

f es diferenciable en $(0,0)$, sí :

1° Existen las derivadas parciales en $(0,0)$, y

2° Calcular el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left|f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right](x-0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right](y-0)\right|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$

3° Si dicho límite es cero, probar que existe algún δ en términos de ε.

Veamos:

1° a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2(0)^3}{2h^2+0}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{N\to 0} (0) = 0$$

b) $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(0)^2 h^3}{2(0)+h^2}-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} (0) = 0$$

Sí existen las derivadas parciales en $(0,0)$.

2° Reemplazar los resultados obtenidos en a), b) y $f(0,0)=0$ para calcular el siguiente límite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2y^3|}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Por $(0,0)$ hacer pasar el camino $y = mx$, obteniéndose :

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x^2(mx)^3|}{[2x^2+(mx)^2]\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|m^3x^5|}{|x^3|(2+m^2)\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^2}{(2+m^2)\sqrt{1+m^2}} = 0 \quad , \quad \forall\, m \in \mathbb{R}.$$

3° Ahora, probar que dicho límite es cero.

Veamos:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}\right| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$ siempre que $|x|<\delta \wedge |y|<\delta$ con $(x,y) \neq (0,0)$.

Búsqueda de δ en términos de ε

Partir de : $\left|\frac{x^2 y^3}{2x^2+y^2}\right| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y ACOTAR

Se cumple: $\frac{1}{2x^2+y^2} < \frac{1}{y^2}$ ..... (1) $\forall\ x, y \in IR$

Además : $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{1}{|x|}$ ..... (2) pues $|x| = \sqrt{x^2}$ $\wedge$ $|x| < \sqrt{x^2+y^2}$

Multiplicar las desigualdades (1) y (2) y luego multiplicar ambos miembros por $x^2 y^3$

Entonces. $\left|\frac{x^2 y^3}{2x^2+y^2}\right| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{x^2|y|^3}{y^2|x|} = |x||y| = |x||y|$

Así, dado $\varepsilon > 0$, elegir $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ para que $|x||y| < \delta \cdot \delta = \delta^2$.

Entonces $0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ implica $|x||y| < \delta^2$, y

así $\left|\frac{x^2 y^3}{2x^2+y^2}\right| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$.

Ejemplo 3 Usando la definición, demostrar que la función $f(x,y) = xy$ es una función diferenciable en el punto $(2,3)$.

Demostración.

1° Analizar si existen las derivadas parciales en $(2,3)$:

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,3)-f(2,3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)(3)-(2)(3)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$

ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,3+h)-f(2,3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(3+h)-6}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2$

Sí, existen las derivadas parciales de f en $(2,3)$, porque los resultados son números reales únicos.

2° Calcular el $$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{\left|f(x,y)-f(2,3)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)\right](x-2)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\right](y-3)\right|}{\|(x,y)-(2,3)\|}$$

que necesariamente debe ser cero, para poder aplicar la definición de límite. Si no es cero el límite, entonces ya no tiene caso seguir analizando.

Veamos:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{|xy-6-3(x-2)-2(y-3)|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}} = \lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{|(x-2)(y-3)|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}}$$

Este límite se puede calcular haciendo pasar por el punto $(2,3)$ el camino $y-3=m(x-2) \Rightarrow y=3+m(x-2)$.

Así obtendremos : $$\lim_{x\to 2} \frac{|(x-2)[3+m(x-2)-3]|}{\sqrt{(x-2)^2+[3+m(x-2)-3]^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{m|x-2|}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \quad , \quad \forall\, m \in \mathbb{R}\,.$$

3° Ahora, probar:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\dfrac{|(x-2)(y-3)|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}} < \varepsilon$ siempre que:

$|x-2| < \delta \ \wedge \ |y-3| < \delta$

Buscar δ en términos de ε

Pero : $$\frac{|x-2||y-3|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}} < \frac{|x-2||y-3|}{|x-2|} \le |y-3|$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, escoger $\delta = \varepsilon$ para que $|y-3| < \varepsilon$; entonces

$0 < \|(x,y)-(2,3)\| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} < \delta$ implica que $\dfrac{|(x-2)(y-3)|}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}} < \varepsilon$.

Ejemplo 4 Sea la función $f(x,y) = x^2 + 2x + y$. Usando la definición, demostrar que f es diferenciable en todo (x_0, y_0) de su dominio.

Solución:

Por definición: $f(x,y)$ es diferenciable en todo $(x_0, y_0) \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, si se cumplen tres condiciones:

1° Existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

2° El $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}$

debe ser cero.

3° Probar que dicho límite es cero.

Vamos:

1° a) La derivada parcial de f respecto a x, es $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2$, además $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 + 2$.

b) La derivada parcial de f respecto a y, es $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, además $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1$.

Sí, existen las derivadas parciales en cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

2° Calcular el límite, que es cero.

3° Probar que : $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| x^2 + 2x + y - x_0^2 - 2x_0 - y_0 - (x-x_0)(2x_0+2) - (y-y_0)(1) \right|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$\frac{\left| x^2 + 2x + y - x_0^2 - 2x_0 - y_0 - (x-x_0)(2x_0+2) - (y-y_0) \right|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} < \varepsilon$$

Siempre que $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Búsqueda de δ en Términos de ε

Partir de $\dfrac{|x^2+2x+y-x_0^2-2x_0-y_0-(x-x_0)(2x_0+2)-(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$

y simplificar, para luego acotar :

$$\frac{|(x-x_0)(x+x_0)+2(x-x_0)+(y-y_0)-(x-x_0)(2x_0+2)-(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$\frac{|(x-x_0)(x+x_0+2-2x_0-2)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|(x-x_0)(x-x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \leq \frac{|x-x_0||x-x_0|}{|x-x_0|} = |x-x_0|$$

Escoger $\delta = \varepsilon$ para que $|(x-x_0)| < \varepsilon$.

Ejemplo 5 Sea $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \cos\left[\dfrac{1}{x^2+y^2}\right] & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

Probar tres cosas:

1° La existencia de las derivadas parciales :

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h)(0)^2 \cos\left(\frac{1}{h^2+0}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} = 0$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(0)(h^2)\cos\left[\frac{1}{0+h^2}\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} (0)$

2° Calcular el siguiente límite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| xy^2 \cos\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] \right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Este límite es cero, su calculo se obtiene aplicando el teorema del Sandwich.

3° Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\dfrac{\left| xy^2 \cos\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$ siempre que $|x| < \delta \wedge |y| < \delta$ con $(x,y) \neq (0,0)$

Acotemos :

Se cumplen : $\left| \cos\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] \right| < 1$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{1}{|x|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

Multiplicar ambas desigualdades y luego multiplicar por $|xy^2|$

$$\frac{\left| xy^2 \cos\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{|x||y|^2}{|x|} = |y|^2$$

Ahora acotemos :

Dado $\varepsilon > \delta$, escoger $\delta = \sqrt{\varepsilon}$; entonces.

$0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ implica $|y|^2 < \varepsilon$. Así queda probado que $\left| \frac{xy^2 \cos\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$.

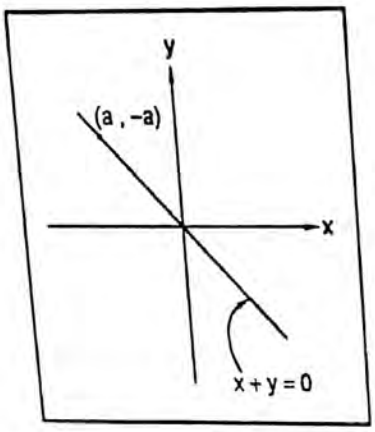
Ejemplo 6 Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x+y} & , \text{ si } x+y \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x+y = 0 \end{cases}$

a) ¿Es f diferenciable en todo el plano?.

b) Determine, si existe, el plano tangente al gráfico de f en $(0,0)$

Solución de a)

El dominio de f es todo el plano. Para los puntos (x,y) que están en la recta $x+y=0$, la función es cero. Para los puntos (x,y) que no están en la recta $x+y$ la función es $f(x,y)=(x+y)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x+y}$. En este caso, $f(x,y)$ es diferenciable porque f, f'_x y f'_y son continuas en todo (x,y) que no están en la recta $x+y=0$.



Analicemos, si la función $f(x,y)$ es o no diferenciable en los puntos de la recta $x+y=0$. Elegir el punto $(a,-a)$ que pertenece a la recta y hagamos tres cosas :

1º Averiguar si existen las derivadas parciales :

i) $f'_x(a,-a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,-a)-f(a,-a)}{h}$, donde $\begin{cases} f(a+h,-a)=h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h} \\ f(a,-a)=0 \end{cases}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}}=0$$

ii) $f'_y(a,-a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,-a+k)-f(a,-a)}{k}$, donde $\begin{cases} f(a,-a+k)=k^2\operatorname{sen}\frac{1}{k} \end{cases}$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k^2\operatorname{sen}\frac{1}{k}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}=0$$

Como vemos, sí existen las derivadas parciales en $(a,-a)\in L: x+y=0$

2º Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(a+h,-a+h)-f(a,-a)-f'_x(a,-a)h-f'_y(a,-a)k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|(h+k)^2\operatorname{sen}\frac{1}{h+k}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Este límite se calcula aplicando el teorema del Sandwich, partiendo de:

$$-1 \le \operatorname{sen}\frac{1}{h+k} \le 1 \quad , \quad \text{como } \sqrt{h^2+k^2} \text{ y } (h+k)^2 \text{ son positivos } \forall\,(h,k) \neq (0,0) \text{ podemos multiplicar ambos miembros :}$$

$$-\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{(h+k)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Aplicar limites:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} -\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+k)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Haciendo pasar por (0,0) el camino $k = mh$ se obtiene el límite cero.

Es cero el límite, haciendo pasar el camino $k = mh$, $m \neq 0$

Así obtenemos : $0 \le \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+k)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 0$, lo cual implica que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+k)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h+k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 .$$

3° Probar que el límite es cero :

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\dfrac{\left|(h+k)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h+k}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} < \varepsilon$

siempre que $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$, $(h,k) \neq (0,0)$.

Búsqueda de δ en términos de ε

Acotemos : $\dfrac{\left|(h+k)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h+k}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{\left|(h+k)^2\right| \left|\operatorname{sen}\frac{1}{h+k}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$, como $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{h+k}\right| \le 1$

$$\le \frac{\left|(h+k)^2\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\left|h^2+k^2+2hk\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{(h^2+k^2)+2|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

propiedad triangular.

El numerador se acota del siguiente modo: Se cumple:

$$|h| \le \sqrt{h^2+k^2}$$

$$|k| \le \sqrt{h^2+k^2}$$

$$|h||k| \le h^2+k^2$$

Por 2 : $\quad 2|h||k| \le 2(h^2+k^2)$

luego : $\quad (h^2+k^2)+2|h||k| \le 3(h^2+k^2)$

Por tanto :

$$\frac{(h^2+k^2)+2|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{3(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= 3\sqrt{h^2+k^2}$$

$$< 3\delta$$

Hacer $3\delta \le \varepsilon$

$$\delta \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $(a, -a)$.

b) El plano tangente en $(a, -a)$ es : $z = 0$.

4.13.2 Problemas Propuestos

1 Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & , \text{ Si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ Si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

¿Es f diferenciable en $(0,0)$?. Respuesta: sí

2 Sea $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Demostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. ¿Es diferenciable en $\mathbb{R}^2$?.

3 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, defina por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

donde α es un numero entero. Estudie cuándo f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución: Si $\alpha \leq 0$, $\exists\ f'_x(0,0)$

Si $\alpha > 0$, entonces $f'_x(0,0) = f'_x(0,0) = 0$

Además f es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si $\alpha > 2$

4 Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad \text{si}\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{si}\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Pruebe que las derivadas parciales de f son discontinuas en $(0,0)$

b) Demuestre que f es diferenciable en $(0,0)$.

5 Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

demuestre que:

a) $f'_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ existen.

b) f no es continua en $(0,0)$.

c) f no es diferenciable en $(0,0)$.

6 Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Probar que existen las derivadas parciales en $(0,0)$.

b) Probar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

7 Dada $f(x,y) = \begin{cases} x+y-2 & , \quad \text{si} \quad x=1 \ \vee \ y=1 \\ 2 & , \quad \text{si} \quad x \neq 1 \ \wedge \ y \neq 1 \end{cases}$

a) Demostrar que existen $f'_x(1,1)$, $f'_y(1,1)$

b) Probar que f no es diferenciable en $(1,1)$.

8 Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Demostrar que existen $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$

b) Probar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

9 Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) probar que f es continua en $(0,0)$.

b) Probar que existen $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$ pero no son continuas en $(0,0)$.

c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?.

10 Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$.

11 Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{si } x=y=0\end{cases}$

a) Demostrar que f tiene derivadas parciales en $(0,0)$.

b) Probar que f no es continua en $(0,0)$.

12 Sea $f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}$

a) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

b) ¿Existen las derivadas parciales en $(0,0)$?

(13) Dado la función $f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & , \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(0,0)$?. Pruebe.

b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?. Pruebe.

(14) Dado la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

¿En qué puntos de su dominio la función $f(x,y)$ es diferenciable? Justifique su respuesta.

(15) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{y^2+x^4} & , \ \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Demostrar que f tiene derivada direccional en cualquier dirección en $(0,0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

(16) Sea la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

(17) Sea $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt[3]{xy}+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & , \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Analizar, si la función f es o no diferenciable en los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Justifique su respuesta.

(18) Dado la función $f(x,y)=\begin{cases} e^x+e^y+\dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & , \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?. Justifique su respuesta.

19 Estudie la diferenciablidad en todo $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^{1/3}\, y^{1/3}$

b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

c) $f(x,y) = |\operatorname{sen}(x,y)|$

20 Dado la función $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2-y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

¿Es f diferenciable en $(0,0)$? Justifique su respuesta.

4.13.3 Generalización de la Diferencial de Funciones Escalares de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Definición 1

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$

$x \longrightarrow f(x)$

y $x_0 \in U$.

Decimos que f es diferenciable en $\vec{x}_0$, si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen en $\vec{x}_0$ y además. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \dfrac{\left| f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x} - \vec{x}_0) \right|}{\|(\vec{x} - \vec{x}_0)\|} = 0$

Definición 2

Si en la definiciones 1 hacemos :

1) $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$, $A_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0)$, ... , $A_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)$

2) La diferencia $\vec{x} - \vec{x}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) - (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

$$\vec{h} = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0)$$

$$\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

3) $r(h_1, h_2, \ldots, h_n) = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^{n} A_i h_i$

Se llama residuo.

Entonces definimos :

"f es diferenciable en $\vec{x}_0$ si existen las derivadas parciales

$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$, ... , $A_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)$ y además $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$"

TEOREMA Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si las funciones (derivadas parciales) :

$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $\tilde{U} \subseteq U$, son continuas en el punto $\vec{x}_0 \in \tilde{U}$, entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Definición 3

(Derivada Direccional). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in U$ un punto dado de U. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario dado.

La derivada de f en x_0, en la dirección del vector v, denotado por:
$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ o $D_v f(x_0)$, es el límite: $D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$

Observación:

Si elegimos $v = e_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\text{i-ésimo lugar}}{1}, 0, \ldots, 0)$, entonces :

$$D_{e_i} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

es la derivada parcial de f en x_0 con respecto a la variable x_i

Ejemplo Probar que la función $f(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$ es diferenciable en $P = (2,1,1)$

Solución:

Aplicar la definición 2:

En primer lugar, hallar las derivadas parciales en $P = (2, 1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2 z^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1) = (1)^2 (1)^3 = 1 = A_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1) = 2(2)(1)(1)^3 = 4 = A_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3xy^2 z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1) = 3(2)(1)^2(1)^2 = 6 = A_3$$

En segundo lugar, hallar el residuo $r(h_1, h_2, h_3)$:

$$\begin{aligned} r(h_1, h_2, h_3) &= f(2 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f(2, 1, 1) - A_1 h_1 - A_2 h_2 - A_3 h_3 \\ &= (2 + h_1)(1 + h_2)^2 (1 + h_3)^3 - 2 - h_1 - 4h_2 - 6h_3 \\ &= 2(1 + h_2)^2 (1 + h_3)^3 + h_1 (1 + h_2)^2 (1 + h_3)^3 - 2 - h_1 - 4h_2 - 6h_3 \\ &= h_1 \left[(1+h_2)^2 (1+h_3)^3 - 1\right] + 2\left[h_2^2 (1+h_3)^3 + \right. \\ &\quad \left. 2h_2 ((1+h_3)^3 - 1) + h_3^3 + 3h_3^2\right] \end{aligned}$$

En tercer lugar, probar que $\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{r(h_1,h_2,h_3)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} = 0$

Esto es, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\frac{|r(h_1,h_2,h_3)|}{\|h\|} < \varepsilon$

siempre que $\|h\| < \delta \ \wedge \ x \in IR^3 = \text{Dom}(f)$.

Nota : Esta demostración no es simple. Esta en la razón por lo que sólo se exige su demostración sólo para funciones de IR^2 en IR.

4.14 DIFERENCIABILIDAD Y DERIVADAS DIRECCIONALES

Proposición: Sea la función $f : U \subset IR^n \longrightarrow IR$ definida en el conjunto abierto U, con las siguientes hipótesis :

h_1) f es diferenciable en U

h_2) Sea $x_0 \in U$

h_3) Sea $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in IR^n$ un vector unitario

Tesis : Entonces $D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i$

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \,.\, v$$

derivada direccional de f en x_0, en la dirección del vector unitario v.

producto interno del vector gradiente por el vector unitario v.

Demostración:

1. Si f es diferenciable en U y $x_0 \in U$, entonces f es diferenciable en x_0.
2. El residuo r (h) está definido por la expresión :

$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, h_i + r(h)$, con la propiedad : $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$

3. Escribamos el vector $h = (h_1 , h_2 , \dots , h_n)$ como $h = tv$, $t \in IR$ (con t suficientemente pequeño para que $tv \in U$) , entonces $h_i = tv_i$. Ahora, reemplacemos en 2 :

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, tv_i + r(tv)$$

Dividir entre t : $\dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i + \frac{r(tv)}{t}$ ..... (3*)

Como $h = tv$, si $h \longrightarrow (0 , 0 , \dots , 0)$ entonces $t \longrightarrow 0$.

Además $\| h \| = \| tv \| = | t | \, \| v \| = | t |$, pues $\| v \| = 1$ porque v es unitario.

4. Aplicar límite en (3*) cuando $t \longrightarrow 0$

$$\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}}_{} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|}}_{}$$

$$D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial xi}(x_0)\, v_i + \underbrace{0}_{\text{esto, porque } f \text{ es diferenciable}}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \cdot (v_1 , v_2 , \dots , v_n)$$

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

4.15 EL TEOREMA DE EULER SOBRE FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Definición
(De Función Homogénea)

Sea $f : U \subset IR^n \longrightarrow IR$ una función definida en el conjunto abierto U de IR^n. Se dice que f es ***Homogénea de grado α*** (α es un número real) si cumple que :

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \quad , \quad \forall\, x \in U \quad , \quad \forall\, t > 0$$

Ejemplo Sea la función $f(x,y) = x^2 + 5xy + y^2$, $U = IR^2$

¿Es f una función homogénea?

Solución:

$$f(t(x,y) = (tx)^2 + 5(xt)(yt) + (yt)^2$$

$$= t^2x^2 + t^2 5xy + t^2y^2$$

$$= t^2(x^2 + 5xy + y^2)$$

$$= t^2 f(x,y)$$

Afirmamos: $f(x,y)$ es una función homogénea de grado 2.

TEOREMA (de Euler sobre funciones homogénicas) Sea $f : U \subset IR^n \longrightarrow IR$ una función homogénea de grado α definida en el conjunto abierto U de IR^n. Sea x_0 un punto no nulo de U, y $v = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ el vector unitario en la dirección de x_0. Entonces :

$$\boxed{Dv f(x_0) = \frac{\alpha}{\|x_0\|} f(x_0)}$$, *siempre que la derivada direccional $D_v f(x_0)$ existe*

Demostración:

1. Por definición de derivada direccional de f en x_0, en la dirección del vector unitario v, se tiene:

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

2. Elegir $v = \frac{x_0}{\|x_0\|}$, $x_0 \neq 0$, para tener :

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x_0 + t\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{\|x_0\| + t}{\|x_0\|} x_0\right) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{\|x_0\| + t}{\|x_0\|}\right)^{\alpha} f(x_0) - f(x_0)}{t}$$, pero $f(rx) = r^{\alpha} f(x)$ si $r = \frac{\|x_0\| + t}{\|x_0\|}$

$$= f(x_0) \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{\| x_0 \| + t}{\| x_0 \|} \right)^{\alpha} - 1}{t}}_{\text{éste límite se halla por L'HOPITAL}}$$

$$= f(x_0) \frac{1}{\| x_0 \|} \alpha = \frac{\alpha}{\| x_0 \|} f(x_0)$$

COROLARIO Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U.

Si f es diferenciable en U y homogénea de grado α, entonces

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f$$

$$\vec{x} \cdot \nabla f = \alpha f$$

Donde $\vec{x} = (x_1 , x_2 , ..., x_n)$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} , \frac{\partial f}{\partial x_2} , ... , \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

La función f y sus derivadas están evaluadas en un punto $\vec{x}_0 \in U$.

Demostración:

Para su demostración se aplica la proporción dado en 14 y el teorema anterior

1. Por definición de derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ en la dirección del vector unitario $\vec{v}$, se tiene:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$$

2. Elegir $\vec{v} = \frac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|}$, donde $\vec{x} = (x_1 , x_2 , ... , x_n) \neq (0 , 0 , ... , 0)$ Así obtenemos :

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|}$$

$$= \frac{x_1}{\| \vec{x} \|} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2}{\| \vec{x} \|} \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + \frac{x_n}{\| \vec{x} \|} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$= \frac{1}{\| \vec{x} \|} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \text{..... } (2^*)$$

3. Por otro lado, si f es homogénea de grado α, por el teorema anterior se cumple :

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \frac{\alpha}{\|\vec{x}\|} f(\vec{x}_0) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3*)$$

4. Al igualar (2*) con (3*), obtenemos :

$$\frac{1}{\|\vec{x}\|}\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\alpha}{\|\vec{x}\|} f(\vec{x}_0) \qquad \text{simplificar } \|\vec{x}\|$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots. + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha\, f(\vec{x}_0)$$

$$\vec{x}.\nabla f = \alpha\, f$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDENES SUPERIORES

Sea la función $f: U \subset IR^2 \longrightarrow IR$ definida en el conjunto abierto U de IR^2. Si f es diferenciable, entonces existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en cualquier punto $(x,y) \in U$. Ahora, consideremos las funciones :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \subset IR^2 \longrightarrow IR \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} : U \subset IR^2 \longrightarrow IR$$

de modo que para cada $(x,y) \in U$ se les asocia las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{dy}(x,y)$, respectivamente.

Puede ocurrir, a su vez, que estas funciones tengan las derivadas parciales : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ en un punto $(x,y) \in U$. En este caso diremos que estas son las derivadas parciales de segundo orden de la función f y escribimos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D_{11} f(x,y) \longleftarrow \textit{"segunda derivada parcial de f respecto a x"}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D_{12} f(x,y) \longleftarrow \textit{"segunda derivada parcial de f respecto a x" y "respecto a y"}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f_{yx}=D_{21}f(x,y) \longleftarrow \text{"segunda derivada parcial de } f \text{ respecto a } y \text{" y "respecto a } x\text{"}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=D_{22}f(x,y) \longleftarrow \text{"segunda derivada parcial de } f \text{ respecto a } y\text{"}$$

Ejemplo 1 Dado la función $f: IR^2 \longrightarrow IR$ definida por $f(x,y)=x^2-y^2$ se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=0 \end{cases}$$

Ejemplo 2 Dado la función $f: U \longrightarrow IR$, $U=\{(x,y)/x^2+y^2\le 4\}$ definido por $f(x,y)=y^2e^{x^2-y^2}$

Se obtienen:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2\left[e^{x^2-y^2}(2x)\right]=2xy^2e^{x^2-y^2}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y^2\left[e^{x^2-y^2}+xe^{x^2-y^2}(2x)\right] \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=2x\left[2ye^{x^2-y^2}+y^2e^{x^2-y^2}(-2y)\right] \end{cases}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2ye^{x^2-y^2}+y^2e^{x^2-y^2}(-2y)=2ye^{x^2-y^2}-2y^3e^{x^2-y^2}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\left[e^{x^2-y^2}+ye^{x^2-y^2}(-2y)\right]- \\ \qquad 2\left[3y^2e^{x^2-y^2}+y^3e^{x^2-y^2}(-2y)\right] \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=2y\left[e^{x^2-y^2}(2x)\right]-2y^3\left[e^{x^2-y^2}(2x\right. \end{cases}$

Simplificando y factorizando los resultados, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 e^{x^2-y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{x^2-y^2}(1-y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 e^{x^2-y^2}(1+2x^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{x^2-y^2}(1-5y^2+2y^4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy e^{x^2-y^2}(1-y^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy e^{x^2-y^2}(1-y^2)$$

Ejemplo 3 Probar que la función $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *(llamada "Ecuación de Laplace")*

Solución:

Hallemos las derivadas parciales de f y la derivadas parciales de segundo orden :

a) De $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(2x)(\cos 2x + \operatorname{sen} 2xy) + e^{x^2-y^2}(-2y \operatorname{sen} 2xy + 2y \cos 2xy)$$

$$= 2xe^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) - 2ye^{x^2-y^2}(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\Big[e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + xe^{x^2-y^2}(2x)(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + xe^{x^2-y^2}(-2y \operatorname{sen} 2xy + 2y \cos 2xy)\Big]$$

$$- 2y\Big[e^{x^2-y^2}(2x)(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy) + e^{x^2-y^2}(-2y \cos 2xy - 2y \operatorname{sen} 2xy)\Big]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2\ y) + 4x^2 e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + 4xye^{x^2-y^2}(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy)$$

$$- 4xye^{x^2-y^2}(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy) + 4y^2 e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy)$$

b) De $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(-2y)(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + e^{x^2-y^2}(-2x \operatorname{sen} 2xy + 2x \cos 2xy)$$

$$= -2ye^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + 2xe^{x^2-y^2}(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\left[e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + ye^{x^2-y^2}(-2y)(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + ye^{x^2-y^2}(-2x\operatorname{sen} 2xy + 2x\cos 2xy)\right]$$
$$+ 2x\left[e^{x^2-y^2}(-2y)(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy) + e^{x^2-y^2}(-2x\cos 2xy - 2x\operatorname{sen} 2xy)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + 4y^2e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy) + 4xye^{x^2-y^2}(-\operatorname{sen} 2xy + \cos xy)$$
$$- 4xye^{x^2-y^2}(-\operatorname{sen} 2xy + \cos 2xy) - 4x^2e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy)$$

Al sumar: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Ejemplo 4 Sea $z = g(x^2 + y^2)$, donde g es una función real de variable real, dos veces derivable. Demuestre que $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Solución:

En g se aplica la regla de la cadena para funciones reales de variable real.

a) De $z = g(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g'(x^2 + y^2)\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)\right] = g'(x^2 + y^2)[2x] = 2xg'(x^2 + y^2)$$

Así, hemos obtenido:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xg'(x^2 + y^2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\left[1g'(x^2 + y^2) + xg''(x^2 + y^2)(2x)\right]$$
$$= 2g'(x^2 + g^2) + 4x^2g''(x^2 + y^2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x\left[g''(x^2 + y^2)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right]$$
$$= 2x\left[g''(x^2 + y^2)\right][2y]$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xy\, g''(x^2 + y^2)$$

b) De $z = g(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g'(x^2+y^2)\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right] = g'(x^2+y^2)[2y] = 2y\,g'(x^2+y^2)$$

Ahora, reemplazar en:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$y\left[2g'(x^2+y^2)+4x^2 g''(x^2+y^2)\right] - x\left[4xy\,g''(x^2+y^2)\right] - \left[2y\,g'(x^2+y^2)\right]$$

$$2y\,g'(x^2+y^2)+4x^2 y\,g''(x^2+y^2) - 4x^2 y\,g''(x^2+y^2) - 2y\,g'(x^2+y^2) = 0$$

Ejemplo 5 Sea $\mu = \phi(x - at) + \psi(x + at)$, donde ϕ y ψ son dos funciones reales de variable real, dos veces derivables. Demuestre que esta función $\mu = f(x,t)$ es solución de la ecuación de calor $\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$.

Veamos:

Lo que haremos es hallar las derivadas de segundo orden de μ respecto a t y respecto a x, respectivamente. Además aplicaremos la regla de la cadena a las funciones reales de variable real.

a) De $\mu = \phi(x - at) + \psi(x - at)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \phi'(x-at)\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}(x-at)\right]}_{-a} + \psi'(x-at)\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}(x-at)\right]}_{-a}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -a\,\phi'(x-at) - a\,\psi'(x-at)$$

Derivar otra vez, respecto a t:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = -a\left[\phi''(x-at)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x-at)}_{-a}\right] - a\left[\psi''(x-at)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x-at)}_{-a}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = a^2\,\phi''(x-at) + a^2\,\psi''(x-at)$$

b) De $\mu = \phi(x-at) + \psi(x-at)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \phi'(x-at)\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-at)\right]}_{1} + \psi'(x-at)\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-at)\right]}_{1}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \phi'(x-at) + \psi'(x-at)$$

Derivar otra vez respecto a x

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \phi''(x-at) + \psi''(x-at)$$

Multiplicar por a^2

$$a^2\,\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = a^2\,\phi''(x-at) + a^2\,\psi''(x-at)$$

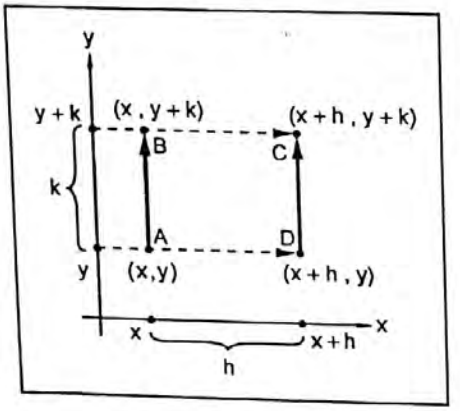
son iguales

TEOREMA *(Teorema de Schwarz)*

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$. Si las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ existen y son continuas en U, entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.

Las derivadas cruzadas son iguales.

Demostración:



Sobre el borde del rectángulo ABCD contenido en la región abierta U, vamos a definir dos funciones:

a) Una función $\varphi : [x , x+h] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x , y+k) - f(x , y)$.

Hacer $M = \varphi(x+h) - \varphi(x)$. Luego aplicar, el Teorema del valor medio a $\varphi(x)$ para obtener que :

$$M = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\xi , n)\,h\,k .$$

b) Otra función $\overline{\varphi}:[y, y+k] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\overline{\varphi}(y) = f(x+h, y)$. Aplicar el Teorema del valor medio a $\overline{\varphi}(y)$, hacemos $M = \overline{\varphi}(y+k) - \overline{\varphi}(y)$ para obtener $M = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi}, \overline{n})\, h\, k$.

Veamos:

1. En a) aplicar el teorema del valor medio a la función φ. Existe un número real $\xi \in \langle y, y+k \rangle$ tal que $\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(\xi)\, h$.

2. Pero $\varphi'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, y+k) - f(x, y)\right]$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

y $\varphi'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$

3. Reemplazar en 1.

$$M = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right] h$$

4. Ahora, definamos la función $\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) : [y, y+k] \longrightarrow \mathbb{R}$

5. Aplicar el Teorema del valor medio a la función ψ :

Existe, $n \in \langle y, y+k \rangle$ tal que $\psi(y+k) - \psi(y) = \psi'(n)k$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \psi'(n)\, k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) = \psi'(n)\, k \quad \ldots\ldots\ldots (5*)$$

6. Reemplazar (5*) en (3) :

$M = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \psi'(n)\, k\, h$, pero $\psi'(n) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, n)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, n)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, n)\, k\, h$$

De manera similar, en b) aplicamos el teorema del valor medio a la función $\overline{\varphi}$:

7. Existe un número $\overline{\xi} \in \langle y , y+k \rangle$ tal que $\underbrace{\overline{\varphi}(y+k) - \varphi'(y)}_{M} = \varphi'(\overline{\xi})k$.

8. Pero $\varphi'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f(x+h , y) - f(x ; y) \right]$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x+h , y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x , y)$$

y $\varphi'(\overline{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x+h , \overline{\xi}) - -\frac{\partial f}{\partial y}(x , \overline{\xi})$

9. Reemplazar en 7.

$$M = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h , \overline{\xi}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x , \overline{\xi}) \right] k$$

10. Ahora definimos la función $\psi(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x , y) : [x , x+h] \longrightarrow IR$, y aplicar el teorema del valor medio :

Existe $\overline{\eta} \in \langle x , x+h \rangle$ tal que $\psi(x+h) - \psi(x) = \psi'(\overline{\eta})\, h$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+h , y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x , y) = \psi'(\overline{\eta})\, h$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+h , \overline{\xi}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x , \overline{\xi}) = \psi'(\overline{\eta})\, h \quad \ldots\ldots\ (10*)$$

11. Reemplazar (10*) en 9.

$M = \psi'(\vec{\eta})\, h\, k$, pero $\psi'(\overline{\eta}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi} , \overline{\eta}) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi} , \overline{\eta})$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi} , \overline{\eta})\, h\, k$$

Conclusión : Igualar 6. con 11. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{\xi} , \eta)\, k\, h = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi} , \overline{\eta})\, h\, k$, que al simplificar hk, obtenemos $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi , \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi} , \overline{\eta})$.

Como $h \to 0$ y $k \to 0$, entonces $\xi \to x$, $\overline{\xi} \to x$, además $\eta \to y$, $\overline{\eta} \to y$, en consecuencia : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x , y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x , y)$.

Ejemplo Aclaratorio 1

Dado la función $f: IR^2 \longrightarrow IR$ definido por.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determinar $D_{12}\,f(0,0)$ y $D_{21}\,f(0,0)$ si existen.

Solución:

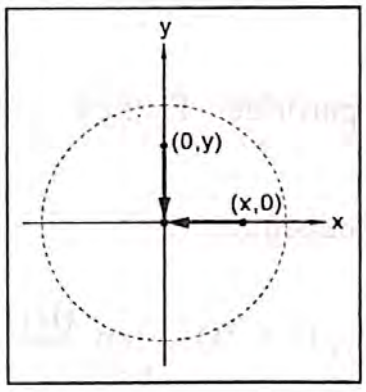
El concepto de derivada parcial de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ es un concepto local, esto es, debemos analizar alrededor de un disco abierto de centro en $(0,0)$ y radio $\varepsilon > 0$.

En primer lugar, hallar $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ para $(x,y)\neq(0,0)$.

a) $$D_1 f(x,y)=2y\left\{\frac{(x^2+y^2)\left[1(x^2-y^2)+x(2x)\right]-x(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

$$D_1 f(x,y)=\frac{2y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

↑ *derivada parcial de f respecto a x.*



b) $$D_2 f(x,y)=\frac{2x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

↑ *derivada parcial de f respecto a y.*

En segundo lugar, hallar $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$, usando la definición respectiva :

a) $$D_1 f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$, donde $\begin{cases} f(x,0)=\dfrac{2x(0)(x^2-0)}{x^2+0}=0 \\ f(0,0)=0 \end{cases}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

b) $D_2 f(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0}$, donde $\begin{cases} f(0,y) = \frac{2(0)(y)(0-y^2)}{0+y^2} = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \to 0} (0) = 0$$

En tercer lugar, hallar $D_{12} f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$ aplicando la definición respectiva.

a) A partir de $D_1 f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Obtenemos :

$$D_{12} f(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{D_1 f(0,y) - D_1 f(0,0)}{y - 0} \text{ , donde } \begin{cases} D_1(0,y) = \frac{2y(0+0-y^4)}{(0+y^2)^2} = -2y \\ D_1(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-2y - 0}{x} = \lim_{y \to 0} (-2) = -2$$

b) A partir de $D_2 f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Obtenemos:

$$D_{21} f(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{D_2 f(x,0) - D_2 f(0,0)}{x - 0} \text{ , donde } \begin{cases} D_2 f(x,0) = \frac{2x(x^4 - 0 - 0)}{(x^2+0)^2} = 2x \\ D_2 f(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} (2) = 2 .$$

En este caso, se tiene que $D_{12} f(0,0) \neq D_{21} f(0,0)$. Según el Teorema, $D_{12} f(x_0, y_0) = D_{21} f(x_0, y_0)$ siempre que cumpla las siguientes hipótesis :

h_1. f esté definido en el disco $B((x_0, y_0), \varepsilon)$ de centro en (x_0, y_0) y radio $\varepsilon > 0$, donde $B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset U$

h_2. $D_1 f$, $D_2 f$, $D_{12} f$, $D_{21} f$; también están definidos en $B((x_0, y_0), \varepsilon)$.

h_3. $D_{12}f$ y $D_{21}f$ son continuas en $B((x_0, y_0), \varepsilon)$.

En el ejemplo, se tiene que $D_{12}f$ y $D_{21}f$ no son continuas en $(0,0)$. Pruébelo

Ejemplo Aclaratorio 2

Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & , \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Determinar $D_{12}f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ si existen.

Solución:

Paso 1 Hallar $D_1f(x,y)$ y $D_2f(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$:

a) $D_1f(x,y) = 3y^2\left\{\dfrac{(x^4+y^4)(2x)-x^2(4x^3)}{(x^4+y^4)^2}\right\} = \dfrac{6xy^2(y^4-x^4)}{(x^4+y^4)^2}$

b) $D_2f(x,y) = 3x^2\left\{\dfrac{(x^4+y^4)(2y)-y^2(4y^3)}{(x^4+y^4)^2}\right\} = \dfrac{6x^2y(x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2}$.

Paso 2. Hallar $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ aplicando la definición de derivada parcial.

a) $D_1f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$, donde $\begin{cases} f(x,0) = \dfrac{3x^2(0)}{x^4+0} = \dfrac{0}{x^4} = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

b) $D_2f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$, donde $\begin{cases} f(0,y) = \dfrac{3(0)y^2}{0+y^4} = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

Paso 3 Hallar $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$, aplicando la definición de derivadas parciales:

a) $D_{12} f(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{D_1 f(0,y) - D_1 f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0-0}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0}{y} = \lim\limits_{y \to 0} (0) = 0$

b) $D_{21} f(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{D_2 f(x,0) - D_2 f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0-0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (0) = 0$

En este caso, se cumple: $D_{12} f(0,0) = D_{21} f(0,0)$

CONSECUENCIAS:

Como consecuencia del teorema anterior, podemos afirmar que, si una función real de dos variables tienen derivadas parciales mixtas (cruzadas) continuas en algún disco abierto, entonces el orden de la diferenciación puede alterarse, y siempre se cumplirá la igualdad. Por ejemplo :

a) $D_{12} f = D_{21} f$

b) $D_{121} f = D_{211} f = D_{112} f$.

PROBLEMAS

I. DERIVADAS PARCIALES

Hallar las derivadas parciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones:

01. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$

02. $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}$

03. $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$

04. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

05. $f(x,y) = x \operatorname{sen}(x+y)$

06. $f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

07. $f(x,y) = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{y}$

08. $f(x,y) = x^y$

09. $f(x,y) = \operatorname{Ln}(x+y^2)$

10. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

11. $f(x,y) = \text{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

12. $f(x,y) = \text{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

13. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

14. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$

15. $\mu = x^{\frac{y}{z}}$

16. $\mu = x^{y^z}$

17. Dado Las funciones a) $\mu = x^2 - 2xy - 3y^2$, b) $\mu = x^{y^2}$,
c) $\mu = \text{arc cos}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, comprobar la igualdad $\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial y\, \partial x}$

En los siguientes ejercicios, hallar las derivadas parciales de las funciones $z = f(x,y)$, $\mu = f(x,y,z)$, $w = f(x,y,z,v)$, $\theta = f(x,t)$, $z = f(\mu,v)$, $\mu = f(v,w)$

18. $z = x - y$

19. $z = x^3y - y^3x$

20. $\theta = a\,x\,e^{-t} + b\,t$ *(a, b constantes)*

21. $z = \dfrac{\mu}{v} + \dfrac{v}{\mu}$

22. $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

23. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$

24. $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

25. $z = \text{Ln}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

26. $z = \text{arctg}\dfrac{x}{y}$

27. $z = \dfrac{1}{\text{arctg}\frac{y}{x}}$

28. $z = x^y$

29. $z = \text{Ln}\,(x^2 + y^2)$

30. $z = \text{Ln}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$

31. $z = \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

32. $z = \ln \text{tg}\dfrac{x}{y}$

33. $z = e^{-\frac{x}{y}}$

34. $z = \ln\,(x + \ln y)$

35. $z = \text{arctg}\dfrac{v+w}{v-w}$

36. $z = \operatorname{sen} \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$

37. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$

38. $z = (1 + xy)^y$

39. $z = xy \operatorname{Ln} (x + y)$

40. $z = x^{xy}$

41. $\mu = xyz$

42. $\mu = xy + yz + zx$

43. $\mu = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

44. $\mu = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$

45. $w = xyz + yzv + zvx + vxy$

46. $\mu = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$

47. $\mu = \operatorname{sen} (x^2 + y^2 + z^2)$

48. $\mu = \operatorname{Ln} (x + y + z)$

49. $\mu = x^{\frac{y}{z}}$

50. $\mu = x^{y^z}$

51. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$
en el punto (3, 4)

52. $z = \operatorname{Ln}\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ en el punto (1,2)

53. $z = (2x + y)^{2x+y}$

54. $z = \left(1 + \log_y x\right)^3$

55. $z = xy\, e^{\operatorname{sen} \pi xy}$

56. $z = (x^2 + y^2) \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$

57. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$

58. $z = 2\sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$

59. $z = \operatorname{Ln}\left[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2} \right]$

60. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \operatorname{arcsen} \frac{x+y}{xy}$

61. $z = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 1} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

62. $\mu = \dfrac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

63. $\mu = \operatorname{arctg}(x-y)^z$

64. $\mu = (\operatorname{sen} x)^{yz}$

65. $\mu = \operatorname{Ln}\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

66. $w = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x^2y^2+z^2v^2-xyzv) + \operatorname{Ln}\cos(x^2y^2+z^2v^2-xyzv)$.

67. $\mu = \dfrac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. Hallar $\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial\psi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}$

68. $\mu = \sqrt{az^3-bt^3}$. Hallar $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}$, para $z=b$, $t=a$

69. $z = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}$. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, para $x=y=0$

70. $\mu = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 z}$. Hallar $\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\right)$ en $x=0$, $y=0$, $z=\frac{\pi}{4}$

Respuestas I

01. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-8xy^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^2-8x^2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2-8y^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -16xy$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2-8x^2$

02. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y+\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x-\dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1-\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}$

03. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\dfrac{2}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{6x}{y^4}$

04. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

05. $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen}(x+y) + x\cos(x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x+y)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - x\operatorname{sen}(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \cos(x+y) - x\operatorname{sen}(x+y)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\operatorname{sen}(x+y)$.

06. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x\operatorname{sen} x^2}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2\operatorname{sen} x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2x\operatorname{sen} x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^2}$

07. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\operatorname{sen}\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3}\operatorname{sen}\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\operatorname{sen}\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$,

08. $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \operatorname{Ln} y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}(1 + y\operatorname{Ln} x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \operatorname{Ln}^2 x \,(x>0)$,

09. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$

10. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ $(xy \neq 1)$

12. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x\,\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ $(y\neq 0)$

13. $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$

14. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z \operatorname{Ln}\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z \operatorname{Ln}\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\operatorname{Ln}\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\operatorname{Ln}\frac{x}{y}\right)$, $\frac{x}{y}>0$

15. $\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{y\mu}{xz}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{\mu \operatorname{Ln} x}{z}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z}=-\frac{y\mu}{z^2}\operatorname{Ln} x$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}=\frac{y(y-z)\mu}{x^2z^2}$,

$\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}=\frac{\mu \operatorname{Ln}^2 x}{z^2}$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}=\frac{y\mu \operatorname{Ln} x}{z^4}(2z+y\operatorname{Ln} x)$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}=\frac{(z+y\operatorname{Ln} y)\mu}{xz^2}$,

$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial z}=-\frac{y\mu(z+y\operatorname{Ln} x)}{xz^3}$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial y\partial z}=-\frac{\mu \operatorname{Ln} x(z+y\operatorname{Ln} x)}{z^3}$ $(xz\neq 0)$

16. $\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{y^2}{x}\mu$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}=zy^{z-1}\mu \operatorname{Ln} x$, $\frac{\partial \mu}{\partial z}=y^z\mu \operatorname{Ln} x \operatorname{Ln} y$,

$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}=\frac{y^z(y^z-1)}{x^2}\mu$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}=zy^{z-2}\mu(z-1+zy^z\operatorname{Ln} x)\operatorname{Ln} x$,

$\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}=y^z\mu(1+y^z\operatorname{Ln} x)\operatorname{Ln} x \operatorname{Ln}^2 y$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}=\frac{zy^{z-1}\mu}{x}(1+y^z\operatorname{Ln} x)$,

$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial z}=\frac{y^z\mu \operatorname{Ln} y}{x}(1+y^z\operatorname{Ln} x)$, $\frac{\partial^2 \mu}{\partial y\partial z}=y^{z-1}\mu \operatorname{Ln} x\left[1+z\operatorname{Ln} y(1+y^z\operatorname{Ln} x)\right]$

$(x>0\,,\,y>0)$

18. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

19. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$

20. $\frac{\partial \theta}{\partial x} = ae^{-t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -ax\theta^{-t} + b$

21. $\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{1}{\nu} - \frac{\nu}{\mu^2}$, $\frac{\partial z}{\partial \nu} = -\frac{\mu}{\nu^2} + \frac{1}{\mu}$

22. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

23. $\frac{\partial z}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)$

24. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

25. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$

26. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

27. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$

28. $\frac{\partial z}{\partial x} = y\,x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \operatorname{Ln} x$

29. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$

30. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$

32. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y \operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2 \operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$

33. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$

34. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \operatorname{Ln} y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y(x + \operatorname{Ln} y)}$

35. $\frac{\partial \mu}{\partial \nu} = -\frac{w}{\nu^2 + w^2}$, $\frac{\partial \mu}{\partial w} = \frac{\nu}{\nu^2 + w^2}$

36. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}$

37. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\operatorname{Ln}3$

38. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y \operatorname{Ln}(1+xy)$

39. $\frac{\partial z}{\partial x} = y\operatorname{Ln}(x+y) + \frac{xy}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\operatorname{Ln}(x+y) + \frac{xy}{x+y}$

40. $\frac{\partial z}{\partial x} = x^{x^y}x^{y-1}(y\operatorname{Ln}x + 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y x^{x^y}\operatorname{Ln}^2 x$

41. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = xy$

42. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = y + z$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = x + y$

43. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

44. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = z^2 + 3x$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = 2yz + 1$

45. $\frac{\partial w}{\partial v} = yz + vz + vy$, $\frac{\partial w}{\partial y} = xz + zv + vx$, $\frac{\partial w}{\partial z} = xy + yv + vx$, $\frac{\partial w}{\partial v} = yz + xz + xy$

46. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = (3x^2 + y^2 + z^2)\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2x\,y\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$,
$\frac{\partial \mu}{\partial z} = 2x\,z\,e^{x(x^2+y^2+z^2)^2}$

47. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2+z^2)$,
$\frac{\partial \mu}{\partial z} = 2z\cos(x^2+y^2+z^2)$

48. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z}$

49. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\operatorname{Ln}x$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\operatorname{Ln}x$

50. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = y^z x^{y^{z-1}}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = z y^{z-1} x^{y^z} \operatorname{Ln} x$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = y^z x^{y^z} \operatorname{Ln} x \operatorname{Ln} y$

51. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ **52.** 0 , $\frac{1}{4}$

53. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x+y)^{2x+y}\left[1+\operatorname{Ln}(2x+y)\right]$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (2x+y)^{2x+y}\left[1+\operatorname{Ln}(2x+y)\right]$

54. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x \operatorname{Ln} y}\left(1+\frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{Ln} y}\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3 \operatorname{Ln} x}{y \operatorname{Ln}^2 y}\left(1+\frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{Ln} y}\right)^2$

55. $\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{\operatorname{sen} \pi x y}(1+\pi x y \cos \pi x y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x e^{\operatorname{sen} \pi x y}(1+\pi x y \cos \pi x y)$

56. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} 2y$

57. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1-x^y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^y}\operatorname{Ln} x}{2(1+x^y)}$

58. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\sqrt{xy-x^2y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\sqrt{xy-x^2y^2}}$

59. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$

60. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$

61. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\left[\left(1+\operatorname{actg}^2\frac{y}{x}\right)^2+\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$

62. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{4kx}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{4ky}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{4kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

63. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \operatorname{Ln}(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$

64. $\frac{\partial \mu}{\partial x} = yz(\operatorname{enx})^{yz-1}\cos x$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = z(\operatorname{sen} x)^{yz} \operatorname{Ln} \operatorname{sen} x$, $\frac{\partial \mu}{\partial z} = y(\operatorname{sen} x)^{yz} \operatorname{Ln} \operatorname{sen} x$

65. $\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial z}}{z} = \frac{2}{r(r^2-1)}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

66. $\frac{\partial w}{\partial x} = (2xy^2 - yzv)\operatorname{tg}^3 \alpha$, $\frac{\partial w}{\partial y} = (2x^2y - xzv)\operatorname{tg}^3 \alpha$, $\frac{\partial w}{\partial z} = (2zv^2 - xyv)\operatorname{tg}^3 \alpha$,

$\frac{\partial w}{\partial v} = (2z^2v - xyz)\operatorname{tg}^3 \alpha$, donde $\alpha = x^2y^2 + z^2v^2 - xy\,zv$; 67. 4

68. $\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_{\substack{z=b \\ t=a}} = \frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$, $\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{\substack{z=b \\ t=a}} = -\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$

69. 1 , −1 70. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

II. PROBLEMAS RELATIVOS A DERIVADAS DIRECCIONALES Y GRADIENTES

1. Dado la función $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + y^3$, hallar la derivada direccional en el punto $(2,1)$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{6}$.

R. $\frac{4\sqrt{3}+7}{2}$.

2. Dado la función $f(x,y,z) = x^2 e^{-yz}$. Calcular la tasa de cambio de f en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en $(1,0,0)$.

R. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

3. ¿En qué dirección desde $(0,1)$, crece más rápido la función $f(x,y) = x^2 - y^2$

R. $(0, -2)$.

4. Mostrar que la derivada direccional de $f(x,y,z) = z^2 x + y^3$ en $(1,1,2)$ en la dirección $\frac{1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}j$ es $2\sqrt{3}$.

5. **Dado la función $f(x,y) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 5x + 3y - 2$**

   a) ¿En qué dirección la función crece más rápidamente en el punto $(1,1)$?.

   b) ¿Cuál es la derivada direccional de f en esta dirección y en ese punto?.

   R. a) en la dirección de $(1,3)$; b) $\sqrt{10}$

6. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados en las direccionales dadas :

   a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$, $\mu = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$

   b) $f(x,y) = \text{Log}\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0,y_0) = (1,0)$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j)$

   c) $f(x,y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0 , y_0) = (0 , -1)$, $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}j$

   d) $f(x,y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0 , y_0) = (4 , -2)$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{10}}j$

7. Sea $\vec{r} = xi + yj + zk$ y $r = \|\vec{r}\|$. Probar que $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

8. hallar la derivada de la función $z = \text{Ln}\sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto P(1,1) y la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado .

   R. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Hallar la derivada de la función $\mu = x^2 - 3yz + 5$ en el punto $(1 , 2 , -1)$ en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes de coordenadas.

   R. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. Dado la función $f(x,y,z) = 2x^3 y - 3y^2 z$, **a)** hallar la derivada direccional de f en el punto $P(1 , 2 , -1)$ en la dirección de P a Q, $Q = (3 , -1 , 5)$ **b)** ¿en qué dirección a partir de P es máxima la derivada direccional? **c)** ¿Cuál es la magnitud de la derivada direccional máxima?

    R.: a) $-\frac{9}{7}$, b) $(12 , 14 , -12)$, c) 22

11. Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$. Sea $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$, no necesariamente unitario y sea $\vec{v} = \frac{\vec{\mu}}{\|\vec{\mu}\|}$. La derivada de f en $P \in D$ en la dirección del vector $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$, se define por : $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mu}}(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\vec{\mu}) - f(p)}{t}$, cuando el límite existe. Demostrar que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{\|\vec{\mu}\|} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mu}}$. Verificar este resultado con la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\vec{\mu} = (1,1)$.

12. Sean $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario dado. Demuestre que si la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$ existe en el punto $P \in D$, entonces f es continua en P en la dirección del vector $\vec{v}$.

13. Sean $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$ con derivadas direccionales en $P \in D$ en la dirección de un vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$ dado.

a) Demuestre que la función $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = f + g$ tiene derivada direccional en P en la dirección de v y que ésta es : $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}$

b) Demuestre que la función $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = fg$ tiene derivada direccional en P en la dirección de v y que ésta es $\frac{\partial F}{\partial v} = f\frac{\partial g}{\partial v} + g\frac{\partial f}{\partial v}$

c) Demuestre que si $g(x,y) \neq 0$ en D, la función $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = \frac{f}{g}$ tiene derivada direccional en P en la dirección de v y que ésta es $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial v}}{g^2}$

14. Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Probar que $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, donde $v = (a,b)$.

15. Supongamos que la derivada direccional de una función $z = f(x,y)$ en el punto $P = (1,2)$ en la dirección hacia $Q(2,3)$ es $2\sqrt{3}$; y en la dirección hacia $R = (1,0)$, es -3.

a) Hallar $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$

b) Calcular la derivada direccional en P en la dirección hacia $S=(4,6)$.

R.: **a)** $f_x(1,2)=1$, $f_y(1,2)=3$; **b)** 3

16. Dado la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & , \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Hallar los vectores μ en los cuales existe la derivada direccional $D_\mu f(0,0)$. R:

a) $D_\mu f(0,0)$ no existe si $\operatorname{sen} 2\theta - 1 \neq 0$

b) Si $\operatorname{sen} 2\theta - 1 = 0$ existe $D_\mu f(0,0)$ cuando $\mu=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ o $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

17. Sea la función $f(x+y,x-y)=xy+y^2$. Hallar $\nabla f(4,2)$

R.: $(3,-2)$

18. Dado la curva $C:\begin{cases}2x+y+z=2\\ 2x^2+y-z=2\end{cases}$ y la función $f(x,y,z)=e^{x+y+z}$

a) Hallar la derivada direccional de f en el punto $(0,0,0)$ y la dirección del vector curvatura de C en el punto $(0,1,1)$

R.: El vector curvatura $\vec{k}(0)$ tiene la dirección del vector normal $\vec{N}(0)$, el resultado es $\vec{N}(0)=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$

19. Dado la función $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$, hallar la mínima derivada direccional y el vector unitario en esta dirección, en el punto $(3,2)$.

R.: $D_{\vec{\mu}} f(x,y)_{\text{mínima}} = -|\nabla f(x,y)| = \frac{\sqrt{13}}{25}$, $\vec{\mu}=-\frac{\nabla f(3,2)}{|\nabla f(3,2)|}$, $\mu=\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)$

20. La distribución de temperaturas en una placa metálica viene dada por la función $T(x,y)=20-x^2-3y^2$.

a) ¿Cuál es el punto más caliente?

b) Hallar el camino trazado por una partícula seguidora de calor que parte del punto $(1,1)$.

R.: a) $(0,0)$, por que $T(0,0)=20$ es la máxima calor. Considerar la trayectoria por $r(t)=(x(t),y(t))$, donde $\vec{r}'(t)=\nabla T(\vec{r}(t))$. Se obtiene $x(t)=c_1 e^{-2t}$, $y(t)=c_2 e^{-6t}$, $y=x^3$

III. PLANO TANGENTE, PLANO NORMAL, ANGULO ENTRE DOS SUPERFICIES

1. Admitiendo que existe, hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(e, 2, f(e,2))$, sabiendo que $f(x,y)=y\,Lnx$

R.: $2x+ey-ez-2e=0$

2. Hallar el ángulo que se forma entre las superficies :

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=20$ y $2x+y-z-50=0$, en el punto $(8, 25, -9)$.

R.: Es el ángulo que forman las normas en el punto $(8, 25, -9)$ y es $\alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$

3. Dado la función $f(x,y)=Ln(2x+y)+\sqrt{y-x^2}$

Determine :

a) El dominio de f y grafique.

b) La dirección, sentido y el valor de variación mínima de $f(x,y)$ en el punto $P=(1,5)$

c) La ecuación del plano tangente y una ecuación de la recta normal al gráfico de la función en el punto $(1, 5, f(1, 5))$

R.: a) $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / 2x+y>0 \wedge y-x^2\geq 0\}$

b) $\nabla f(P)=\left(-\frac{3}{14},\frac{11}{28}\right)$, $f'_{min}(P)=-\|\nabla f(P)\|=-\frac{\sqrt{57}}{28}$ $\mu=\lambda\nabla(P)$, $\lambda=-\frac{1}{\|\nabla f(P)\|}$.

c) $-\frac{3}{14}(x-1)+\frac{11}{28}(y-5)-1(z-Ln7-2)=0$, $\frac{x-1}{-\frac{3}{14}}=\frac{y-5}{\frac{11}{28}}=\frac{z-Ln7-2}{-1}$

4. Escribir Las ecuaciones de los planos tangentes y las de las normales a las siguientes superficies en los puntos que se indican :

a) al paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1\ ,\ -2\ ,\ 5)$.

b) a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ en el punto $(R\cos\alpha,\ R\ \text{sen}\ \alpha,\ R)$

R.: a) $2x - 4y - z - 5 = 0$; $x = 2t + 1$, $y = -4t - 2$, $z = -t + 5$

b) $x\cos x + y\ \text{sen}\ \alpha - R = 0$; $\dfrac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y - R\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{z - R}{0}$.

5. Determine la ecuación del plano tangente y la derivada direccional a lo largo de la recta $\frac{x}{5} = 3 - \frac{y}{3}$ al cono elíptico recto $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ en los puntos $(2,0,2)$ y $(3,2,z)$, respectivamente.

R.: a) En el punto $(2,0,2)$ se tiene : $x - z = 0$, $\pm\frac{5}{\sqrt{34}}$

b) En el punto $(3,2,z)$ (debe hallar z) : $3x + 4y - \sqrt{17} = 0$, $-\frac{3}{17\sqrt{2}}$

6. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $S : z = x^2 + y^2$ que sea paralelo al plano $\mathcal{P} : 3x + 8y - 5z = 10$

R.: $3x + 8y - 5z = 73/20$.

Sugerencia : El plano buscado es $\mathcal{P}_1 : 3x + 8y - 5z = k$, $k = ?$, porque $\mathcal{P}_1$ es paralelo a $\mathcal{P}$; en segundo lugar, resolver el sistema $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 3x + 8y - 5z = k \end{cases}$ obteniéndose una ecuación cuadrática en x^2 e y^2 ; en tercer lugar, aplicar a la ecuación cuadrática que tiene solución única si el discriminante es cero. Aplicando el Gradiente : Se cumple que $\nabla f(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ es paralelo a la normal del plano $\mathcal{P}$, esto es $(2x_0\ ,\ 2y_0\ ,\ -1) = k\ (3\ ,\ 8\ ,\ -5)$. Hallar x_0 , y_0 , z_0 sustituyendo en la superficie.

7. Hallar la ecuación de los planos tangentes a la superficie : $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x = 0$ que sean paralelos al plano $z = 0$

R.: $z = -3$, $z = 5/3$

8. Hallar el plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que es paralelo al plano $8x + 6y + 10z - 1 = 0$

R.: Los puntos de tangencia son $\pm\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\ ,\ \frac{3}{5\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

9. determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos $x + y - z = 3$ y $2x - y + z = 4$

R.: $y + z = 1$

10. Hallar Las ecuaciones de los planos tangentes al elipsoide $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1$ que sean paralelas al plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto $(1,1,1)$.

R.: $x + y - z = k$, $k = -48 \pm 3\sqrt{110}$.

11. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $\vec{r}(\mu,\nu) = (\mu\cos\nu, \mu\,\text{sen}\,\nu, 2\mu)$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$. R : el punto de tangencia es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ y la normal es $4(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$.

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ que es tangente a la superficie $z = 3x^2 + \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(2, a, b)$ y es ortogonal al plano $y + z = 0$

R.: El punto de trayectoria es $(2 , 2 , 13)$, $\vec{n} = (12, 1, -1)$

12.B Hallar en la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ los puntos en los que los planos tangentes son paralelos a los planos coordenados .

R.: $\left(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2}\right), (\pm 2, \mp 4, \pm 2), (\pm 4, \mp 2, 0)$.

13. ¿En qué punto del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ la normal a éste forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

R.: $x = \pm\frac{a^2}{d}$, $y = \pm\frac{b^2}{d}$, $z = \pm\frac{c^2}{d}$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

14. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que son paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

R.: $x + 4y + 6z = \pm 21$.

15. Dado la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 10 = 0$. Demuestre que esta superficie tiene infinidad de planos tangentes perpendiculares a cualquier plano dado $ax + by + cz = d$. Determine la expresión general de estos planos.

16. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = a^2$ $(a > 0)$ forman con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante.

R.: $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}-3=0$, $v=\frac{9}{2}|a|^3$.

17. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ cortan a los ejes coordenadas segmentos cuyas sumas son constantes.

18. Demostrar que los planos tangentes al cono $z=x\,f(\frac{y}{x})$ pasan por su vértice.

19. Demostrar que las normales a la superficie de revolución $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $(f'\neq 0)$ se cortan con el eje de rotación.

20. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos indicados .

a) $z=x^2+y^2$; en el punto $P_0(1,2,5)$

b) $x^2+y^2+z^2=169$; en el punto donde $x=3$, $y=4$

c) $z=\text{arc tg}\,\frac{y}{x}$; en el punto donde $x=1$, $y=1$

d) $ax^2+by^2+cz^2=1$, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

e) $z=y+\text{Ln}\,\frac{x}{z}$; en el punto $P_0(1,1,1)$

f) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$; en el punto $P_0(2,2,1)$.

g) $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\,\text{sen}\,\varphi$, $z=c\,\text{sen}\,\psi$; en el punto $P_0(\varphi_0, \varphi_0)$

h) $x=r\cos\phi$, $y=r\,\text{sen}\,\phi$, $z=r\,\text{tg}\alpha$; en el punto $P_0(\phi_0, r_0)$

i) $x=\mu\cos\nu$, $y=\mu\,\text{sen}\,\nu$, $z=a\nu$; en el punto $P_0(\mu_0, \nu_0)$

Respuestas:

a) $2x+4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$

b) $3x+4y+12z=169$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$.

c) $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

d) $ax_0\,x+by_0\,y+cz_0\,z=1$; $\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$

e) $x+y-2z=0 \quad ; \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$

f) $x+y-4z=0 \quad ; \quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$

g) $\frac{x}{a}\cos\varphi_0\cos\psi_0+\frac{y}{b}\cos\varphi_0\,\text{sen}\,\psi_0+\frac{z}{c}\,\text{sen}\,\psi_0=1$;

$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\,\text{cosec}\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\,\text{cosec}\psi_0-c}{ab}$$

h) $x\cos\phi_0+y\,\text{sen}\phi_0-z\,\text{tg}\,\alpha=0 \quad ; \quad \frac{x-r_0\cos\phi_0}{\cos\phi_0}=\frac{y-r_0\,\text{sen}\,\phi_0}{\text{sen}\,\phi_0}=\frac{z-r_0\,\text{tg}\,\alpha}{-\text{tg}\,\alpha}$

i) $ax\,\text{sen}\,\nu_0-ay\cos\nu_0+\mu_0 z=a\mu_0\nu_0$

21. Determinar el punto de intersección del eje z con la recta normal a la superficie $S: f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-z=0$, $(x,y)\neq(0,0)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de S. Donde f es una función real de variable real. Sugerencia: hacer $r=\sqrt{x^2+y^2}$ y $g(x,y,z)=f(r)-z=0$

Recta normal S : $P=P_0+t\nabla g(P_0)$, $t\in\mathbb{R}$

R.: Si $g(x,y,z)=f(r)-z$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2}$, entonces

$\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y},-1\right)$, aplicar la fórmula dada de Recta normal y se obtiene $z_0-\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\frac{\partial f}{\partial r}(r_0)}$.

22. a) Sea $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\varphi(0)=2a$, $\varphi'(0)=b$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y)=\frac{\varphi(2x-y)}{y}$, en el punto $(1,2,a)$.

22. b) Hallar la ecuación del plano tangente a $S: z=x^2+y^2$ si este plano contiene a la recta $\mathfrak{L}:\begin{cases}x=t\\ y=-2t+3\\ z=-2t+4\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

23. a) Demostrar que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir en la forma $\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z+z_0}{c}$

b) Suponga que $a = 2$, $b = 3$ y $c = 1$ en la parte (a) ; hallar el punto de la superficie donde el plano tangente es paralelo al plano $3x + y - 2z + 2 = 0$.

24. Sea la superficie $S: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, y sea el punto $P_0 = (4,3,2) \in S$

a) Encontrar una de las dos rectas contenidas en S, que pasa por P_0.

b) Determinar el plano tangente a S en el punto P_0 .

c) Verificar que la recta hallada en la parte a) está contenida en el plano tangente a S en el punto P_0, determinando en la parte b).

25. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ paralelo al plano $x - y + 2z = 0$

26. a) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 - y^2)$ que pasa por el punto $P_0 = (0 , 0 , -1)$ y es paralelo a la recta $\mathfrak{L} : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

26. b) Halle las ecuaciones del plano tangente y de la recta **NORMAL** a la superficie descrita por la función $F(\mu, \nu) = (\mu , \nu , \mu^2 - \nu^2)$ en el punto $(1,1,0)$.

27. Demostrar que el plano tangente a la superficie S donde $S : z = \frac{a^3}{xy}$, $a > 0$ en cualquiera de sus puntos forma con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante. Determinar este volumen.

28. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $S: z\cos(xy) - xy\,\text{sen}\, z + \frac{5\pi}{2} = 0$ en el punto $\left(2 , \pi , \frac{\pi}{2}\right)$

29. Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, demuestra que todos los planos tangentes a la superficie $z = y f(\frac{x}{y})$ tienen, por lo menos, un punto en común. ¿Vale lo mismo para la superficie $z = x f(\frac{y}{x})$?

30. Determine el plano tangente a la gráfica de la superficie $z = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t}\,dt$, en el punto $(1,1)$.

IV. INCREMENTOS Y DIFERENCIALES

1. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$ para $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

2. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z = e^{xy}$ para $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

3. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ para $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$

4. Calcular aproximadamente la variación de la función $z = \frac{x+3y}{y-3x}$ al variar x desde $x_1 = 2$ hasta $x_2 = 2.5$ e y desde $y_1 = 4$ hasta $y_2 = 3{,}5$

5. Calcular aproximadamente $\text{Ln}\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$

6. Calcular aproximadamente $1{,}04^{2{,}02}$.

7. Hallar la longitud del segmento de la recta $x = 2$, $y = 2$ comprendido entre la superficie $z = x^2 + y^2$ y su plano tangente en el punto $(1,1,2)$.

8. El radio de la base del cono mide $10{,}2 \pm 0{,}1$ cm, la generatriz mide $44{,}6 \pm 0{,}1$ cm. Hallar el volumen del cono e indicar el error de cálculo.

9. Un lado del triángulo mide 2,4 m y aumenta con la velocidad de 10 cm/s. El segundo lado mide 1,5 m y disminuye con la velocidad de 5 cm/s. El ángulo formado por estos dos lados mide $60°$ y aumenta con la velocidad de $2°$ por segundo. ¿Cómo varía el área del triángulo y con qué velocidad?

10. Los radios de las bases de un cono truncado miden $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, la altura $h = 40$ cm. ¿Cómo variaría el volumen del cono si aumentásemos R en 3 mm; r, en 4 m.m ; h, en 2 mm.?

11. En los ejercicios a), b), c), d), e), f) ; aplique diferenciales para calcular aproximadamente el valor de la expresión dada :

a) $\frac{0.97}{\sqrt{15.05}+\sqrt[4]{0.98}}$, **R.:** 0,242161

b) $\sqrt{(2{,}13)\,(1{,}97)}$, c) $\text{Ln}\,(3.02)^2 - 8.01$, d) $\text{Ln}\left(\sqrt{4{,}14}+\sqrt{9{,}07}-3\right)$

e) $\text{arctg}\left(\sqrt{0{,}2}+0{,}97\right)$, f) $\sqrt[3{,}1]{(4{,}8)^2+2.1}$,

12. Por diferenciales, calcular :

a) $(1\,,\,002)\,(2\,,\,003)^2\;(3{,}004)^3$ b) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$

c) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$, d) $\text{sen}\,29^\circ\,\text{tg}\,46^\circ$, e) $0{,}97^{1{,}05}$

Resultados: a) 108,972 , b) 1,055 , c) 2,95
d) 0,502 , e) 0,97.

13. ¿Cuánto variará la diagonal y el área de un rectángulo de lados $x = 6$ m e $y = 8$m, si el primer lado se aumenta en 2mm. y el segundo se disminuye en 5 mm.?
R.: diagonal disminuye 3 mm, área aumenta 140 cm^2.

14. El ángulo central de un sector $\alpha = 60^\circ$ aumentó $\Delta\alpha = 1^\circ$ ¿Cuánto hay que disminuir el radio del sector $R = 20$ cm, para que su área no varíe? R : hay que disminuir 1,7 mm.

15. Al medir el radio R de la base y la altura H de un cilindro se obtuvieron los siguientes resultados: $R = 2{,}5\text{ m} \pm 0.1\text{ m}$, $H = 4.0\text{m} \pm 0.2\text{ m}$.
¿Con qué error absoluto Δ y error relativo δ se puede calcular el volumen del cilindro?
R.: $\Delta \approx 10{,}2\text{ m}^3$; $\delta \approx 13\%$

16. Los lados de un triángulo son: $a = 200\text{m} \pm 2\text{m}$; $b = 300\text{m} \pm 5\text{m}$, y el ángulo formado por ellos es $C = 60^\circ \pm 1^\circ$. ¿Con qué error absoluto puede calcularse el tercer lado c del triángulo? **R.:** $\Delta \approx 7{,}6\text{m}$.

17. Hallar $f'_x\,(x\,,1)$, si $f(x,y) = x + (y-1)\,\text{arcsen}\sqrt{\frac{x}{y}}$

18. Hallar $f'_x(0\,,0)$ y $f'_y(0\,,0)$, si $f(x\,,y) = \sqrt[3]{xy}$
¿Es esta función diferenciable en el punto $(0,0)$?

19. ¿Es diferenciable la función $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ en el punto $(0,0)$?

20. Averiguar si es diferenciable en el punto $(0,0)$ la función $f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, si $x^2+y^2>0$ y $f(0,0)=0$.

21. Los lados de un paralelepípedo rectangular miden 3, 4, 5 pies, con un error posible de $\frac{1}{16}$ de pulgada. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a) el área de la superficie del paralelepípedo; (b) el volumen de este cuerpo.

22. Una lata cilíndrica de hojalata, sin tapa, tiene un diámetro de 3 pulg. y una altura de 4 pulg. Use diferenciales para calcular aproximadamente la cantidad de material que hay en la lata si ésta tiene un grosor de 0.015 pulg.

23. La densidad relativa de un objeto está dada por $s=\frac{A}{A-w}$, donde A y W son sus pesos en el aire y en el agua, respectivamente. Las medidas son $A = 12$ kgf y $w = 5$ kgf, con errores máximos de 0.015 kgf en el aire y 0.030 kgf en el agua. ¿ cuál es el error máximo en el valor calculado de s ?

24. Si $f: IR^n \longrightarrow IR$ es una función diferenciable en P_0 y P está próximo a P_0, una buena aproximación de $f(P)$ es la expresión $f(P_0)+\nabla f(P_0).(P-P_0)$. Usar esta información para hallar un valor aproximado de $\sqrt[3]{(4.01)^2+(3.97)^2+8(2.02)^2}$. Justifique por qué puede usar la información.

Respuestas: 1) 0,08 ; 2) 0,25e ; 3) $\frac{1}{36}$, 4) $\approx 7,5$ 5) $\approx 0,005$

6) $\approx 1,08$; 7) 5 ; 8) 4730 ± 100

9) Crece con la velocidad igual a $444\ cm^2/s$, 10) En $\approx 2575\ cm^3$.

17) $f'_x(x,1)=1$; 18) $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$, la función no es diferenciable en el punto $(0,0)$. 19) La función no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

20) La función es diferenciable en el punto $(0,0)$.

21) (a) $\frac{1}{4}$ pie^2 , (b) $\frac{47}{192}$ pies^3 .

22) $57\ \pi(0.015)/4 \approx 0.67$ pulg^3 , 23) 0,0185

V. PROBLEMAS DIVERSOS

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x,y) = \frac{(y-x^2)(y-2x^2)}{|y-x^2|\,|y-2x^2|}$$

$$f(x,x^2) = f(x,2x^2) = 1$$

1° estudiar la continuidad de f;

2° hallar las derivadas $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$, si existen;

3° hallar, si existe, la derivada $f'_U(0,0)$ según cualquier vector $U \in \mathbb{R}^2$.

2. Analizar si la función f tiene derivada según un vector $U = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ en $(0,0)$ y si es diferenciable en dicho punto.

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}\ ,\ f(0,0) = 0$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = ax^2y + by^2z + cz^2x.$$

Hallar a, b y c para que, en el punto $P(1,1,1)$ la derivada máxima de f se produzca en la dirección del vector $(1,5,0)$ y valga 13.

4. Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en $(0,0)$ y tal que $f'_x(0,0) = f'_y = (0,0) = 1$. Calcular las derivadas de f en $(0,0)$ según los siguientes vectores:

1° $U = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $\theta = 30°$;

2° el unitario que dé derivada nula, hallando dicho vector.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función:

$$f(x,y) = (y + e^{xy}, x - e^{xy});$$

1° Comprobar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y hallar su matriz jacobiana

2° Comprobar que $f \circ f$ es diferenciable y calcular su matriz jacobiana en (0,0).

6. Obtener el desarrollo de Taylor, en torno del punto $(1, -1)$ con término complementario en el lugar de las derivadas terceras de y^2/x^2.

7. Obtener el desarrollo de Mac Laurin de $e^{x+y}\cos(x+y)$

8. Obtener el desarrollo limitado de Mac Laurin de: $f(x,y) = x\operatorname{sen}y + y\operatorname{sen}x$

Soluciones:

1. 1° f continua en $\mathbb{R}^2$ menos en los puntos de la parábola $y = x^2$ e $y = 2x^2$. 2° $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

3° $f'_U(0,0) = 0$

2. $f'_U = \cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta$, no existe df (0,0)

3. $\nabla f(1,1,1) = (2a+c, a+2b, b+2c)$;
$a = \rho$, $b = 2\rho$, $c = -\rho$, $\rho = \sqrt{13/2}$

4. 1° $(1+\sqrt{3})/2$, 2° $\sqrt{2}$

3° $\theta = 3\pi/4$, $7\pi/4$

5. 1° $\begin{bmatrix} ye^{xy} & 1+xe^{xy} \\ 1-ye^{xy} & -xe^{xy} \end{bmatrix}$ 2° $\begin{bmatrix} 1+1/e & -1/e \\ -1/e & 1+1/e \end{bmatrix}$

6. $1 - 3(x-1) - 2(y+1) + 6(x-1)^2 + 6(x-1)(y+1) + (y+1)^2 + \frac{1}{3!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} + (1 + \theta(x-1)\ ,\ -1 + \theta(y+1))\cdot$

7. $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(\sqrt{3})^i (x+y)^i \cos\frac{n\pi}{4}$

8. $\frac{4}{2!}xy - \frac{4}{4!}(x^3y + xy^3) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n}{(2n)!}(x^{2n-1}y + xy^{2n-1}) \cdot$

CAPÍTULO 5

FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS

5.1 REGLA DE LA CADENA PARA DERIVAR FUNCIONES COMPUESTAS

CASOS

CASO 1

Proposición 1

Sea $g: I \subseteq IR \longrightarrow IR^3$ una función definida en el intervalo abierto I de IR.

Sea $f: U \subseteq IR^3 \longrightarrow IR$ una función definida en el conjunto abierto U de IR^3,

$$I \subseteq IR \xrightarrow{g} U \subseteq IR^3 \xrightarrow{f} IR \qquad (f \circ g)$$

$$t \longrightarrow g(t) = (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow z = f(x(t), y(t), z(t))$$

$$f \begin{cases} x \longrightarrow t \\ y \longrightarrow t \\ z \longrightarrow t \end{cases}$$

Suponer que g es diferenciable en $\mathbf{t_0}$ y que **f** es diferenciable en $\mathbf{Y_0} = f(t_0)$. Entonces la composición $f \circ g: I \subseteq IR \longrightarrow IR$ es diferenciable en t_0 y su derivada es:

$$D(f \circ g)(t_0) = [Df(y_0)]\,[Dg(t_0)]$$

Matriz 1×3 Matriz 3×1

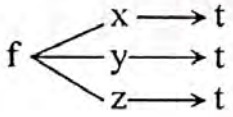
$$\frac{df}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Ejemplo 1 Dado la función $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + x\,y\,z$, tal que $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = \frac{1}{t}$. Hallar $\frac{df}{dt}$.

Solución:

Una manera directa de hallar la $\frac{df}{dt}$ sin necesidad de hacer el producto de matrices, se puede recurrir al siguiente diagrama de árbol, para luego derivar.

$$f \begin{cases} x \longrightarrow t \\ y \longrightarrow t \\ z \longrightarrow t \end{cases}$$



Este diagrama se lee así : f es función de x, y, z.
x es función de t; y es función de t; z es función de t.

Queremos obtener "La derivada de f respecto a t". Para ello, pasaremos por 3 ramas:

(de f a x $\wedge$ de x a t) $\vee$ (de f a y $\wedge$ de y a t) $\vee$ (de f a z $\wedge$ de z a t).

Por lo tanto obtenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{dt}$$

$$= (2x + yz)(2t) + (3y^2 + xz)(-1) + (xy)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

Si $g(t) = \left(t^2, 1-t, \frac{1}{t}\right)$ es diferenciable en $t = 1$, entonces f es diferenciable en (1, 0, 1) y en consecuencia :

$$\frac{df}{dt}(1) = (2+0)(2) + (0+1)(-1) + (0)\left(-\frac{1}{1}\right) = 3$$

En este ejemplo las funciones son :

$$g(t) = \left(t^2, 1-t, \frac{1}{t}\right) \quad , \quad f(x,y,z) = x^2 + y^3 + xyz$$

$$\begin{array}{ccccc} & & f \circ g & & \\ \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & g(t) & \longrightarrow & f(g(t)) \end{array}$$

Según la proporción 1, obtenemos:

$$D(f\circ g)(t)=\left[Df(g(t))\right]_{1\times 3}\left[Dg(t)\right]_{3\times 1}$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right]\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{bmatrix}$$

$$=[2x+yz\ \ 3y^2+xz\ \ xy]\begin{bmatrix}2t\\ -1\\ -\frac{1}{t}\end{bmatrix}=(2x+yz)(2t)+(3y^2+xz)(-1)+(xy)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

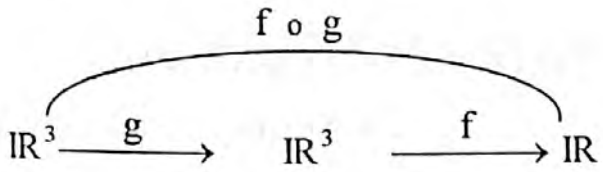
CASO 2

Proposición 2

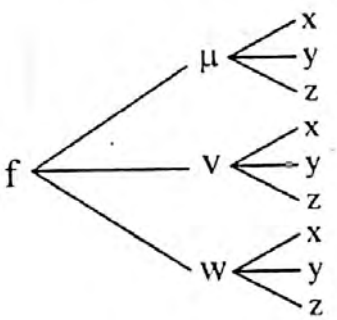
Sean las funciones

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}\qquad y\qquad g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(\mu,v,w)\longrightarrow f(\mu,v,w)\qquad (x,y,z)\longrightarrow(\mu(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$$

Dado la composición $(f\circ g)(x,y,x)$ de f con g,



$$(x,y,z)\rightarrow(\mu(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))\rightarrow f\,(\mu(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$$



Si g es diferenciable en (x,y,z) y f es diferenciable en $g(x,y,z)$, entonces la derivada de la función compuesta

$$h(x,y,z) = (f \circ g)(x,y,z) = f(g(x,y,z)) = f(\mu(x,y,z), \nu(x,y,z), w(x,y,z))$$

en el punto (x,y,z) es :

$$\left[D(f \circ g)(\bar{x})\right] = \left[Df(g(\bar{x})\right]_{1\times 3} \left[Dg(\bar{x})\right]_{3\times 3} \quad , \quad \bar{x} = (x, y, z)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \; \frac{\partial f}{\partial y} \; \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \; \frac{\partial f}{\partial \nu} \; \frac{\partial f}{\partial w}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} & \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} & \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 Dado la función $f(\mu,\nu,w) = \mu^2 + \nu^2 + w^2$ donde

$$\mu = 2x - 3y + 5z$$
$$\nu = x^2 - y^2 + z^2$$
$$w = x\,y\,z$$

Hallar: a) $\frac{\partial f}{\partial x}$, b) $\frac{\partial f}{\partial y}$, c) $\frac{\partial f}{\partial z}$

Solución:

De las tres funciones μ, ν, w, en función de (x,y,z), se obtiene :

$$g(x,y,z) = (\mu(x,y,z), \nu(x,y,z), w(x,y,z))$$
$$= (2x - 3y + 5z \; , \; x^2 - y^2 + z^2 \; , \; xyz)$$

De la composición $(f \circ g)(x,y,z) = f(g(x,y,z))$

$$= f(\mu(x,y,z), \nu(x,y,z), w(x,y,z))$$

Se obtiene :

$$\left[D(f \circ g)(x,y,z)\right] = \left[Df(\mu,\nu,w)\right]_{1\times 3} \left[Dg(x,y,z)\right]_{3\times 3}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \; \frac{\partial f}{\partial y} \; \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \; \frac{\partial f}{\partial \nu} \; \frac{\partial f}{\partial w}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} & \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} & \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= [\,2\mu \;\; 2\nu \;\; 2w\,] \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2x & -2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = [\,4\mu + 4\nu x + 2wyz, -6\mu - 4\nu y + 2wxz, 10\mu + 4\nu z + 2wxy\,]$$

Por igualdad de matrices (vectores) se obtiene :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4\mu + 4\nu y + 2wyz$$

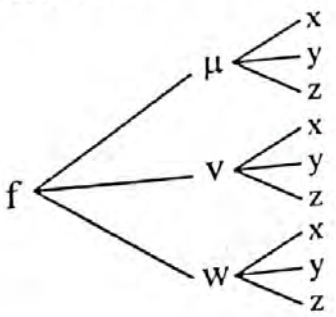
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6\mu - 4\nu y + 2wxz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 10\mu + 4\nu z + 2wxy$$

OTRO PROCEDIMIENTO :

Una forma muy sencilla de obtener las derivadas parciales que plantea el problema, consiste en dibujar un diagrama de árbol que indica la relación funcional de las variables y luego derivar según indica el árbol.

Así .



a) Para obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$, se parte de f para llegar a x. Hay 3 ramas para llegar a x :

1ª rama, partir de f; pasar μ para llegar a x

2ª rama, partir de f; pasar por v para llegar a x

3ª rama, partir de f; pasar por w para llegar a x

Dos flechas consecutivas es la composición de dos funciones y es por eso que al derivar obtenemos el producto de dos derivadas.

Partiendo de f para llegar a x hay 3 ramas, entonces la $\frac{\partial f}{\partial x}$ será la suma de las 3 ramas, cada rama es el producto de dos derivadas que se escriben según el orden de las flechas.

La $\frac{\partial f}{\partial x}$ se obtiene del siguiente modo :

a) $\underbrace{\text{De f hacia x, es:}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \underbrace{(\text{de f hacia } \mu}_{\frac{\partial f}{\partial \mu}} \wedge \underbrace{\text{de } \mu \text{ hacia x})}_{\frac{\partial \mu}{\partial x}} \vee \underbrace{(\text{de f hacia } \nu}_{\frac{\partial f}{\partial \nu}} \wedge \underbrace{\text{de } \nu \text{ hacia x})}_{\frac{\partial \nu}{\partial x}} \vee \underbrace{(\text{de f hacia w}}_{\frac{\partial f}{\partial w}} \wedge \underbrace{\text{de w hacia x)}}_{\frac{\partial w}{\partial x}}$

Así hemos obtenido :

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$. Haciendo el cálculo de cada derivada :

$= (2\mu)(2) + (2\nu)(2x) + (2w)(yz)$

$= 4\mu + 4\nu x + 2wyz$

De manera similar, tan solo mirando el diagrama de árbol, obtenemos :

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$

$= (2\mu)(-3) + (2\nu)(-2y) + (2w)(xz)$

$= -6\mu - 4\nu y + 2\, w\, x\, z$.

c) $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$

$= (2\mu)(5) + (2\nu)(2z) + (2w)(xy)$

$= 10\mu + 4\nu z + z\, w\, x\, y$.

PROBLEMAS RESUELTOS

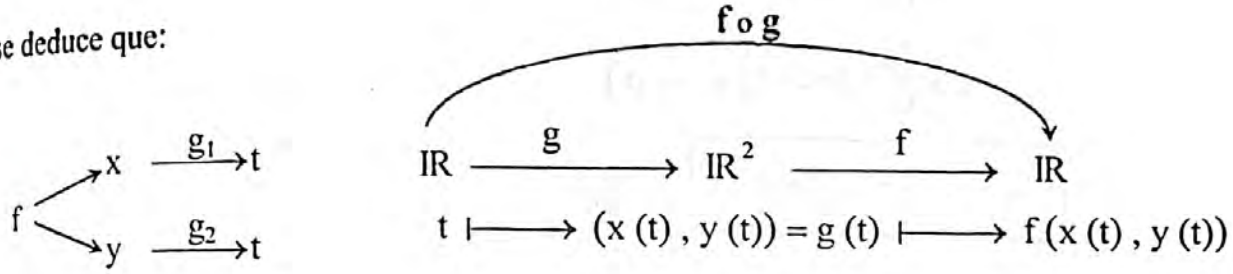
PROBLEMA 1 Sea $z = f(x,y)$ una función diferenciable en $(1, -1)$ y $g(t) = (5t + 1, 2t - 1)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$ sabiendo que

$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ g)(0) = -10$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 5$

Solución:

De las funciones $z = f(x,y)$ y $g(t) = (\underbrace{5t+1}_{x}, \underbrace{2t-1}_{y})$

se deduce que:



Al derivar obtenemos :

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(f\circ g)(0)}_{-10} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)}_{(5)}\ (5) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\,(2)$$

$$-10 = (5)\ (5) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$$

$$-\frac{35}{2} = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$$

PROBLEMA 2 Demostrar que la función $z = y\,\varphi(x^2 - y^2)$ satisface la ecuación : $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Demostración:

La ecuación $z = y\,\varphi(x^2 - y^2)$ podemos escribir, así :

$z = y\,\varphi(\mu)$, donde $\mu = x^2 - y^2$

De la ecuación $z = y\,\varphi(\mu)$, obtenemos :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x}\ , \quad \text{donde } \frac{\partial \mu}{\partial x} = 2x$$

Luego:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\cdot 2x \iff \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}} \quad (i)$$

De la ecuación $z = y \cdot \varphi(\mu)$, obtenemos :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y\left[\frac{\partial}{\partial y}\varphi(\mu)\right] + \varphi(\mu)\left[\frac{d}{dy}y\right] \longleftarrow \textit{Regla del Producto para Derivadas}$$

$$= y\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] + \varphi(\mu)[1]$$

$$= y\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(-2y)\right] + \varphi(\mu)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi(\mu)} \qquad (ii)$$

Sustituir (i) y (ii) en: $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$

Se tiene: $= \frac{1}{x}\left[2xy\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{y}\left[-2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi(\mu)\right]$.

$$= \underbrace{2y\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - 2y\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}_{0} + \frac{1}{y}\varphi(\mu) = \frac{1}{y}\varphi(\mu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (iii).$$

De la ecuación : $z = y\,\varphi(\mu)$

se tiene : $\varphi(\mu) = \frac{z}{y}$ ..... (iv)

Ahora, sustituir (iv) en (iii) : $\frac{1}{y}\varphi(\mu) = \frac{1}{y}\left[\frac{z}{y}\right] = \frac{z}{y^2}$.

Es decir, he demostrado que : $\boxed{\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}}$

Problema 2 Demostrar que la función $z = xy + x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

Demostración:

Para un mejor manejo de las derivadas parciales debo escribir la ecuación:

$$z = xy + x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

en la forma: $z = xy + x\,\varphi(\mu)$, donde $\mu = \frac{y}{x}$

Ahora, hallemos $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Veamos:

a) De $z = xy + x\varphi(\mu)$

Obtenemos: $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \left[x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \varphi(\mu) \cdot \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} x}^{1} \right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \left[x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \varphi(\mu) \right]$$

Luego : $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi(\mu)}$ *(i)*

b) De $z = xy + x\varphi(\mu)$

obtenemos : $\frac{\partial z}{\partial y} = x + x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial y}$

como $\mu = \frac{y}{x}$

$= x + x\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{x}$.

$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}$ *(ii)*

Ahora, sustituir *(i)* y *(ii)* en : $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$

Entonces : $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[y - \frac{y}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi(\mu) \right] + y\left[x + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right]$

$$= xy - y\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + x\varphi(\mu) + yx + y\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x\varphi(\mu) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (iii)$$

Pero, de la ecuación : $z = xy + x\,\varphi(\mu)$

obtenemos : $x\,\varphi(\mu) = z - xy$

$$\varphi(\mu) = \frac{z - xy}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (iv)$$

Ahora, sustituir (*iv*) en (*iii*) :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xy+x\varphi(\mu)$$

$$=2xy+x\left[\frac{z-xy}{x}\right]$$

Luego : $=2xy+z-xy=xy+z$

$$\boxed{x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z} \quad *$$

Problema 3 ***(Regla de la cadena)***

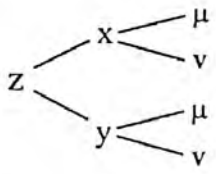
Sea $z=f(x,y)$ de clase C^2 en IR^2. Si $x=e^v \operatorname{sen}(\mu)$, $y=e^v\cos\mu$.

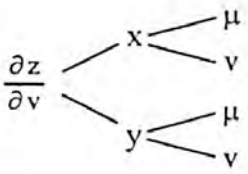
Demostrar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial\mu}=xy\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+(y^2-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

Solución:

Por que $z=f(x,y) \;\wedge\; \begin{cases} x=e^v\operatorname{sen}\mu \\ y=e^v\cos\mu \end{cases}$

Se tiene :





a) Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial v}$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot e^v\operatorname{sen}\mu+\frac{\partial z}{\partial y}e^v\cos\mu$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial v}=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial\mu}\right]e^v\operatorname{sen}\mu+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot e^v\cos\mu$$

$$+\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\mu}\right]e^v\cos\mu-\frac{\partial z}{\partial y}e^v\operatorname{sen}\mu$$

$$=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot e^v\cos\mu-\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\cdot e^v\operatorname{sen}\mu\right]e^v\operatorname{sen}\mu+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot e^v\cos\mu$$

$$+\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cdot e^{v}\cos\mu-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot e^{v}\cdot \operatorname{sen}\mu\right] e^{v}\cos\mu-\frac{\partial z}{\partial y}e^{v}\cdot\operatorname{sen}\mu$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\underbrace{e^{2v}\cos\mu\operatorname{sen}\mu}_{xy}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\underbrace{e^{2v}\operatorname{sen}\mu\cos\mu}_{xy}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\underbrace{e^{2v}\operatorname{sen}^2\mu}_{x^2}$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\underbrace{e^{2v}\cos^2\mu}_{y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}e^{v}\cos\mu-\frac{\partial z}{\partial y}e^{v}\operatorname{sen}\mu$$

$$=xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(y^2-x^2)+\frac{\partial z}{\partial x}e^{v}\cos\mu-\frac{\partial z}{\partial y}e^{v}\operatorname{sen}\mu$$

b) Hallar $\frac{\partial z}{\partial \mu}$: $\quad \frac{\partial z}{\partial \mu}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot e^{v}\,.\cos\mu-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot e^{v}\operatorname{sen}\mu$$

c) Al restar : $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mu\,\partial v}-\frac{\partial z}{\partial \mu}=xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(y^2-x^2)$

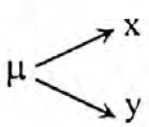
PROBLEMA 4 ***(Regla de la cadena)***

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^2 en la variable μ. Si $\mu=x^2+y^2$, demostrar que $z=x+y+f(x^2+y^2)$ cumple la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2-y^2)\frac{d^2 f}{d\mu^2}$.

Solución:

Se tiene: $\quad z=x+y+f(\mu) \quad , \quad \mu=x^2+y^2$

a) Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=1+0+f'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$=1+f'(\mu).2x$$

$$=1+2xf'(\mu)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 + 2\,.\,f'(\mu) + 2x\underbrace{\left[f''(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x}\right]}_{2x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'(\mu) + 4x^2 f''(\mu)}$$

b) Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 1 + f'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$= 1 + 2y\, f'(\mu)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 + 2f'(\mu) + 2y\underbrace{\left[f''(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]}_{2y}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\,f'(\mu) + 4y^2\, f''(\mu)}$$

c) Restar a) – b)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 - y)^2\, f''(\mu) \quad , \quad f''(\mu) = \frac{d^2 f}{d\mu^2}$$

Problema 5 *(Regla de la cadena)* Supongamos que f es una función diferenciable de una variable y que una función z está definida por $z = xy\, f\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)$.

Mostrar que z satisface una ecuación diferencial (parcial) de la forma $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = G(x, y)z$ y hallar la función $G(2, -1)$.

Solución:

Se tiene : $z = xy\, f\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)$, hacer $\mu = \dfrac{x-y}{xy}$

$$z = x\,y\,f(\mu)$$

$\mu \nearrow x$

$\mu \searrow y$

a) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\left[1 \cdot f(\mu) + x \cdot f'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x}\right] \quad , \quad f'(\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

$$= y\left[f(\mu) + x \cdot f'(\mu)\frac{xy-(x-y)y}{(xy)^2}\right]$$

$$= y\left[f(\mu) + \frac{1}{x}f'(\mu)\right]$$

b) Calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[1 \cdot f(\mu) + y \cdot f'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] \quad , \quad f'(\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

$$= x\left[f'(\mu) + y \cdot f'(\mu)\frac{xy(-1)-(x-y)x}{(xy)^2}\right]$$

$$= x\left[f(\mu) - \frac{1}{y}f'(\mu)\right]$$

Ahora; sumar :

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y\left[f(\mu) + \frac{1}{x}f'(\mu)\right] + y^2x\left[f(\mu) - \frac{1}{y}f'(\mu)\right]$$

$$= (x+y)\underbrace{xy\,f(\mu)}_{z}$$

donde : $G(x, y) = x + y$

además : $G(2, -1) = 2 - 1 = 1$

PROBLEMA 6 ***(Regla de la cadena y plano tangente)***

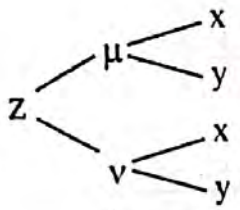
a) Sea $z = f(x,y)$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$, y sea la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad (a \neq 0)$

Usando el cambio de variables : $\mu = x - ay$, $v = x + ay$ la ecuación se transforma en $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial \mu} = A$. Hallar A

b) Determinar el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ que es paralelo al plano $\pi : x + 2y - z + 2 = 0$

Solución:

Para hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial \mu}$ se necesita



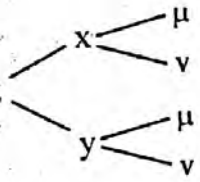
Como dato se tiene: $z = f(x,y) \;\wedge\; \begin{cases} \mu = x - ay \;\ldots\ldots (1) \\ v = x + ay \;\ldots\ldots (2) \end{cases}$

Sumar (1) + (2) : $\mu + v = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\mu + v)$

Restar (2) – (1) : $v - \mu = 2ay \Rightarrow y = \frac{1}{2a}(v - \mu)$

Así tenemos: $z = f(x,y)$, $x = \frac{1}{2}(\mu + v)$, $y = \frac{1}{2a}(v - \mu)$

El diagrama del árbol,



está preparado para derivar.

Mirando el diagrama de árbol y las dos ecuaciones, obtenemos :

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{1}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

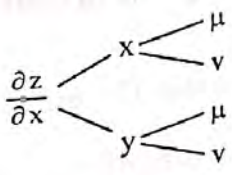
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{2a}$$

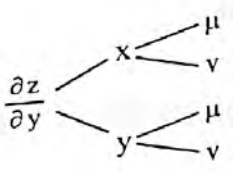
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

La segunda derivada respecto a v :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial \mu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

pero





$$\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial \mu} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{\frac{1}{2a}}\right] - \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{\frac{1}{2a}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{1}{4a}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} - \frac{1}{4a}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}_{0} - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\underbrace{\left[a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]}_{0} = 0 \qquad \textit{(ver dato)}$$

Conclusión: $A = 0$

PROBLEMA 7 ***(Regla de la cadena)***

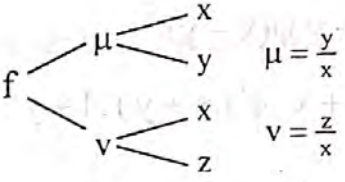
Sea $g(x,y,z) = x^3 f(\mu, v)$ donde $\mu = \frac{y}{x}$, $v = \frac{z}{x}$, demostrar que: $x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = 3g$

Solución:

Bastará hallar las derivadas parciales y hacer la suma: $x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z}$ ..... (*)

Veamos:

a) $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 f(\mu, v) + x^3\frac{\partial f}{\partial x}$



$\mu = \frac{y}{x}$

$v = \frac{z}{x}$

$$= 3x^2 f(\mu, v) + x^3\left[\frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial x}}_{-\frac{y}{x^2}} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{-\frac{z}{x^2}}\right]$$

$$= 3x^2 f(\mu, v) - xy\cdot\frac{\partial f}{\partial \mu} - xz\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

b) $\frac{\partial g}{\partial y} = x^3\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$

$$= x^3 \left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial y}}_{\frac{1}{x}} \right] = x^2 \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

c) $\dfrac{\partial g}{\partial z} = x^3 \dfrac{\partial f}{\partial z}$

$$= x^3 \left[\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{\frac{1}{x}} \right] = x^2 \frac{\partial f}{\partial v}$$

Reemplazar en (*): $x\left[3x^2 f - xy\dfrac{\partial f}{\partial \mu} - xz\dfrac{\partial f}{\partial v}\right] + y\left[x^2 \dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right] + z\left[x^2 \dfrac{\partial f}{\partial v}\right] = \underbrace{3x^3 f}_{g}$

$= 3g$.

PROBLEMA 8 ***(Regla de la cadena)***

Sea $z = x\phi(x+y) + y\,\psi(x-y)$, donde ϕ y ψ son funciones reales, dos veces derivable. Calcular en términos de ϕ', ϕ'', ψ' ψ'' lo siguiente: a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Solución:

a) De $z = x\phi(x+y) + y\,\psi(x-y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1.\phi(x+y) + x.\phi'(x+y).1 + y.\psi'(x-y).1$$

(*) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \phi(x+y) + x\phi'(x+y) + y.\psi'(x-y)$$

Ahora: $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \phi'(x+y).1 + 1.\phi'(x+y) + x.\phi''(x+y).1 + y.\psi''(x-y).1$$

$$= \phi'(x+y) + \phi'(x+y) + x\phi''(x+y) + y\,\psi''(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\phi'(x+y) + x\phi''(x+y) + y\,\psi''(x-y)$$

b) De (*) hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \phi'(x+y) + x\cdot\phi''(x+y) + 1.\psi'(x-y) + y\,.\,\psi''(x-y)$$

$$= \phi'(x+y) + x\,.\,\phi''(x+y) + \psi'(x-y) + y\,\psi''(x-y)$$

No olvidar que $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ cuando son continuas las derivadas cruzadas de segundo orden.

PROBLEMA 9 ***(Derivadas Parciales)***

Si $z = xy + x\,e^{y/x}$. Verificar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

Solución:

Bastará hallar, directamente, $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, para luego reemplazar en la ecuación.

Veamos:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = y + 1\,.\,e^{y/x} + x\,.\,e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$$= y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\,.\,e^{\frac{y}{x}}\,.\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= x + e^{\frac{y}{x}}$$

Reemplazar en el primer miembro de la ecuación dada :

$$x\left[\,y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\,\right] + y\left[\,x + e^{\frac{y}{x}}\,\right]$$

$$= \underbrace{xy + xe^{\frac{y}{x}}}_{z} - ye^{\frac{y}{x}} + yx + ye^{\frac{y}{x}} = z + yx \qquad \blacksquare$$

PROBLEMA 10

Sea la función $v(r,t) = t^n\,e^{-\frac{r^2}{4t}}$

a) Calcular : $\frac{\partial v}{\partial t}$ y $\frac{\partial v}{\partial r}$

b) Hallar el valor de la constante "n" tal que v satisface la siguiente ecuación $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\frac{\partial v}{\partial r}\right]$.

Solución:

Se tiene : $v \begin{cases} \nearrow r \\ \searrow t \end{cases}$

Es directo, los cálculos (queda como ejercicio).

PROBLEMA 11 ***(Regla de la cadena)***

Sea $\mu(x,y) \in C^1$, $x = e^r$, $y = e^s$

Demostrar que: $\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} = 0$ toma la forma $x^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$

Solución:

Se tiene : $\mu \begin{cases} \nearrow x \longrightarrow r \\ \searrow y \longrightarrow s \end{cases}$

se debe calcular : a) $\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2}$, b) $\frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2}$

Veamos:

Mirando el diagrama de árbol, tenemos :

a) $\frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r}$. La segunda derivada es :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\right]$$

$\frac{\partial \mu}{\partial x} \begin{cases} \nearrow x \longrightarrow r \\ \searrow y \longrightarrow s \end{cases}$

$$= \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right]\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \cdot \underbrace{e^r \cdot e^r}_{x^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \underbrace{e^r}_{x}$$

b) $\boxed{\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} = x^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + x\frac{\partial \mu}{\partial x}}$

De manera similar se hallan b). Luego, sume para obtener lo pedido.

PROBLEMA 12 *(Regla de la cadena)*

Si $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 en $\mathbb{R}^3$ y $w = f(x,y,z)$ satisface la ecuación (en coordenadas rectangulares)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Usando coordenadas cilíndricas, probar que la función (en coordenadas cilíndricas), satisface la ecuación siguiente: $\cos\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} + r\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ ..... (**)

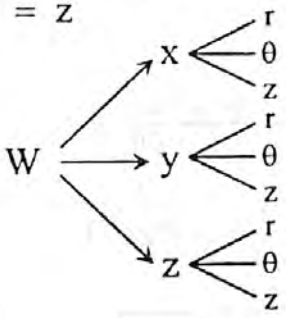
[considerar cada x, y, z como funciones de r, θ, z]

Solución:

Se tiene la función $w = f(x,y,z)$

Las coordenadas cilíndricas son : $x = r\cos\theta$
$y = r\operatorname{sen}\theta$
$z = z$

El diagrama de árbol, de funciones compuestas, es :



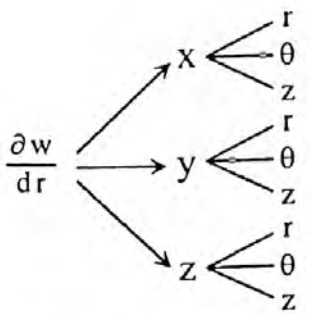
Ahora, hacer los siguientes cálculos :

a) $\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z}$, b) $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z}$, c) $\frac{\partial w}{\partial r}$

Veamos:

Empezar por c) $$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial r}}_{0}$$

c) $$\boxed{\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\theta}$$



Ahora, hallemos la 2ª derivada de $\frac{\partial w}{\partial r}$ con respecto a z :

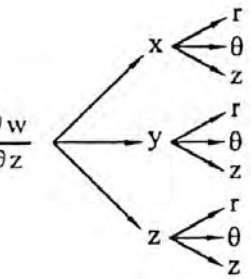
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\cos\theta+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\operatorname{sen}\theta$$

a) $$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial r}=\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}\cos\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y}\operatorname{sen}\theta}$$

A continuación hallar $\frac{\partial w}{\partial z}$:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial z}}_{0}+\frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}_{0}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{1}$$
$$=\frac{\partial w}{\partial z}$$

En seguida, hallar $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial z}$. Como $\frac{\partial w}{\partial z}$



aplicamos regla de la cadena :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial\theta}}_{0}$$
$$=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}(-r\operatorname{sen}\theta)+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}(r\cos\theta)$$

b) $$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial z}=-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}+r\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}}$$

CONCLUSIÓN : $\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\,\partial z}+r\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}$

$= 0$ ..... (por *)

PROBLEMA 13 ***(Regla de la cadena)***

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $g:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x,y)=xy\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$.

Hallar la función G tal que $z=g(x,y)$ satisface $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z\,G(x,y)$

Solución:

Se tiene : $z = xy\,f(\mu)$, donde $\mu = \dfrac{x+y}{xy}$

a) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\left[\ 1.f(\mu) + x.f'(\mu)\dfrac{\partial \mu}{\partial x}\ \right]$

$$= y\left[\ f(\mu) + x.f'(\mu)\frac{xy-(x+y)y}{(xy)^2}\ \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = y\left[\ f(\mu) - \frac{1}{x}f'(\mu)\ \right]}$$

b) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\left[1.f(\mu) + y.f'(\mu)\dfrac{\partial \mu}{\partial y}\right]$

$$= x\left[\ f(\mu) + y\,f'(\mu)\frac{xy-(x+y)x}{(xy)^2}\ \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[f(\mu) - \frac{1}{y}f'(\mu)\right]}$$

Hacer la suma:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y\left[f(\mu) - \frac{1}{x}f'(\mu)\right] - y^2x\left[f(\mu) - \frac{1}{x}f'(\mu)\right]$$

$$= \underbrace{(x-y)}_{G(x,y)}\ \underbrace{xy\,f(\mu)}_{z}$$

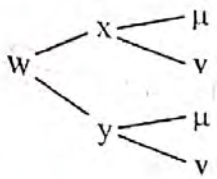
Entonces, $G(x,y) = x - y$.

PROBLEMA 14 ***(Regla de la cadena)***

Sea $f: IR^2 \longrightarrow IR$ una función de clase C^2

Si $w = f(x,y)$, $x = \mu + v$, $y = \mu - v$ demostrar que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \mu} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Solución:

Se tiene : 

donde $\begin{cases} x = \mu + v \\ y = \mu - v \end{cases}$ ..... (I) $\quad \dfrac{\partial x}{\partial \mu} = 1 \quad \dfrac{\partial y}{\partial \mu} = 1$

a) Hallar :

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}(1) \quad + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot$$

b) $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial \mu} = \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial y}$$

c) Para hallar $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ resolver el sistema (I) expresando las variables μ, v en términos de x, y.

PROBLEMA 15 ***(Regla de la cadena)***

Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demostrar que la función $g(x,y) = x\,y\,\varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right)$ satisface: $x^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y^2\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (x+y)\,g(x,y)$

[Advertir que $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(h(x,y)) = \varphi'(h(x,y))\cdot\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ y análogamente para $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(h(x,y))$].

Solución:

De : $g(x,y) = x\,y\,\varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right)$, obtenemos :

a) $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\left[1\,.\,\varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right) + x\,.\,\varphi'\left(\frac{x-y}{xy}\right)\left(\frac{xy-(x-y)y}{(xy)^2}\right)\right]$$

$$= y\left[\varphi(h(x,y)) + \frac{xy^2}{x^2y^2}\varphi'(h(x,y))\right]$$

$$= y\left[\varphi(h(x,y)) + \frac{1}{x}\varphi'(h(x,y))\right] \quad , \quad h(x,y) = \frac{x-y}{xy}$$

b) $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\left[1\cdot\varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right)+y\,\varphi'\left(\frac{x-y}{xy}\right)\left(\frac{-xy-(x-y)x}{(xy)^2}\right)\right]$

$$= x\left[\varphi(h(x,y))-\frac{yx^2}{x^2y^2}\varphi'(h(x,y))\right]$$

$$= x\left[\varphi(h(x,y))-\frac{1}{y}\varphi'(h(x,y))\right]$$

Sustituir en $x^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+y^2\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

$$x^2\left[y\varphi(h(x,y))+\frac{y}{x}\varphi'(h(x,y))\right]+y^2\left[x\varphi(h(x,y))-\frac{x}{y}\varphi'(h(x,y))\right]$$

$$= x^2y\varphi(h(x,y))+xy\varphi'(h(x,y))+xy^2\varphi(h(x,y))-yx\varphi'(h(x,y))$$

$$= xy\varphi(h(x,y))[x+y] = (x+y)\,g(x,y)$$ ■

PROBLEMA 16 Demostrar que la función: $z = f(x,y) = (x+y)^2 + e^y \operatorname{sen}(x-y)$ satisface la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

(queda como ejercicio)...

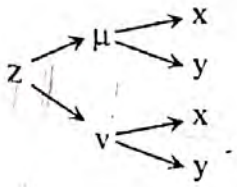
PROBLEMA 17 Sea $z = f(\mu,v)$, $\mu = xy$, $v=\frac{y}{x}$ donde f tiene segundas derivadas continuas.

a) Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

b) Demostrar que: $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\mu v\frac{\partial^2 z}{\partial \mu\,\partial v}+2v\frac{\partial z}{\partial v}$

Solución:

Se tiene :



Continúe Ud. ...

5.2 FUNCIONES IMPLÍCITAS

En esta parte del curso estudiaremos los procedimientos para derivar una función que está definida implícitamente dentro de la ecuación o dentro de dos ecuaciones en el entorno de un punto.

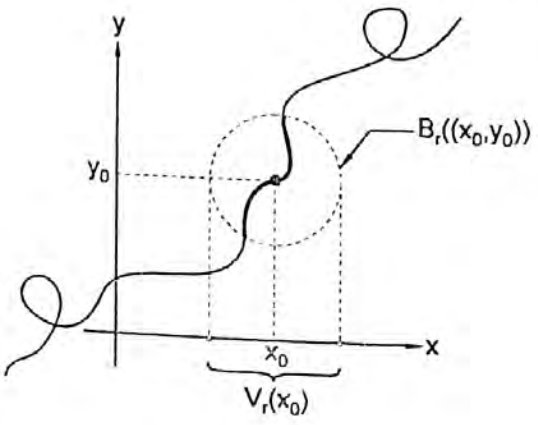
Hay cuatro versiones de derivar una función que está definido implícitamente. En este capítulo estudiaremos tres versiones, la cuarta versión estudiaremos en el capítulo 7.

5.2.1 Primera Versión.

TEOREMA 1 Sea la función $z = F(x,y)$ y (x_0 , y_0) un punto de $\mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0 , y_0) = 0$. Supongamos que la función F tiene derivadas parciales en alguna bola. $B_r((x_0 , y_0)) = \{(x , y) / \|(x,y) - (x_0 , y_0)\| < r\}$ de centro en (x_0 , y_0) y radio r, $r > 0$ y que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0 , y_0) \neq 0$.

Entonces $F(x,y) = 0$ se puede resolver para "y" en términos de "x" y definir así una función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad de x_0, tal que $y_0 = f(x_0)$, la cual tiene derivadas continuas en $V_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r \}$ que pueden calcularse como $y' = f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$, $x \in V_r(x_0)$

Demostración: Si asumimos la existencia de la función implícita $y = f(x)$ del Teorema de la función implícita, la fórmula para calcular su derivada, se obtiene de la regla de la cadena.



En efecto, para $x \in V_r(x_0)$ se tiene

$$F(x , f(x)) = 0$$

Si F es diferenciable en $B_r((x_0 , y_0))$ y f es diferenciable en $V_r(x_0)$, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

lqqd.

Nota : *Consultar el libro Curso de Análise vol. 1. Elon Lima, para ver la demostración del Teorema 1.*

Ejemplo 1 Dando la ecuación $e^{2x+y} + \operatorname{sen}(y^2 + x) - 1 = 0$ Hallar $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(0,0)$.

Solución:

Se tiene la siguiente función $F(x,y) = e^{2x+y} + \operatorname{sen}(y^2 + x) - 1$

donde $F(0,0) = 0$

Además $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{2x+y} + 2y\cos(y^2 + x)$, donde $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$

Por el teorema 1, afirmamos dos cosas :

1. En un entorno de $x_0 = 0$, existe una función $y = f(x)$ definida implícitamente por $F(x,y) = 0$. Sin embargo, el teorema nada dice de cómo se determina tal función (nos dice que $F(x,y) = 0$ puede resolverse para "y" en términos de "x", pero **NO** nos dice cómo hacer el despeje)
2. Pese, que el teorema **NO** nos diga cómo establecer explícitamente la función $y = f(x)$, ***nos dice*** cómo hallar su derivada mediante la fórmula : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

Así obtenemos : $\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^{2x+y} + \cos(y^2 + x)}{e^{2x+y} + 2y\cos(y^2 + x)}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(0,0) = -\frac{3}{1} = -3$$

5.2.2 Segunda Versión

TEOREMA 2

Sea la función $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ que cumpla las siguientes hipótesis :

h_1. Sea $p = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un punto tal que $f(p) = 0$.

h_2. Supongamos que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola $B_\varepsilon(p)$ y que $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$.

Tesis : Entonces la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ puede resolverse para y en términos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y definir así una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dentro de la vecindad $V_\varepsilon((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)) \subset \mathbb{R}^n$ la cual tiene derivadas parciales continuas en $V_\varepsilon((\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n))$ y que se pueden calcular con las formulas:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}, \quad (x_1, x_2, \ldots x_n) \in V_\varepsilon.$$

Ejemplo 2 dada la ecuación $z + z^y = x$, una solución es $(4,1,2)$ ¿es cierto que cerca de $(4,1)$, z es función de las otras variables x, y ? ¿Cuál sería la derivada de esta función implícita?

Solución:

Es una aplicación del teorema 2 :

Las hipótesis son :

h_1. En la función $\boxed{F(x,y,z) = z + z^y - x}$

se cumple $F(4,1,2) = 2 + 2^1 - 4 = 0$

h_2. $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + yz^{y-1}$, tal que $\frac{\partial F}{\partial z}(4,1,2) = 1 + 1(2)^{1-1}$

$= 2 \neq 0$

Entonces afirmamos dos tesis :

a) Porque $\frac{\partial F}{\partial z}(4,1,2) \neq 0$, existe la función $z = f(x,y)$ en forma implícita en un disco de centro $(4,1)$ y radio r.

b) Las derivadas parciales de la función implícita $z = f(x, y)$ en el punto $(4,1)$, son :

i) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-1}{1 + y z^{y-1}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{z^y \, Ln\, z}{1 + y\, z^{y-1}}$, en $(4,1,2)$ es :

$$= -\frac{2^1 \, Ln\, 2}{2} = -Ln\, 2$$

Ejemplo 3 Dada la ecuación $x + x^y = z$, una de sus soluciones es $(x\,,\,y\,,\,z) = (2\,,\,3\,,\,10)$ ¿es cierto que cerca de $(3\,,\,10)$, x es función de las otras variables y, z? ¿Cuál sería la derivada de esta función implícita?

Solución:

Según el teorema 2, tenemos las siguientes hipótesis :

h_1. En la función $\boxed{F(x,y,z) = x + x^y - z}$, se cumple $F\,(2,3,10) = 0$

h_2. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + y\, x^{y-1}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2\,,3\,,10) = 1 + 3\,(2)^2 = 13 \neq 0$

Las tesis son :

a) Porque $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2\,,3\,,10) \neq 0$, afirmamos que existe la función implícita $x = f(y,z)$ cerca de $(3,10)$.

b) La derivada de la función implícita $x = f(y,z)$ está dada por las siguientes derivadas parciales :

i) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\dfrac{x^y \, Ln\, x}{1 + y\, x^{y-1}} = -\dfrac{8\, Ln 2}{13}$, $(x\,,\,y\,,\,z) = (2\,,\,3\,,\,10)$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\dfrac{-1}{1 + y\, x^{y-1}} = \dfrac{1}{13}$

5.2.3 Tercera Versión

Dadas dos ecuaciones con 4 variables $\begin{cases} F(x, y, \mu, v) = 0 \\ G(x, y, \mu, v) = 0 \end{cases}$,

Nuestro interés es investigar sin existen, y bajo qué condiciones, las funciones $\mu = f(x,y)$ y $v = g(x,y)$ en forma implícita. Además, queremos hallar las siguientes derivadas parciales :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

Este problema es resuelto por el siguiente teorema :

TEOREMA 3 Dadas las funciones $z_1 = F(x,y,\mu,v)$, $z_2 = G(x,y,\mu,v)$ establecemos las siguientes hipótesis :

h_1. Sea $\mathbf{p} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{\mu}, \overline{v}) \in \mathbb{R}^4$ un punto tal que $F(\mathbf{p}) = 0$, $G(\mathbf{p}) = 0$

h_2. Supongamos que las funciones F y G tienen derivadas parciales continuas en una bola $B_\epsilon((\overline{x}, \overline{y}, \overline{\mu}, \overline{v})) \subset \mathbb{R}^4$

h_3. El Jacobiano $\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}(\mathbf{p}) \neq 0$

Tesis :

a) Entonces, existen las funciones (implícitas) $\mu = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ tal que $F(x, y, f(x,y), g(x,y)) = 0$, $G(x, y, f(x,y), g(x,y)) = 0$ en una vecindad V de $(\overline{x}, \overline{y})$.

b) Existen las derivadas parciales de las funciones implícitas $\mu = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ que son continuas en V. Dichas derivadas parciales están dadas por :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}}$$

Demostración (queda como ejercicio)

Ejemplo 4

El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = \mu \operatorname{sen} v + v \operatorname{sen} \mu \\ x \cos y + y \cos x = \mu \cos v + v \cos \mu \end{cases}$

tiene como uno de sus soluciones al punto $P = (x, y, \mu, v) = (0, 1, 0, 1)$.

a) Probar, que el sistema de ecuaciones dado determinan las funciones implícitas de clase C^1, $\mu = \mu(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

b) Halle las derivadas parciales de estas funciones en el punto P.

Solución .

Hagamos cumplir las hipótesis del teorema 3 :

h_1 : Las funciones $F(x,y,\mu,v) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x - \mu \operatorname{sen} v - v \operatorname{sen} \mu$

$G(x,y,\mu,v) = x \cos y + y \cos x - \mu \cos v - v \cos \mu$

se hacen : $F(0,1,0,1) = 0$

$G(0,1,0,1) = 0$

h_2 : Las funciones F y G tienen derivadas parciales en la bola $B_\varepsilon(0,1,0,1) \subset \mathbb{R}^4$

Dichas derivadas parciales, son :

$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{sen} y + y \cos x$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \operatorname{sen} 1 + 1$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos y + \operatorname{sen} x$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial \mu} = -\operatorname{sen} v - v \cos \mu$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial F}{\partial \mu}(P) = -\operatorname{sen} 1 - 1$

$\frac{\partial F}{\partial v} = -\mu \cos v - \operatorname{sen} \mu$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial F}{\partial v}(P) = 0$

$\frac{\partial G}{\partial x} = \cos y - y \operatorname{sen} x$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial G}{\partial x}(p) = \cos 1$

$\frac{\partial G}{\partial y} = -x \operatorname{sen} y + \cos x$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial G}{\partial y}(P) = 1$

$\frac{\partial G}{\partial \mu} = -\cos v + v \operatorname{sen} \mu$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial G}{\partial \mu}(P) = -\cos 1$

$\frac{\partial G}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} v - \cos \mu$. En $P = (0, 1, 0, 1)$ es $\frac{\partial G}{\partial v}(P) = -1$

h_3. Calcular el Jacobiano $\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}$ en el punto P :

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mu} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial \mu} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} 1 - 1 & 0 \\ -\cos 1 & -1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} 1 + 1$$

Ahora, respondamos las preguntas :

a) Porque $\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}(P) = \operatorname{sen} 1 + 1 \neq 0$, afirmamos que existen, implícitamente, las funciones $\mu = \mu(x,y)$, $v = v(x,y)$ en algún entorno del punto $P = (0,1,0,1)$.

b) Las derivadas parciales de las funciones $\mu = \mu(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en el punto $P = (0,1,0,1)$ son :

i) $\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}}$, donde $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} 1 + 1 & 0 \\ \cos 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -\frac{-(\operatorname{sen} 1 + 1)}{\operatorname{sen} 1 + 1} = 1$ $= -(\operatorname{sen} 1 + 1)$

ii) $\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}}$, donde $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 0$ $= 0$

iii) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}}$, donde $\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mu} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial \mu} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} 1 - 1 & \operatorname{sen} 1 + 1 \\ -\cos 1 & \cos 1 \end{vmatrix}$

$= 0$ $= 0$

iv) $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,v)}}$, donde $\frac{\partial(F,G)}{\partial(\mu,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mu} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial \mu} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} 1 - 1 & 0 \\ -\cos 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\frac{-\operatorname{sen} 1 - 1}{\operatorname{sen} 1 + 1} = 1$ $= -\operatorname{sen} 1 - 1$

Ejemplo 5 Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+y^3+z^3=2 \\ xy+z=1 \end{cases}$ está claro que el punto $(0,1,1)$ es una solución. Cerca de dicho punto, y para las soluciones del sistema, ¿es x función de (y,z)? ¿es y función de (x,z)? ¿es z función de (x,y)? ¿por qué?.

Solución:

En primer lugar, analicemos para cada caso, si los datos del problema satisfacen las hipótesis del teorema 3:

Se tiene las funciones: $F(x,y,z) = x^2+y^3+z^3-2$
$G(x,y,z) = xy+z-1$

Donde :

h_1. $F(0,1,1)=0$, $G(0,1,1)=0$, $P=(x,y,z)=(0,1,1)$

h_2. Las funciones F y G tienen derivadas parciales continuas en la bola $B_\varepsilon(0,1,1) \subset IR^3$. Dichas derivadas parciales, son :

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial x}(P)=0$	$\frac{\partial G}{\partial x}=y$, $\frac{\partial G}{\partial x}(P)=1$
$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P)=3$	$\frac{\partial G}{\partial y}=x$, $\frac{\partial G}{\partial y}(P)=0$
$\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2$, $\frac{\partial F}{\partial z}(P)=3$	$\frac{\partial G}{\partial z}=1$, $\frac{\partial G}{\partial z}(P)=1$

h_3. Aquí hay 3 preguntas que responder :

a) ¿es x función de (y,z) cerca de $(0,1,1)$? Esto es, $x = f(y,z)$?

La respuesta es afirmativa, si el Jacobiano $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ en el punto $(0,1,1)$ es diferente de cero.

Veamos:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Porque el Jacobiano es diferente de cero, afirmamos que x es función de (y,z).

b) ¿es y función de (x,z) cerca de $(0,1,1)$? esto es, $y = g(x,z)$?

Hallemos el Jacobiano siguiente en el punto $(0,1,1)$:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Como este Jacobiano es diferente de cero, afirmamos que y es función de (x,z), implícitamente.

c) ¿Es z función de (x,y)?

Calcular el Jacobiano $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ en el punto (x, y, z) = (0, 1, 1).

Veamos:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

la respuesta es afirmativa.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si $z = f(uv^2)$, demuestre que $2u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

2. Si $z = f(u - v, v - u)$, demuestre que $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$

3. Si $w = f\left(\frac{r-s}{s}\right)$, demuestre que $r\frac{\partial w}{\partial r} + s\frac{\partial w}{\partial s} = 0$

4. Si $z = xy + f(x^2, y^2)$, demuestre que $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$

5. Sean f y g funciones de una variable dos veces derivables y sea $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ donde **c** es constante. Demuestre que **u** satisface la ecuación de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

6. Si $z = xy + f\left(\frac{x}{y}\right)$, demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

7. Sea $z = f(xy) + \sqrt{xy}\ g\left(\frac{y}{x}\right)$, donde f y g son funciones de clase C^2. Hallar $E = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

8. Demuestre que la función $F(x,y) = f\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)$ donde f es una función real diferenciable de variable real, satisface la ecuación diferencial parcial $(x^2 + y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

9. Sea $G(x,y) = x^\alpha \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, en que ϕ es una función real dos veces diferenciable, de una variable real, y α es un número real. Demuestre que:

   a. $x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} = \alpha G(x,y)$

   b. $x^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1) G(x,y)$

10. Se dice que la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Laplace si $L(f(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\forall (x,y) \in U$.

   a) Sean $\phi, \Psi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$
   Demuestre que ϕ y ψ satisfacen la ecuación de Laplace.

b) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface la ecuación de Laplace, y sean ϕ y ψ dos funciones como en a). Demuestre que la función $F(u,v) = f\big(\phi(u,v), \psi(u,v)\big)$ satisface la ecuación de Laplace.

c) Con el resultado anterior, demuestre que si la función $f(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace, entonces la función $F(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ también la satisface.

Nota: ***Las funciones dadas en a) , b) y c) son de clase C^2 .***

11. Suponer que f es una función diferenciable de una variable y que una función $u = g(x,y)$ está definida por $u = xy\, f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$.

Mostrar que u satisface una ecuación diferencial (parcial) de la forma $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u\, G(x,y)$ y hallar la función $G(x,y)$.

CAPÍTULO 6

EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.0 INTRODUCCIÓN

Dado una función $f : D \subset IR^n \longrightarrow IR$ definida en el conjunto abierto D de IR^n,

$$(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \longrightarrow z = f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$

plantiemos las siguientes interrogantes:

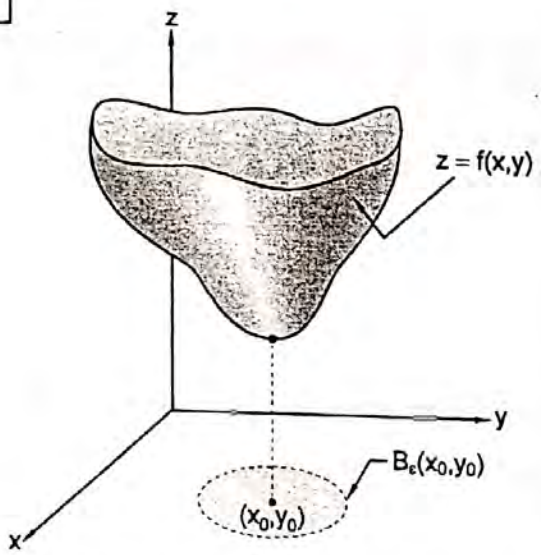
1. ¿Para qué puntos $\overline{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in D$ se cumple que $\nabla f(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = (0 , 0 , \dots , 0)$?
2. ¿En qué puntos $\overline{x} \in D$ la función f no es diferenciable?
3. ¿En qué caso un punto $\overline{x} \in D$, es punto de silla?
4. ¿En qué casos el número $f(\overline{x})$ es un máximo o mínimo local, siendo $\overline{x}$ un punto obtenido en 1 o 2 ?
5. Si el dominio D es un conjunto compacto ¿La función $f(\overline{x})$ tiene máximo y mínimo absolutos en D?.
6. ¿Cuál es la **CONDICIÓN NECESARIA** para la existencia de máximos y mínimos de la función f ?.
7. ¿Cuál es la **CONDICIÓN SUFICIENTE** para la existencia de máximos o mínimos de la función f ?

De manera particular es interesante analizar las funciones $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

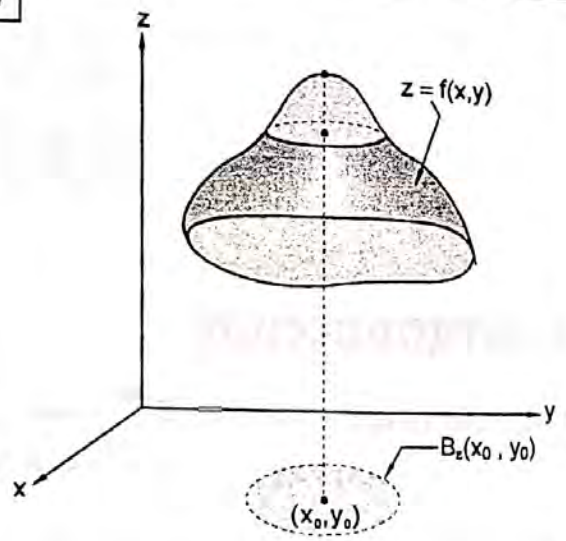
cuyo gráfico $Gr(f)=\left\{(x,y,f(x,y))\in \mathbb{R}^3 / (x,y)\in D\right\}$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$.
Las superficies en IR^3 que tienen máximos, mínimos o puntos de silla son similares a los siguientes gráficos:

1



En (x_0, y_0) se cumple $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$
El número $f(x_0, y_0)$ es un mínimo local sobre el disco $B_\varepsilon(x_0, y_0)$

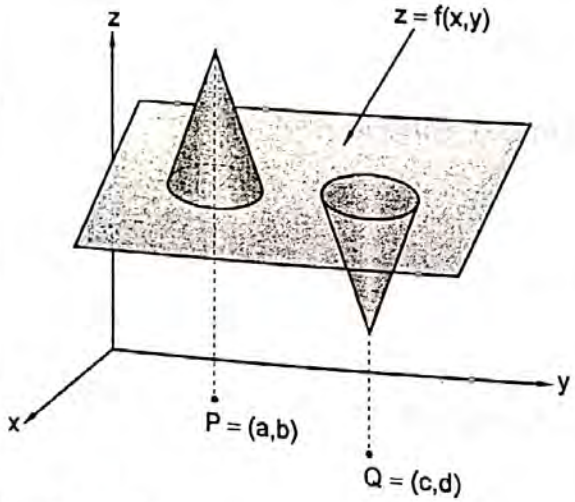
2



En (x_0, y_0) se cumple $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$
El número $f(x_0, y_0)$ es un máximo local sobre el disco $B_\varepsilon(x_0, y_0)$

3

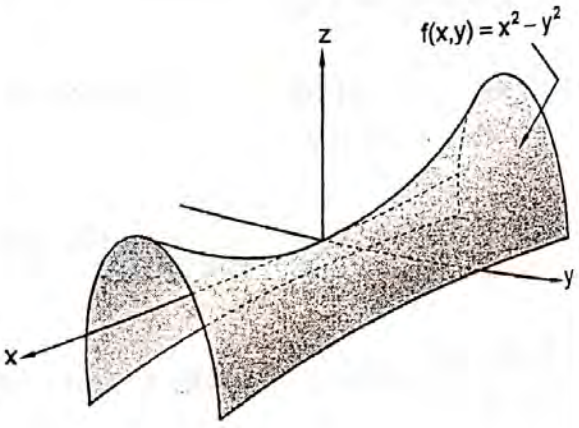
Sea la superficie $z = f(x,y)$



1. En P la función f(x,y) no es diferenciable.
   En P existe máximo local, que es el número real f(a,b).
2. En Q la función f(x,y) no es diferenciable
   En Q existe mínimo local, que es el número real f(c,d).

4

PUNTO DE SILLA



1. En (0, 0) se cumple $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$
2. En un disco abierto de centro en (0,0) se cumplen :
   $f(c,0) = c^2 > f(0, 0) = 0$, $c \neq 0$
   y $f(0, c) = -c^2 < f(0, 0) = 0$
   Este resultado confirma que $f(0,0) = 0$ no es máximo ni mínimo. Es un punto de silla.

Para responder las 7 interrogantes daremos algunas definiciones, previas a los teoremas relativos al tema.

6.0.1 Definiciones Preliminares:

- Matriz transpuesta
- Matriz simétrica
- Valores propios de una matriz simétrica
- Forma cuadrática
- Hessiana
- Fórmula de Taylor de segundo orden.

6.0.1.1 Matriz Transpuesta

Definición

Dada una matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$ de m filas por n columnas, la TRANSPUESTA de la matriz A, es otra matriz de n filas por m columnas que , resulta de cambiar filas por columnas, esto es, $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ es la transpuesta de la matriz A .

Ejemplo 1 Si $X = [x_1 x_2 \ldots . x_n]$, entonces $x^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

6.0.1.2 Matriz Simétrica

Definición 2

Una matriz cuadrada A de orden n es simétrica si $A = A^t$

Ejemplo 2 La matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ es Simétrica, porque $A = A^t$

6.0.1.3 Valores Propios de una Matriz Simétrica.

Dado una matriz cuadrada A de orden n, se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe un vector $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$. Al vector X se le llama vector propio asociado a λ.

Los valores propios de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Definición 3

Una matriz cuadrada P de orden n es Ortogonal si $P^{-1} = P^t$, P^{-1} es la inversa de P , P^t es la transpuesta de P.

Proposición Si A es una matriz simétrica, entonces :

a) Todos sus valores propios son números reales, y

b) A es diagonalizable ortogonalmente. Esto es, existe una matriz ortogonal P, tal que, $P^t AP = D$, donde D es una matriz diagonal que tiene a los valores propios de A en su diagonal principal .

Ejemplo 3 Supongamos que los valores propios de una matriz simétrica A son $\{2 , -3 , 5\}$, entonces existe P, tal que

$$P^t AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

6.0.1.4 Formas Cuadráticas

Definición 4

Sea A una matriz simétrica de orden n. Una forma *cuadrática* en IR^n es una función $q : IR^n \longrightarrow IR$ definida por $q(X) = X\,AX^t$, $X = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n] \in IR^n$

Ejemplo 4 Dado la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, hallar la forma cuadrática

Solución :

Si $X = [x\ y\ z]$ y A es una matriz simétrica de orden 3, entonces:

$$XAX^t = [x\ y\ z]\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$$ es la forma cuadrática.

Por tanto, $q(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$.

Ejemplo 5 Dado la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$, hallar la forma cuadrática.

Solución :

Si $X = [x\ y]$, y A es una matriz simétrica de orden 2, entonces:

$$XAX^t = [x\ y]\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4x^2 + 11y^2 - 24xy$$ es la forma cuadrática.

Así obtenemos: $q(x,y) = 4x^2 + 11y^2 - 24xy$

6.0.1.5 Hessiana

Definición

Dado la función $f: D \subset IR^3 \longrightarrow IR$, $(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ definida en el conjunto abierto D de IR^3, si las derivadas de segundo orden : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ existen en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$, a la matriz cuadrada de orden 3 definida por :

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

se le llama **MATRIZ HESSIANA** de la función f en P y se denota por H (f).

PROPIEDAD: La matriz **HESSIANA** es simétrica.

Ejemplo 6 Para hallar los máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = x\,y\,z\,(4a - x - y - z)$ es necesario hallar los puntos $(x,y,z) \in IR^3$ tal que $\nabla f = (0,0,0)$ y analizar la matriz hessiana en cada punto obtenido del sistema $\nabla f = (0,0,0)$. Hallar la matriz hessiana de f en cada punto obtenido del sistema $\nabla f = (0,0,0)$.

Solución :

En primer lugar, hallar todos los puntos (x,y,z) que son soluciones de $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$. De $f(x,y,z) = x\,y\,z\,(4a - x - y - z)$, $a > 0$; obtenemos :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \left(yz(4a - x - y - z) - xyz,\ xz(4a - x - y - z) - xyz,\ xy(4a - x - y - z) - xyz\right)$$

Resolver $\nabla f = (0,0,0)$

$$\begin{cases} yz(4a-x-y-z)-xyz=0 \\ xz(4a-x-y-z)-xyz=0 \\ xy(4a-x-y-z)-xyz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz(4a-2x-y-z)=0 \leftrightarrow y=0 \vee z=0 \vee 4a-2x-y-z=0 \\ xz(4a-x-2y-z)=0 \leftrightarrow x=0 \vee z=0 \vee 4a-x-2y-z=0 \\ xy(4a-x-y-2z)=0 \leftrightarrow x=0 \vee y=0 \vee 4a-x-y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \wedge (x=0 \ \vee \ z=0 \ \vee \ 4a-x-2y-z=0 \quad .....1) \\ x=0 \wedge (y=0 \ \vee \ z=0 \ \vee \ 4a-2x-y-z=0 \quad .....2) \\ z=0 \wedge (x=0 \ \vee \ y=0) \ \vee \ 4a-x-y-2z=0 \quad .....3) \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones 1. , 2. , 3. obtenemos :

$$\begin{aligned} 12a - 4x - 4y - 4z &= 0 \\ 3a - x - y - z &= 0 \quad ..... \quad 4. \end{aligned}$$

sustituir 1. en 4. , 2. en 4. y 3. en 4., se obtienen : $x = a \ , \ y = a \ , \ z = a.$

Se puede seguir resolviendo y se obtienen :

$$\{(a,a,a),(0,0,z),(0,y,0),(x,0,0),(x,0,4a-x),(0,y,4a-y),(x,4a-x,0)\}$$

En segundo lugar, hallar las derivadas de segundo orden, para obtener la hessiana .

De $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$, obtenemos :

$$f'_x = yz(4a-x-y-z) - xyz$$

$$f''_{xx} = -yz - yz = -2yz$$

$$f''_{xy} = z(4a-x-y-z) - yz - xz = 4az - xz - yz - z^2 - yz - xz = 4az - 2xz - 2yz - z^2$$

$$f''_{xz} = y(4a-x-y-z) - yz - xy = 4ay - xy - y^2 - yz - yz - xy = 4ay - 2xy - 2yz - y^2$$

$$f'_y = xz(4a-x-y-z) - xyz$$

$$f''_{yy} = -xz - xz = -2xz$$

$$f''_{yz} = x(4a-x-y-z) - xz - xy = 4ax - 2xy - 2xz - x^2$$

$$f'_z = xy(4a-x-y-z) - xyz$$

$$f''_{zz} = -xy - xy = -2xy$$

La hessiana de f es:

$$Hf = \begin{bmatrix} -2yz & 4az-2xz-2yz-z^2 & 4ay-2xy-2yz-y^2 \\ 4az-2xz-2yz-z^2 & -2xz & 4ax-2xy-2xz-x^2 \\ 4ay-2xy-2yz-y^2 & 4ax-2xy-2xz-x^2 & -2xy \end{bmatrix}$$

y $\quad Hf(a,a) = \begin{bmatrix} -2a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & -2a^2 & -a^2 \\ -a^2 & -a^2 & -2a^2 \end{bmatrix}$

De manera similar, se hallan las otras hessianas en cada uno de los seis puntos restantes.

6.0.1.6 Fórmula de Taylor de Segundo Orden

TEOREMA Sea $f : D \subset IR^n \longrightarrow IR$ una función definida en el conjunto abierto D de IR^n, tal que las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ son continuas en alguna bola B con centro en $x_0 \in D$ (donde $B \subset D$). Entonces, para todo punto $x \in IR^n$ muy cerca de x_0, tal que $x_0 + x \in D$, se tiene la fórmula :

$$f(x_0+x) = f(x_0) + \underset{\text{GRADIENTE}}{\nabla f(x_0).x} + \underset{\text{HESSIANA}}{\frac{1}{2} x\, Hf(x_0)\, x^t} + \underset{\text{RESIDUO}}{r(x)}$$

donde el residuo r(x) tiene la propiedad :

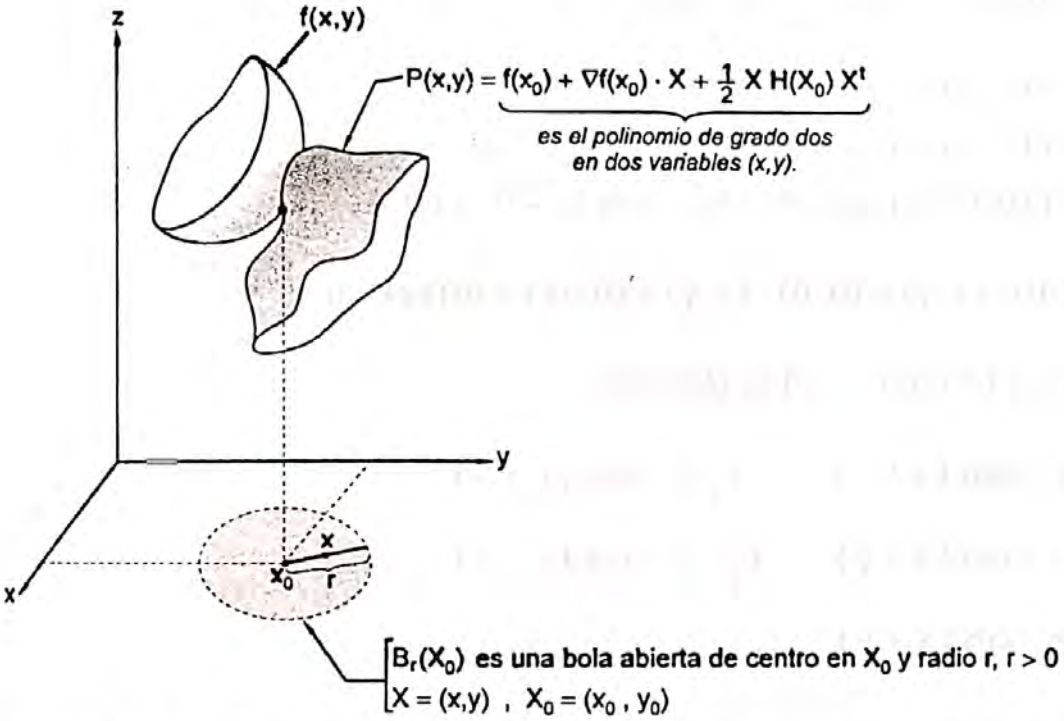
$$\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{\|x\|^2} = 0$$

llamado ***FÓRMULA DE TAYLOR*** *de segundo orden para la función f en* x_0

OBSERVACIONES:

1. $f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot x + \frac{1}{2} x\, Hf(x_0)\, x^t$ es el polinomio de Taylor de segundo grado en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; que la denotaremos por $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Los puntos de $x \in IR^n$ están muy cerca al punto fijo x_0 .
3. f es una función de n variables independientes .
4. El polinomio $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se aproxima a la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en un entorno del punto fijo $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

SIGNIFICADO DE LA FORMULA DE TAYLOR DE SEGUNDO ORDEN, para una función $z = f(x,y)$



Si la función $f(x,y)$ es de clase C^2 y elegimos un punto $X_0 = (x_0 , y_0)$ del dominio de f, entonces en un entorno del punto X_0 (esto es, en $B_r(x_0)$), la función $f(x,y)$ se puede aproximar por el polinomio de Taylor de segundo orden $P(x,y)$, es decir :

$$f(x,y) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \,.\, X + \frac{1}{2} X H(x_0) X^t$$

Ejemplo 7 Comprobar que la función $f(x,y) = \cos(x+y)$ se puede aproximar por el polinomio $p(x,y) = 1 - xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ en un entorno del punto $X_0 = (0,0)$.

Solución:

Datos: $\begin{cases} f(x,y) = \cos(x+y) \\ x_0 = (0,0) \end{cases}$

Debemos hallar el polinomio:

$$P(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0).(x,y) + \frac{1}{2}[x \;\; y]\, Hf(0,0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

CÁLCULOS AUXILIARES:

1. De $f(x,y) = \cos(x+y)$, obtenemos :
$f(0,0) = \cos(0+0) = \cos 0 = 1$

2. De $f(x,y) = \cos(x+y)$, obtenemos
$\nabla f(x,y) = (-\text{sen}(x+y), -\text{sen}(x+y))$
$\nabla f(0,0) = (-\text{sen}(0+0), -\text{sen}(0+0) = (0,0)$

3. $\nabla f(0,0) \cdot (x,y) = (0,0) \cdot (x,y) = (0)(x) + (0)(y) = 0$

4. De $f(x,y) = \cos(x+y)$ se obtienen:

$f'_x = -\text{sen}(x+y)$ $\quad$ $f'_y = -\text{sen}(x+y)$

$f''_{xx} = -\cos(x+y)$ $\quad$ $f''_{yy} = -\cos(x+y)$

$f''_{xy} = -\cos(x+y)$

La hessiana de f es $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos(x+y) \end{bmatrix}$

donde $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Hf(0,0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 - 2xy)$

Conclusión : $P(x,y) = 1 + 0 + \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 - 2xy)$

$= 1 - xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

Por lo tanto: $\cos(x+y) = 1 - xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + r(x,y)$

donde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{x^2+y^2} = 0$, pues $\|\overline{x}\|^2 = x^2 + y^2$.

Ejemplo 8 Si la función es de tres variables $f : IR^3 \longrightarrow IR$
$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$

La fórmula de Taylor de segundo orden correspondiente a la función $f(x,y,z)$ en un entorno del punto $X_0 = (x_0 , y_0 , z_0) \in$ Dom (f), está dada por :

$$f(x,y,z) = f(x_0 , y_0 , z_0) + \nabla f(x_0 , y_0 , z_0)\cdot(x , y , z) + [x\,y\,z]Hf(x_0 , y_0 , z_0)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + r(x , y , z)$$

donde $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{r(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} = 0$

Probar que :

$\text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}z - \text{sen}(x + y + z) = 4 - x^2 - y^2 - z^2 - xy - xz - yz + r(x,y,z).$

6.0.1.7 Forma cuadrática Positiva y Negativa

Definición 5

La forma cuadrática $Q(X) = X\,A\,X^t$, que tiene asociada la matriz A, se dice ser:

a) definida positiva, si $Q(X) > 0$, para todo $X \in IR^n$, $X \neq 0$
b) definida negativa, si $Q(X) < 0$, para todo $X \in IR^n$, $X \neq 0$
c) semidefinida positiva, si $Q(X) \geq 0$, para todo $X \in IR^n$, $X \neq 0$
d) semidefinida negativa, si $Q(X) \leq 0$, para todo $X \in IR^n$, $X \neq 0$

Proposición:

a) La forma cuadrática $Q(X) = X\,A\,X^t$ es **definida positiva** sí, y sólo si la matriz A tiene todos sus valores propios positivos

b) $Q(X) = X\,A\,X^t$ es **definida negativa** sí, y sólo sí la matriz A tiene todos sus valores propios negativos

6.0.1.8 Submatriz Angular

Considerando la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a las submatrices $A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ... , $A_n = A$

se les llama **"submatrices angulares de A"**

TEOREMA Sea $q : IR^n \longrightarrow IR$ la forma cuadrática $q(X) = X A X^t$

a) La matriz **A es definida positiva** si y sólo si las determinantes de las submatrices angulares $\Delta_1 = \det A_1$, $\Delta_2 = \det A_2$, ... , $\Delta_n = \det A$ son positivos .

b) Si los determinantes tienen signos alternados, comenzando con $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ...

diremos que la matriz **A es definida negativa**

6.1 EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.1.1 Definiciones de Máximo y Mínimo Local y Global de una Función Escalar $f : D \subseteq IR^n \longrightarrow IR$

$$(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \longrightarrow f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$

Sea $f : D \subseteq IR^n \longrightarrow IR$ una función definida en el conjunto abierto D de IR^n, definimos :

1. Se dice que **f** tiene un máximo local en el punto $x_0 \in D$,
   Si $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $X \in B_r(x_0) = \{ x \in IR^n / \| x - x_0 \| < r \} \subset D$
   ↑ máximo local

2. Se dice que **f** tiene un mínimo local en el punto $x_0 \in D$,
   Si $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in B_r(x_0) \subset D$

3. Se dice que **f** tiene un máximo global en el punto $x_0 \in D$,
   Si $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D$.

4. Se dice que f tiene un mínimo global en el punto $x_0 \in D$,
   Si $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D$.

6.1.2 Punto Crítico (o Punto Estacionario de la Función f)

Definición 6

Al punto $X_0 = (\overline{x}_1 , \overline{x}_2 , \dots , \overline{x}_n) \in D$ tal que $\nabla f(\overline{x}_1 , \overline{x}_2 , .. , \overline{x}_n) = (0 , 0 , .. , 0)$, se le llama **punto crítico** de la función **f** (o punto estacionario) .

6.1.3 Punto Silla

Sea $x_0 \in D$. Si cualquier bola $B_r(x_0)$ de $\mathbb{R}^n$ contiene puntos $x \in B_r(x_0)$ tales que $f(x) - f(x_0) > 0$ y puntos $y \in B_r(x_0)$ tales que $f(y) - f(x_0) < 0$, se dice que x_0 es un ***punto de silla*** de la función f.

6.1.4 Extremos de una Función

A los máximos y mínimos de una función f, se les llama **extremos de la función f.**

Una función puede tener un extremo en un punto x_0 que sea :

1. Punto interior del dominio en el cual f es diferenciable y que $\nabla f(x_0) = 0$, o
2. punto interior del dominio, en el cual f no es diferenciable, o
3. punto frontera del dominio

6.1.5 Condición Necesaria de Orden 1, para la Existencia de Extremos de la Función f

Teorema Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D, tal que sea de clase C^1 en una bola $B_r(x_0)$.

La condición necesaria de orden 1 para que f tenga extremo en x_0, es que la $\nabla f(x_0) = 0$

$\nabla f(x_0)$ ← *gradiente de f en* x_0

Demostración:

Supongamos que la función f alcanza un máximo local en x_0 .

Debo probar que $\nabla f(x_0) = 0$

Veamos:

Si f alcanza un máximo local en x_0, entonces para cualquier $h \in IR^n$, la función $g(t) = f(x_0 + th)$ tiene un máximo local en $t = 0$, lo cual implica que $g'(t) = 0$, porque g es una función real de variable real.

Si en la función $g(t) = f(x_0 + th)$ derivamos respecto a t, obtenemos :

$g'(t) = [\, Df(x_0) \,]\, h$ ..... por regla de la cadena

Como $g'(t) = 0$, entonces $[Df(x_0)]\, h = 0$ para todo $h \in IR^n$

Si $h \neq 0$, entonces $\underbrace{Df(x_0)}_{\nabla f(x_0)} = 0$

Iqqd.

De manera similar se prueba, si suponemos que en x_0 existe un mínimo local.

TEOREMA *(Teorema de Weirstrass)*

Toda función $f : IR^n \longrightarrow IR$, continua en un conjunto ***compacto*** D de IR^n tiene ***máximo*** y ***mínimo absolutos*** en D.

Definición 7

Sea $D \subset IR^n$. Se dice que D es un conjunto compacto, si es cerrado y acotado

6.1.6 Condiciones Suficientes para la Existencia de Extremos Locales.

TEOREMA Sea $f : D \subset IR^n \longrightarrow IR$ una función definida en el conjunto abierto D de IR^n que tiene en $x_0 \in D$ un punto crítico.

Supongamos que en una bola de centro en x_0 y radio r : $B_r(x_0)$, las derivadas parciales de f de segundo orden son continuas. Sea $Hf(x_0)$ la matriz hessiana de f en x_0. Entonces

a) Si la forma cuadrática $Q(x) = X\, H\, f(x_0)\, X^t$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo local en x_0.

b) Si la forma cuadratura $Q(\mathbf{x}) = X\ H\ f(\mathbf{x}_0)\ X^t$ es definida negativa, entonces f tien un máximo local en $\mathbf{x}_0$.

COROLARIO Sea $f : D \subset IR^n \longrightarrow IR$ una función definida en el conjunto abierto D de IR^n .

Supongamos que f cumpla las siguientes hipótesis :

$\mathbf{h}_1$. $\mathbf{x}_0 \in D$ es un punto crítico de **f**

$\mathbf{h}_2$. Las derivadas parciales de segundo orden de **f**, son continuas en una bola $B_r(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x} \in IR^n / \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < r \right\}$

$\mathbf{h}_3$. Sea $Hf(\mathbf{x}_0) = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

la matriz hessiana de **f** en $\mathbf{x}_0$, donde $A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ... , $A_n = A$; son las submatrices angulares de A y

$\Delta_1 = \det A_1$, $\Delta_2 = \det A_2$, $\Delta_3 = \det A_3$, ... , $\Delta_n = \det A$.

TESIS :

a) Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, ... , $\Delta_n > 0$; entonces **f** tiene un mínimo local en x_0

b) Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0$, ... ; entonces **f** tiene un máximo local en x_0

PROBLEMAS

PROBLEMA 1 Hallar los extremos locales de la función

$$\mathbf{f}:\vec{x} \longrightarrow x_1^2 - x_2^3 \ , \ \vec{x} \in \overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$$

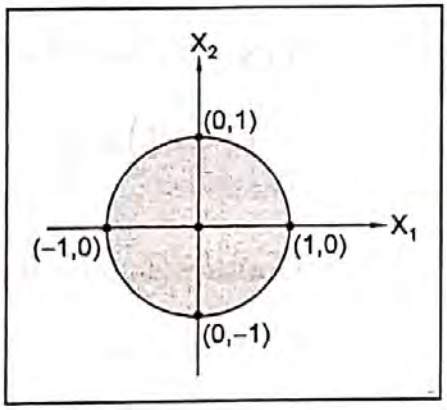
¿ Son tales extremos globales ?

Solución :

La función **f** se puede, también, expresar como $\mathbf{f}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3$ donde

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \in \overline{B}_1(0) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$$

es, un disco cerrado de centro en el origen y radio 1 (circulo)



Pasos a seguir para hallar los extremos de **f** :

I. Condición necesaria de orden 1.

1° Hallar la gradiente de **f** :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \left(2x_1 , -3x_2^2 \right)$$

2° Resolver : $\nabla f = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -3x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

El único punto crítico es $(0,0)$.

II. Condición suficiente.

3° Ahora hallemos la matriz hessiana de **f** en $(0,0)$:

a) La matriz hessiana de **f** es $Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6x_2 \end{bmatrix}$$

b) En $(0,0)$ es $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$

4° Analicemos la matriz $H\,f(0,0)$:

Como $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \det A = 0$, esto es $Q(x) = X\,A\,X^t = 2x_1^2 \geq 0$. Si $Q(x) \geq 0$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces A es positiva semidefinida. Lo cual implica que NO podemos afirmar si en $(0,0)$ existe máximo o mínimo local.

Para descartar esta duda, analicemos en el entorno del punto (0, 0) :

a) En el eje X_1 elegir el punto $\left(\frac{r}{2}, 0\right)$, con $0 < r < 1$ y reemplazar en la función

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3$

$f\left(\frac{r}{2}, 0\right) = \frac{r^2}{4}$

Como $f(0,0) = 0$, al comprar obtenemos $\underbrace{f\left(\frac{r}{2}, 0\right)}_{\frac{r^2}{4}} > \underbrace{f(0,0)}_{0}$

b) En el eje X_2 elegir el punto $\left(0, \frac{r}{2}\right)$, con $0 < r < 1$ y reemplazar en la función

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3$

$f\left(0, \frac{r}{2}\right) = -\frac{r^3}{8}$

Notamos que : $\underbrace{f\left(0, \frac{r}{2}\right)}_{-\frac{r^2}{8}} < \underbrace{f(0,0)}_{0}$

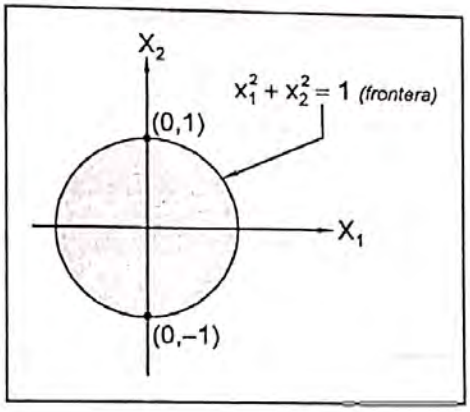
Si $f\left(\frac{r}{2}, 0\right) > f(0,0) \;\wedge\; f\left(0, \frac{r}{2}\right) < f(0,0)$ con $\left(\frac{r}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{r}{2}\right)$ en $B_1(0,0)$, entonces $(0,0)$ es punto de silla.

5° Si la función f está definido en la bola cerrada $\overline{B}_1(0,0)$, que es un conjunto compacto (cerrado y acotado), entonces tiene máximo y mínimo global (Teorema de Weirstrass).

Comprobación :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3 = x_1^2 + x_2^2 - x_2^2(1+x_2)$$

$$= 1 - x_2^2(1+x_2)\ ,\ x_2 \in [-1, 1]$$



a) Si $x_2 = -1 \Rightarrow f(0, -1) = 1$, es máximo global

b) Si $x_2 = 1 \Rightarrow f(0, 1) = -1$, es mínimo global

PROBLEMA 2 Dado la función $f : \vec{x} \longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Verificar que $P_0 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ cumple la condición necesaria de orden 1. ¿Existe en P_0 extremo local de f ? ¿existe otro punto que sea extremo local de f ?

Solución:

1. De $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3$ obtenemos :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{x_3}\right)$$

$$= (2x_1 - x_2 + 1, 2x_2 - x_1, 2x_3 - 2)$$

2. Resolver $\nabla f = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \\ 2x_3 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 1$$

El punto $P_0 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ cumple la condición necesaria de orden 1.

3. Condición suficiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 1 \qquad \frac{\partial f}{dx_2} = 2x_2 - x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

La matriz Hessiana es $Hf(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$

Como : $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 2(3) = 6$ son positivos, entonces A es positiva definida, por lo tanto afirmamos que en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ existe mínimo local. El mínimo es $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

4. No existen otros puntos donde haya extremo local, ni extremo global de **f**. Además, si A es positiva definida, entonces f es estrictamente convexa.

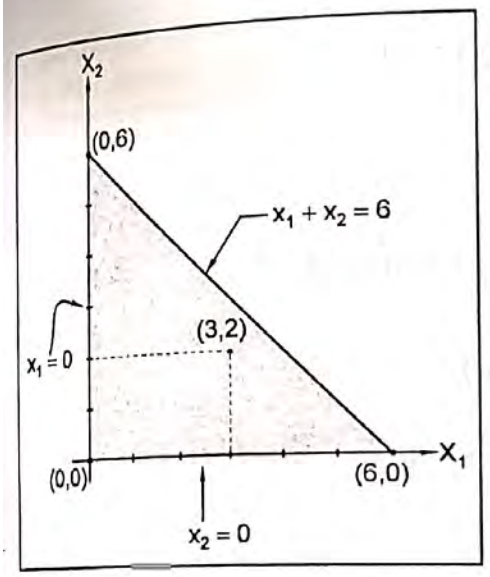
PROBLEMA 3 Sea la función $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2 (6 - x_1 - x_2)$ definida en el conjunto $\overline{\mathbb{R}}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0\}$. Hallar los extremos locales de f e indicar cuáles de ellos son extremos locales sobre la región $D = \{(x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2 / x_1 + x_2 \leq 6\}$.

Solución:

En este problema, se analizan dos casos :

Caso 1. En puntos críticos que están en el interior de la región D

Caso 2 . En la frontera de la región D.



CASO 1

I. Condición necesaria:

PASO 1. Hallar la gradiente de f y resolver $\nabla f = (0,0)$, donde $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2\, x_2^2\,(6 - x_1 - x_2) + x_1^3\, x_2^2\,(-1)$

$= x_1^2\, x_2^2\,(18 - 4x_1 - 3x_2)$ ..... (1)

b) $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2\, x_1^3\, x_2\,(6 - x_1 - x_2) + x_1^3\, x_2^2\,(-1)$

$= x_1^3\, x_2\,(12 - 2x_1 - 3x_2)$ ..... (2)

Resolver el Sistema:

$$\begin{cases} x_1^2\, x_2^2\,(18 - 4x_1 - 3x_2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = 0 \;\vee\; 18 - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1^3\, x_2\,(16 - 2x_1 - 3x_2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = 0 \;\vee\; 16 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Son soluciones: $(0,0)$

De $\begin{cases} 18 - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ 16 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$ se obtiene $(3,2)$

El único punto crítico, interior a la región D, es $(3,2)$

II. Condición suficiente.

a) Hallar la hessiana de f : $Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$

Cálculo de las derivadas de segundo orden:
De (1) hallar :

i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2x_1\, x_2^2\,(18 - 4x_1 - 3x_2) + x_1^2\, x_2^2\,(-4)$

$= 6x_1\, x_2^2\,(6 - 2x_1 - x_2)$

ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_1^2\, x_2(18-4x_1-3x_2)+x_1^2\, x_2\,(-3)$

$$= x_1^2\, x_2\,(36-8x_1-9x_2)$$

De (2) hallar : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = x_1^3\,(12-2x_1-3x_2)+x_1^3\, x_2\,(-3)$

$$= 2x_1^3\,(6-x_1-3x_2)$$

b) Ahora, evaluar la matriz hessiana en el punto $(3,2)$:

$$Hf(3,2)=\begin{bmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{bmatrix}$$

Si $\Delta_1 = -144$ (*NEGATIVO*), $\Delta_2 = 11664$ (*POSITIVO*), entonces existe máximo local en $X_0 = (3,2)$.

El máximo es $f(3,2) = (3)^3\,(2)^2\,(6-3-2) = 108$.

CASO 2 Análisis en la frontera del conjunto D

a) En el eje X_1 : $x_2 = 0$ se analiza la función
$f(x_1, 0) = 0$, $0 \le x_1 \le 6$. En este caso, $f(x_1, 0) = 0$ es un mínimo local

b) En el eje X_2 : $x_1 = 0$ se analiza la función
$f(0, x_2) = 0$, $0 \le x_2 \le 6$. En este caso $f(0, x_2) = 0$ es un mínimo local

c) En $x_1+x_2 = 6 \iff x_2 = 6-x_1$, analizar la función
$f(x_1, 6-x_1) = x_1^3\,(6-x_1)^2\,(6-x_1-6+x_1) = 0$, $0 < x_1 < 6$
En este caso, en el punto $(x_1, 6-x_1)$, el número $f(x_1, 6-x_1) = 0$ es un mínimo local

Conclusión :

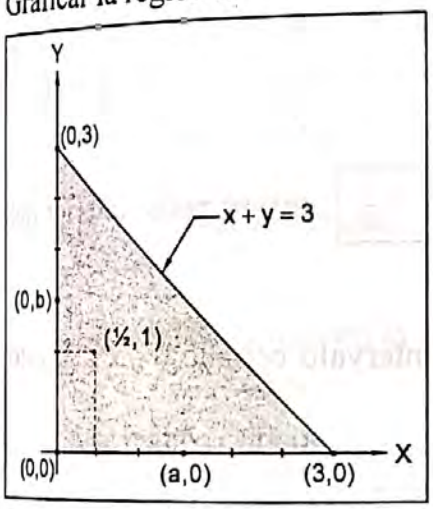
a) En $(3,2)$, $f(3, 2) = 108$ es máximo global, porque $f(x_1, x_2) \le 108$ para todo $(x_1, x_2) \in D$

b) En la frontera del conjunto D, $f(x_1, x_2) = 0$ es el mínimo global, porque $f(x_1, x_2) \ge 0$, $\forall (x_1, x_2) \in Fr(D)$. Fr (D) = Frontera del conjunto D.

PROBLEMA 4 Sea $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x+y\leq 3\ ,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\}$ una región compacta. Sea la función $f: D\subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=8x^2-4xy+5y^2-4x-8y$. Hallar los extremos de la función f.

Solución :

Gráficar la región D



Analizar dos casos :

CASO 1 Para puntos interiores de la región D

I. Condición necesaria :

1. De $f(x,y)=8x^2-4xy+5y^2-4x-8y$, hallar :

   a) $f'_x=16x-4y-4$

   b) $f'_y=-4x+10y-8$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} 16x-4y-4=0 \\ -4x+10y-8=0 \end{cases}$ se obtiene $\left(\frac{1}{2},1\right)\in \text{Int}(D)$

   ↑ *punto crítico*

II. Condición suficiente

3. Analizar la matriz hessiana en el punto crítico $\left(\frac{1}{2},1\right)$:

   Para ello, hallar las derivadas de segundo orden :

   a) $f''_{xx}=16$, $f''_{xy}=-4$, $f''_{yy}=10$

   b) $Hf=\begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

   c) $\Delta_1=16>0$, $\Delta_2=160-16=144>0$

   si $\Delta_1>0 \wedge \Delta_2>0 \Rightarrow$ existe mínimo local en $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

   El mínimo local es

$$f\left(\tfrac{1}{2},1\right)=8\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-4\left(\tfrac{1}{2}\right)(1)+5(1)^2-4\left(\tfrac{1}{2}\right)-8(1).$$

$$=-5$$

CASO 2 Analizar en la frontera de la región D.

1. En el eje X : $y = 0$, $0 \le x \le 3$

   La función $f(x , y) = 8x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x - 8y$

   es $\boxed{f(x , 0) = 8x^2 - 4x}$, $0 \le x \le 3$

   a) Hallar los puntos críticos de $f(x,0)$:

   $f'(x , 0) = 16x - 4$

   b) De $f'(x , 0) = 0$, se obtiene $16x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$ que es punto interior del intervalo $0 < x < 3$

   c) También son puntos críticos los extremos del intervalo cerrado $0 \le x \le 3$, esto es, $x = 0 , x = 3$.

   Los puntos críticos de $f(x , 0)$, son $\left\{\frac{1}{4}, 0, 3\right\}$.

   Por lo tanto, los puntos críticos de $f(x,y)$ en la frontera $y = 0, 0 \le x \le 3$ son :

   $\boxed{\left\{(\frac{1}{4}, 0), (0,0), (3,0)\right\}}$

2. En el eje y : $x = 0$, $0 \le y \le 3$

   La función $f(x,y) = 8x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x - 8y$

   es $\boxed{f(0,y) = 5y^2 - 8y}$, $0 \le y \le 3$

   a) Hallar los puntos críticos de $f(0,y)$:

   $f'(0,y) = 10y - 8$

   b) De $f'(0,y) = 0$, se obtiene : $10y - 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

   c) Los puntos críticos de $f(0,y)$, son $\left\{\frac{4}{5}, 0, 3\right\}$.

   Por lo tanto, los puntos críticos de $f(x , y)$ en la frontera $x = 0 , 0 \le y \le 3$

   son : $\boxed{\left\{(0, \frac{4}{5}), (0,0), (0,3)\right\}}$

3. En la recta $x+y=3 \Rightarrow y=3-x$, la función $f(x,y)$ es :

$$f(x,3-x)=8x^2-4x(3-x)+5(3-x)^2-4x-8(3-x)$$

$$=8x^2-12x+4x^2+45-30x+5x^2-4x-24+8x$$

$$=17x^2-38x+21 \quad , \quad 0\le x\le 3$$

a) Derivar : $f'(x,3-x)=34x-38$

De $f'(3,3-x)=0$, se obtiene : $x=\frac{38}{34}=\frac{19}{17}$

Al reemplazar en $y=3-x$, se obtiene : $y=\frac{32}{17}$

b) Los puntos críticos en la recta $x+y=3$, son $\left\{\frac{19}{17},0,3\right\}$

c) Los puntos críticos de $f(x,y)$ en la recta $x+y=3$, $0\le x\le 3$; son :

$$\boxed{\left\{\left(\tfrac{19}{17},\tfrac{32}{17}\right),(0,3),(3,0)\right\}}$$

4. En total, los puntos críticos en la frontera de la región D, son :

$$PC=\left\{\left(\tfrac{1}{4},0\right),(0,0),(3,0),\left(0,\tfrac{4}{5}\right),(0,3),\left(\tfrac{19}{17},\tfrac{32}{17}\right)\right\}$$

Evaluando la función $f(x,y)=8x^2-4xy+5y^2-4x-8y$ en cada uno de los puntos del conjunto PC obtenemos los siguientes extremos de la función $f(x,y)$:

$f\left(\frac{1}{4},0\right)=-\frac{1}{2}$

$f(0,0)=0$

$f(3,0)=60$ ⟵ *máximo global.*

$f\left(0,\frac{4}{5}\right)=-3.2$

$f(0,3)=21$

$f\left(\frac{19}{17},\frac{32}{17}\right)=-\frac{4}{17}$

6.1.7 Criterio para Hallar Máximos y Mínimos para Funciones Escalares de dos Variables.

Sea la función $z = f(x,y)$ de dos variables con dominio la región D, $D \subseteq IR^2$ (la región D puede ser abierta o cerrada) que tiene segundas derivadas parciales continuas en una bola abierta contenido en D.

Para hallar los máximos y mínimos de la función $z = f(x,y)$, se procede del siguiente modo :

PASO 1 *(condición necesaria de orden 1)*

Se hallan las derivadas parciales : f'_x y f'_y

y se resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad .....(\alpha)$

Las parejas ordenadas que se obtienen de resolver el sistema (α), se llaman ***puntos estacionarios*** o ***puntos críticos*** de $f(x,y)$.

PASO 2 *(condición suficiente)*

Se hallan las segundas derivadas parciales : f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yy} y se forma

$$\boxed{k(x,y) = f''_{xx}(x,y)\, f''_{yy}(x,y) - \left[f''_{xy}\right]^2}$$, que procede de la determinante

de $Hf = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$.

Sea (a,b) un punto crítico de $f(x,y)$ y pertenece al interior de la región D.

Entonces:

a) Si $\left[k(a,b) > 0 \ \wedge \ f''_{xx}(a,b) < 0\right] \Rightarrow f(a,b)$ es un máximo local .

b) Si $\left[k(a,b) > 0 \ \wedge \ f''_{xx}(a,b) > 0\right] \Rightarrow f(a,b)$ es un mínimo local .

c) Si $k(a,b) < 0$, $f(x,y)$ no tiene extremo local

d) Si $k(a,b) = 0$, no se puede afirmar nada acerca de la naturaleza del punto crítico. El criterio falla y se debe recurrir en analizar en una bola $B_r(a,b) \subset D$, con radio r muy pequeño.

OBSERVACIONES

1. El criterio dado en 1.7 sólo se aplican para puntos críticos (a,b) que pertenecen al interior de la región D; esto es, cuando D es un conjunto abierto.

2. Si el dominio de la función $f(x,y)$ es un conjunto cerrado D, $D \subset IR^2$; entonces se analiza dos casos :

   CASO 1 : Con puntos críticos de $f(x,y)$ que están en el interior del conjunto D

   CASO 2 : Con los puntos de la frontera de la región D .

Problemas Propuestos.

GRUPO 1. Encuentre el máximo y el mínimo absolutos de $f(x,y)$ sobre cada región que está definida :

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $D = \{ (x,y) : -2 \le x \le 4 \ , \ -1 \le y \le 3 \}$

   R: Max : $f(4,3) = 67$; Min : $f(0,0) = 0$

2. $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$; $D = \{ (x,y) \mid |x| \le 3 \ , \ |y| \le 2 \}$

3. $f(x,y) = \text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}(x+y)$; $D = \{ (x,y) : 0 \le x \le 2\pi \ , \ 0 \le y \le 2\pi \}$

   R.: Max : $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, Min : $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4. $f(x,y) = 4x^3 - 2x^2 y + y^2$; La región D está acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 9$

5. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$; La región D está acotada por la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$

R.: Máx : $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=1+\sqrt{2}$, Mín : $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

6. $f(x,y)=x^2+y^2-xy-x-y+1$, $D=\left\{(x,y):0\le x\le 2,|y|\le\left|1-\frac{x}{2}\right|\right\}$

R : $(1,1)\notin Fr(D)$. Los puntos críticos de la $f(x,y)$ en la frontera de la región D son $\left\{(0,-1),\left(0,\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(\frac{5}{7},\frac{9}{14}\right),(2,0),\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$, Máx absoluto: 3, Mínimo absoluto : $\frac{3}{28}$

GRUPO 2.

7. Investigar si tiene extremos la función $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

R : a) El dominio es $D=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$

b) Los puntos críticos pertenecientes al interior de la región D, son :
$\left\{\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),(0,0)\right\}$

c) Puntos críticos de la frontera : $\{(0,b),(0,-b),(a,0),(-a,0)\}$

d) Max $f=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$, Min $f=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$

8. Determine los puntos en los cuales las siguientes funciones tienen extremos locales:

a) $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$

b) $f(x,y)=x^3-y^3-3xy$

c) $f(x,y)=x^2y^2-y^3-x^3+xy$

Respuestas:

a) *i*) existen máximos en los puntos $(2,3)$ y $(0,y)$ con $y<0 \vee y>6$.

ii) existen mínimos en los puntos $(0,y)$, con $0<y<6$

iii) Los puntos: $(x,0)$, $(0,0)$, $(0,6)$ son puntos de silla .

b) En $(-1,1)$ existe máximo, $(0,0)$ es punto silla.

c) Existe máximo en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Son puntos de silla: $(0,0)$, $(1,1)$

9. Determine los extremos relativos y absolutos de la función definida por $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$

R: $(2,2)$ hay máximo. Son puntos silla: $(3,3)$, $(-6,3)$, $(9,-12)$.

10. Investigar si tiene extremos la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

R: puntos críticos $\left\{(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}$.

11. Investigar si tiene extremos la siguiente función. $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-x^2-y^2}$

R: *i*) puntos críticos $\{(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0) (-1,0)\}$

ii) Línea frontera : $x^2 + y^2 = 1$

iii) $f(0,0) = 0$ es mínimo, $f\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{e}$ es máximo.

iv) En los otros puntos analice

12. Investigar si tiene extremos la función $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$

R: *i*) Puntos críticos $\{(0,0), (-4,-2)\}$

ii) $f(-4,-2) = 8e^{-2}$ es máximo local

iii) En $(0,0)$ analizar

13. Aplicando la matriz hessiana, hallar los extremos de las siguientes funciones :

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7$

b) $f(x,y,z) = 5x^2 + 10y^2 + z^2 - 4xy - 2xz - 36y$

c) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x>0 \quad , \quad y>0 \quad , \quad z>0)$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

R.: En $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ existe mínimo

14. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$

i) Mostrar que $(0,0)$ es el único punto crítico de f y que es un mínimo local

ii) Mostrar de manera informal que f no tiene mínimo absoluto.

15. En las siguientes funciones determine si existen extremos locales y/o puntos de ensilladura:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy$

b) $f(x,y) = x^3 y^3 + 3x + 3y + 1$

c) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y - 1$

d) $f(x,y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$

e) $f(x,y) = x \operatorname{Ln} y + x$

f) $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2 - y^2 + 2y - z^2 + 2z$

g) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z + 2$

h) $f(x,y,z) = 2x^3 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz + yz + z - 1$

i) $f(x,y,z) = 2x^3 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 3yz$

j) $f(x,y) = \int_0^{x-1} g(t)\,dt + \int_0^{y-1} g(t)\,dt$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable

a) si $g'(0) > 0$, b) sí $g'(0) < 0$

RESPUESTAS:

a) $f(0,0) = 0$ es punto silla ; b) $f(-1,-1) = -4$ es punto silla ; c) son puntos silla $f(1,1) = f(-1,-1) = -1$, $f(1,-1) = -5$ es mínimo local, $f(-1,1) = 3$ es máximo local.

d) Puntos silla $f(2^{-1/2}, 5/2) = 4$, $f\left(-2^{-1/2}, \frac{5}{2}\right) = 4$, $f\left(0, \frac{5}{2}\right) = \frac{17}{4}$ es máximo local.

e) $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = 0$ es punto silla ;

f) $f(1,1,1) = \frac{10}{3}$ es punto silla, $f(-1,1,1) = \frac{14}{3}$ es máximo local.

g) $f(0,1,3/2)=\frac{17}{2}$ es punto silla, $f\left(-2,1,\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{2}$ es máximo local ;

h) $f\left(-\frac{1}{7},\frac{10}{49},\frac{-26}{49}\right)=\frac{-433}{343}$ es punto silla, $f\left(\frac{1}{3},0,-\frac{2}{3}\right)=-\frac{37}{27}$ es mínimo local

i) $f(0,0,0)=0$, $f\left(-\frac{4}{3},\frac{-16}{3},8\right)=\frac{64}{27}$ son puntos silla ;

j) a) $f(1,1)=1$ es mínimo local, b) $f(1,1)$ es máximo local.

16. Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(1)=g(2)$. Sea la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\int_{xy}^{x+y} g(t)\,dt$

Demostrar que f tiene un punto crítico en $(1,1)$. Analizar la naturaleza de este punto crítico en los siguientes casos :

a. $g(1)=0$, $g'(1)=1$, $g'(2)=2$

b. $g(1)=3$, $g'(1)=3$, $g'(2)=4$

17. Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable . Supongamos que la gráfica de g pasa por el origen. Demostrar que la función $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=z^2+\int_{-x}^{y} g(t)\,dt$ tiene un punto crítico en $(0,0)$. Analice la naturaleza de este punto crítico si $g'(0)\neq 0$.

RESPUESTAS:

16. a) No se puede concluir nada,

b) Existe punto silla en $(1,1)$ donde $f(1,1)=\int_{1}^{2} g(t)\,dt$

17. $f(0,0,0)=0$ es punto silla

6.2 APLICACIONES A LA ECONOMÍA

6.2.1 La Función Beneficio

(El caso Monopolista que produce dos Mercancías)

La función beneficio, es igual al ingreso total menos el costo total :

$$\boxed{B = R - C}$$

- C : *Costo Total*
- R : *Ingreso Total (Renta)*
- B : *Beneficio (Ganancia o Utilidad)*

Si las funciones de demanda son $\begin{cases} x = f(p,q) \\ y = g(p,q) \end{cases}$

y si la función de costo del monopolista es $C = h(x,y)$, entonces el **BENEFICIO** (o Ingreso Neto) será:

$$\boxed{B = px + qy - c}$$

p : Precio por unidad de la mercancía X

q : Precio por unidad de la mercancía Y

x : Cantidad de la mercancía X o nivel de producción.

y : Cantidad de la mercancía Y

PROBLEMA 1 Las curvas de la demanda de las mercancías X_1 y X_2 a que se enfrenta el monopolista son $\begin{cases} x_1 = 8 - 2p_1 + p_1 \\ x_2 = 10 + p_1 - 3p_2 \end{cases}$ y la función costo es $CT = x_1^2 + x_2^2$. Encuentre los niveles aproximados de producción y precios que maximicen la utilidad

Solución :

1) La función **UTILIDAD** es : $B = R - CT$

Donde R es ingreso total y CT es el costo total.

Pero $R = x_1\, p_1 + x_2\, p_2$, entonces :

$$B = x_1 p_1 + x_2 p_2 - (x_1^2 + x_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1*)$$

2) Sustituir $\begin{cases} x_1 = 8 - 2p_1 + p_2 \\ x_2 = 10 + p_1 - 3p_2 \end{cases}$ en $(1*)$

$$B = (8 - 2p_1 + p_2)\, p_1 + (10 + p_1 - 3p_2)\, p_2 - (8 - 2p_1 + p_2)^2 - (10 + p_1 - 3p_2)^2$$

3) Hallemos las derivadas parciales de B con respecto a p_1 y p_2 respectivamente :

i) $\frac{\partial B}{\partial P_1} = (8 - 2p_1 + p_2)(1) + (-2)p_1 + p_2(1) - 2(8 - 2p_1 + p_2)(-2) - 2(10 + p_1 - 3p_2)(1)$

$= 8 - 2p_1 + p_2 - 2p_1 + p_2 + 32 - 8p_1 + 4p_2 - 20 - 2p_1 + 6p_2$

$= -14p_1 + 12p_2 + 20$

ii) $\frac{\partial B}{\partial p_2} = p_1(1) + (10 + p_1 - 3p_2)(1) + (-3)p_2 - 2(8 - 2p_1 + p_2)(1) - 2(10 + p_1 - 3p_2)(-3)$

$= p_1 + 10 + p_1 - 3p_2 - 3p_2 - 16 + 4P_1 - 2p_2 + 60 + 6p_1 - 18p_2$

$= 12p_1 - 26P_2 + 54$

Resumiendo : $\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial P_1} = -14p_1 + 12p_2 + 20 \\ \frac{\partial B}{\partial P_2} = 12p_1 - 26p_2 + 54 \end{cases}$

4) Resolver el sistema : $\begin{cases} -14p_1 + 12p_2 + 20 = 0 \\ 12p_1 - 26p_2 + 54 = 0 \end{cases}$

Dividir por 2 : $\begin{cases} (6) \quad -7p_1 + 6p_2 + 10 = 0 \quad (I) \\ (7) \quad 6p_1 - 13p_2 + 27 = 0 \quad (II) \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} -42p_1 + 36p_2 + 60 = 0 \\ 42p_1 - 91p_2 + 189 = 0 \end{cases}$

$$-55p_2 + 249 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad p_2 = \frac{249}{55} \approx 4.5$$

Sustituir en (I) : $\quad -7P_1 + 6\left(\frac{249}{55}\right) + 10 = 0$

$$\Rightarrow \qquad -385\,p_1 + 1494 + 550 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad p_1 = \frac{2044}{385} = \frac{292}{55} \approx 5.3$$

Respuestas:

i) Los precios son $p_1 = 5.3$, $p_2 = 4.5$

ii) Los niveles de producción serán : $\quad x_1 = 8 - 2\,(5.3) + 4.5 \approx 1.9 \approx 2$

$$x_2 = 10 + 5.3 - 3\,(4.5) \approx 4.8 \approx 5$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Grupo 1

Hallar las cantidades y precios que maximicen la ganancia y hallar la máxima ganancia para c/u de los siguientes conjuntos de funciones de demanda y funciones de costo conjunto para dos mercancías :

② $\begin{cases} x = 1 - p + 2q \\ y = 11 + p - 3q \\ C = 4x + y \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x_1 = 5 - p_1 + 2P_2 \\ x_2 = 4 + p_1 - 3p_2 \\ C = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} p = 40 - 2x^2 \\ q = 12 - 3y \\ C = 8 + 4x - 3y \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} p = 26 - x \\ q = 40 - 4y \\ C = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$

Respuestas grupo 1

1. $p = 12$, $q = 8$, $B = 38$
2. $p_1 = 18$, $p_2 = 8.33$, $x_1 = 5.66$, $x_2 = -5$ (absurdo)
3. $x = \sqrt{6}$, $y = 1.5$, $B = 24\sqrt{6} - \frac{5}{4}$
4. $x = 5$, $y = 3$, $B = 125$

Grupo 2

1. Encuéntrese la distancia más corta entre las rectas definidas por $P = (1, 3, 5) + s(2, 0, -1)$ y $P = (2, 8, 11) + t(-4, 3, 1)$.

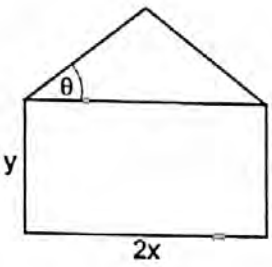
   Encuéntrense los puntos sobre las rectas que están entre sí a tal distancia y demuéstrese que la recta que pasa estos puntos es ortogonal a las dos rectas dadas.

2. Determínese el paralelepípedo rectangular de máximo volumen y área total igual a 48.

3. Determínese el paralelepípedo rectangular de máximo volumen y lados paralelos a los planos coordenados que pueden inscribirse en el elipsoide $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1$

4. Escribir el número 120 como suma de tres números, de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos, sea máximo.

5. Un pentágono está formado por un rectángulo coronado de un triángulo isósceles (ver fig.). Si la longitud del perímetro es fija, hallar el área máxima posible.



6. Halle los extremos de la función $f(x,y,z) = 2x - 3y + z$, si (x,y,z) está en el elipsoide de $4x^2 + y^2 + z^2 = 704$

7. Determine los puntos más cercano y más alejados del origen de la curva cerrada $x^2 + y^2 + xy = 4$.

8. En la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, hallar el punto más cercano y el punto más alejado a la recta $x + y = 6$ (la distancia entre un punto (x,y) y la recta es la perpendicular del punto a la recta).

9. Demostrar que el paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera es un cubo.

10. Hallar el paralelepípedo de volumen v que tenga la menor superficie lateral posible.

11. Hallar el paralelepípedo, cuya longitud de su diagonal **d** es dada, que tenga el mayor volumen posible.

12. Hallar el paralelepípedo cuya suma de longitudes de sus aristas sea L, que tenga el mayor volumen posible.

13. Considere la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Determínese el triángulo de menor área que se puede formar (en el primer cuadrante) con la parte positiva de los ejes coordenados y una recta tangente a la elipse.

14. Considere el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Demuestre que el volumen del tetraedro formado por el plano tangente a este elipsoide en un punto de él (x,y,z) del primer octante y los planos coordenados está dado por $V(x,y,z)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$. Minimice la función $v(x,y,z)$ sujeta a la restricción de que el punto (x,y,z) esté sobre el elipsoide, para concluir que el mínimo volumen que el tetraedro mencionado puede tener es $V_{min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$. ¿En qué punto del elipsoide se debe trazar este plano tangente?

15. Dado la curva cerrada $g(x,y)=\text{Ln}(x^2+2x+2)+\text{Ln}(y^2+2y+2)-1=0$. Determinar los puntos más cercanos y más alejados del origen.

16. Sea la función $u:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $u=a^x b^x c^x$ donde $a>1$, $b>1$, $c>1$. Hallar los valores máximos y mínimos de u cuando (x,y,z) recorre la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=r^2$

17. Supongamos que en la elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ se inscribe una pirámide de base rectangular perpendicular al eje Z. Hallar el volumen máximo de la pirámide.

18. Supongamos que se tiene una pirámide base cuadrada cuyas aristas tienen, entre las ocho, una longitud constante e igual a K. Hallar las medidas de la pirámide para tener volumen máximo.

19. Una caja abierta con forma de paralelepípedo rectangular debe tener volumen V, ¿con qué dimensiones es mínima el área de su superficie?

20. Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los lados que puede inscribirse en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$

21. Calcule las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los planos coordenados, un vértice en el origen y otro vértice en el primer octante sobre el plano $4x + 3y + z = 12$.

22. Una compañía planea fabricar cajas cerradas con la forma de un paralelepípedo rectangular con un volumen de 8 m^3. El material de la tapa y del fondo cuesta el doble que el de los lados. calcule las dimensiones para las que el costo es mínimo.

23. El servicio Postal de Bolivia no acepta cajas rectangulares tales que la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal perpendicular a dicha longitud, sea mayor que 108 pulgadas. Calcule las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede enviarse por correo.

24. Una tienda de ropa vende dos clases de abrigos que son parecidos pero están hechos por diferentes fabricantes. El costo para la tienda del abrigo de la primera clase es S/. 40 y el costo de la segunda es S/. 50. Se ha determinado por experiencia que si el precio de venta del de la primera clase es "x" soles y el precio de venta del de la segunda es "y" soles, entonces la venta mensual total del de la primera clase es $(3200 - 50x + 25y)$ abrigos y la venta mensual total del de la segunda clase es $(25x - 25y)$ abrigos. ¿Cuál deberá ser el precio de venta de cada clase de abrigo para obtener la máxima utilidad?

25. Se va a hacer una caja rectangular con una capacidad de 16 m^3 de tres clases de material. El costo del material para las partes superior e inferior es 9 soles por m^2, el costo del material para las partes de enfrente y de atrás es 8 soles por m^2 y el costo del material para los otros dos lados es 6 soles por m^2. Encontrar las dimensiones de la caja de tal forma que el costo de los materiales sea un mínimo.

26. Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Hallar el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$

27. El beneficio que se obtiene produciendo "x" unidades del producto A e "y" unidades del producto B se aproxima mediante el modelo.
$P(x, y) = 8x + 10y - (0.001)(x^2 + xy + y^2) - 10000$.
Hallar el nivel de producción que reporta un beneficio máximo.

28. Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los plano coordenados y un vértice en el plano con ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, donde $a>0$, $b>0$, $c>0$. Encuentre también dicho volúmen máximo.

29. Trazar un plano de modo que pase por el punto (a,b,c) y que el volumen del tetraedro recortado por dicho plano del triedro coordenado sea el menor posible.

30. Inscribir en la esfera dada de diámetro 2 R un paralelepípedo rectangular, que tenga el mayor volumen posible.

31. Hallar los extremos relativos de $f(x,y)$ para $\varepsilon=1$, $\varepsilon=-1$ y para $\varepsilon=0$:

$$f(x,y)=e^{-x^2+\varepsilon y^2}$$

32. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ siguiente:

$$f(x,y)=12x^2+12y^2-x^3y^3+5$$

33. Hallar los puntos críticos de

$f(x,y)=(x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}$ y obtener sus extremos relativos

34. Hallar los puntos críticos y estudiar si en cada uno de ellos hay o no extremo relativo de la función $(x,y)\longrightarrow z$ siguiente :

$$z=x^8+y^6-2x^4-3y^2$$

35. Hallar los valores máximos y mínimos relativos que alcanza $f(x,y)$ cuando (x,y) recorre la curva $\varphi(x,y)=0$ siendo:

$$f(x,y)=x^2-4xy+y^2+20x+20y+10$$

$$\varphi(x,y)=x^2+y^2+xy-12$$

36. Hallar los valores máximo y mínimo de

$$f(x,y)=xy+yz+zx+x+y+z$$

cuando (x,y,z) recorre la esfera $x^2+y^2+z^2=1$

Respuestas Grupo 2

1. 7, (3,3,4) , (6,5,10) ; **2.** cubo de lado $2\sqrt{2}$; **3.** El volumen en V = 8xyz, de la elipsoide despejar $z = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}}$ y remplazar en V para luego derivar.

4. 40 , 40 , 40 ; **5.** sean "a" longitud de los lados iguales del triángulo isósceles, h su altura. Dado θ, entonces $a = x \sec\theta$, $h = x \operatorname{tg}\theta$, el perímetro es $L = 2x \sec\theta + 2x + 2y$, el área es : $A = 2xy + x^2 \operatorname{tg}\theta$ con estos datos puede Ud. hallar el máximo de la función A.

6. Máx. en $P = (4 , -24, 8)$, $f(p) = 88$, Mín en $q = (-4 , 24 , -8)$, $f(q) = -88$

7. Los puntos más cercanos son $P_{1,2} = \left(\pm 2 / \sqrt{3} \; ; \; \pm 2\sqrt{3}\right)$, a una distancia $d = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Los más alejados son $P_{3,4} = (\pm 2 \; , \; \mp 2)$ a una distancia $d = \sqrt{8}$

8. Distancia mínima = 1.693 en el punto $\left(\frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}\right)$; distancia máxima = 6.7921 en el punto $\left(-\frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{-4}{\sqrt{13}}\right)$; **10.** El cubo ; **11.** El cubo ; **12.** El cubo ;

13. El punto de tangencia es $\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \; , \; \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. El área mínima del triángulo es ab.

15. En lugar de aplicar la función distancia $\sqrt{x^2+y^2}$, aplique el cuadrado de ésta distancia, esto es, use la función $f(x , y) = x^2 + y^2$.
La solución es : los puntos más cercanos al origen son $P_{1,2} = \left(\sqrt{\sqrt{e-1}} \; , \; \sqrt{\sqrt{e-1}-1}\right)$ a una distancia $d_{min} = 0.2751$. Los puntos más alejados del origen son $P_3 = (-1.32716 , -2.2064)$, $P_4 = (-2.2064 , -1.3871)$ a una distancia $d_{máx} = 2.5748$

16. Debe tomar logaritmos.
Se obtiene máximo en (h Ln a , h Ln b , h Lnc) y mínimo en (-h Ln a , -h Ln b , -h Ln c), donde $h = r\left[(\text{Ln}a)^2 + (\text{Ln}b)^2 + (\text{Ln}c)^2\right]^{-1/2}$.
Máximo $e^{r^2 h}$; mínimo $e^{-r^2 h}$.

17. Vértice en $V(0,0,c)$, base en z = constante , $vol = \frac{4}{3}xy(c-z)$ sujeta a la elipsoide. Tomar logaritmos. Los resultados son $x = \frac{\sqrt{3a}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3b}}{2}$, $z = -\frac{c}{2}$; volumen máximo $= \frac{3}{2}abc$.

18. Las aristas de la base : $\frac{(5-\sqrt{13})K}{12}$; las aristas laterales : $\frac{(\sqrt{13}-2)K}{12}$

19. La base es cuadrada ; altura $\frac{1}{2}$ de la longitud de la base.

20. $\frac{6}{\sqrt{3}}$, $\frac{12}{\sqrt{3}}$, $\frac{8}{\sqrt{3}}$; **21.** 1 , $\frac{4}{3}$, 4 ; **22.** La base es un cuadrado de lado $\sqrt[3]{4}$ m, altura $2\sqrt[3]{4}$ m. ; **23.** 18 pulg × 18 pulg × 36 pulg ;

25. 2 m por 3 m por $2\frac{2}{3}$ m. ; **26.** $V\left(\frac{4}{3},2\right) = \frac{64}{9}\ u^3$

27. $x = 2000$ unidades , $y = 4000$ unidades conduce a un beneficio máximo.

28. $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}b$, $z = \frac{1}{3}c$; **29.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 3$

30. El cubo ; **31.** Punto crítico (0,0) : si $\varepsilon < 1$, máximo ; si $\varepsilon > 1$; si $\varepsilon = 0$ máximo amplio a lo largo de $x = 0$.

32. En $(0,0)$ mínimo, $f(0,0) = 5$.

33. $(0,0)$, mínimo; (0,1) y (0, −1) , puertos.

34. En (1,1) mínimo; en (1,0) máximo; en (0,1) no extremo; en (0,0) máximo.

35. Máximos $f(4,-2) = 102$ y $f(-2,4) = 102$; mínimos $f(2,2) = 82$ y $f(-2,-2) = -78$

36. Puntos críticos $P\left(1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\right)$, $Q\left(-1/\sqrt{3}\ ,\ -1/\sqrt{3}\ ,\ -1/\sqrt{3}\right)$ y circunferencia $C: x+y+z+1=0$, $x^2+y^2+z^2 = 1$
Máximo $f(Q) = 7+\sqrt{3}$; mínimo $f(c) = 5$.

CAPÍTULO 7

FUNCIONES VECTORIALES DE UN VECTOR

7.0 INTRODUCCIÓN.

Las funciones vectoriales de un vector dan origen a los llamados *campos vectoriales* de aplicación común en física, pero también dan lugar a algunas transformaciones lineales muy importantes.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 ***(Vamos a definir un campo tangencial)***

De la circunferencia $r^2 = x^2 + y^2$ definimos la función escalar $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

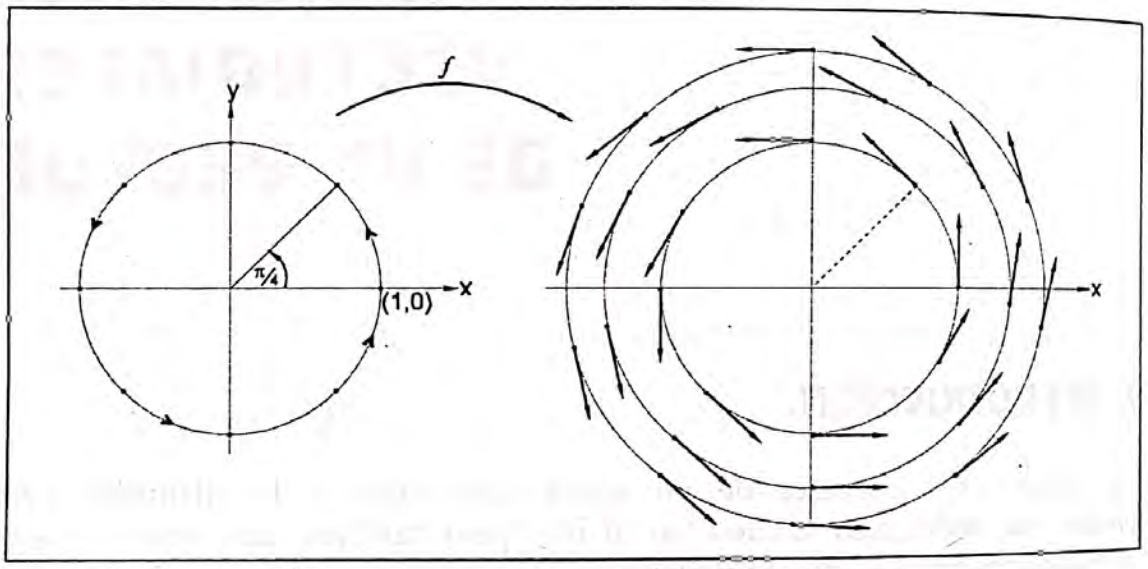
El gradiente de f es $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$. Ahora, eligiendo el radio $r = 4$ definimos el conjunto $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2\cos\theta , y = 2\operatorname{sen}\theta , 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$

A continuación definimos la siguiente función :

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = (\nabla f(x,y))^{\perp}$, esto es

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

"a cada vector $(x,y) \in D$ corresponde el único vector $f(x,y)$". cada vector unitario $\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2=4$ en el punto $(x,y\rangle$.



$D \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(1,0) \longrightarrow (0,1)$ ... "El vector $(0,1)$ es tangente a $x^2+y^2=4$ en el punto $(1,0)$"

$(\sqrt{2},\sqrt{2}) \longrightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ... "el vector $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es tangente a $x^2+y^2=4$ en el punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$"

Así, sucesivamente, se va generando una nube de vectores unitarios tangentes a la familia de circunferencias $x^2+y^2=r^2$, $r>0$, que en física, representa un campo de velocidades de un movimiento circular (ver el gráfico). Dicho campo vectorial queda definido del siguiente modo :

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

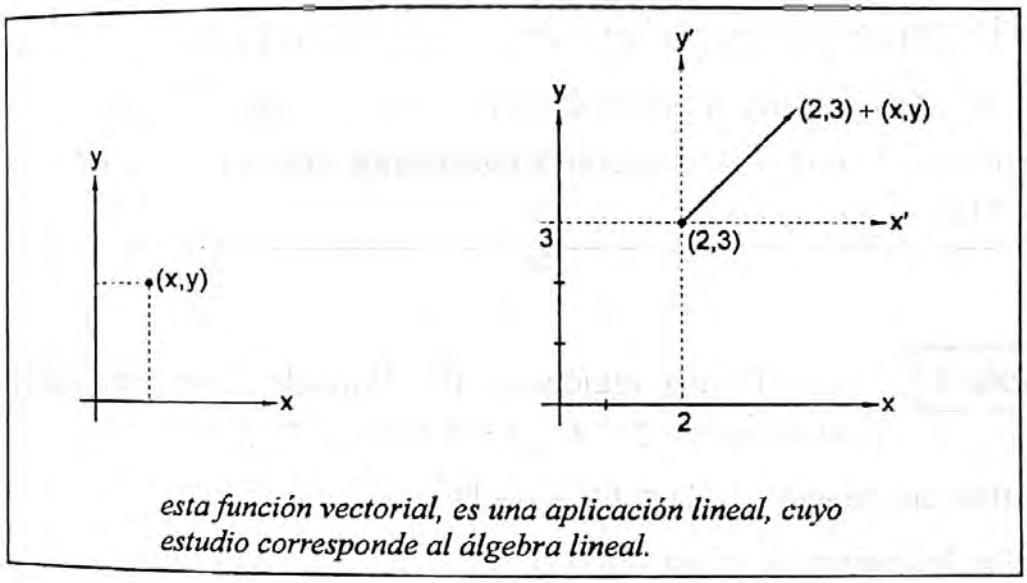
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$$

Ejemplo 2 *(Traslación de ejes coordenadas)*

Elegimos un punto, por ejemplo $(2,3)$; lo fijamos, y sumamos el vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Así queda definido la función :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = (2,3) + (x,y) \\ &\qquad = (2 + x\,,\, 3 + y) \end{aligned}$$

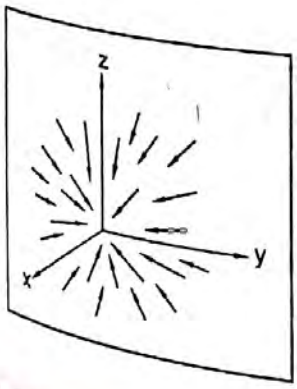
"a cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hacemos corresponder el vector $(2,3) + (x,y)$"



esta función vectorial, es una aplicación lineal, cuyo estudio corresponde al álgebra lineal.

Ejemplo 3 *(Campo radial)*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x\,,y\,,z) &\longrightarrow f(x\,,y\,,z) = -k\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\ ,\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ ,\ k > 0 \end{aligned}$$



En física, este campo vectorial describe la fuerza de atracción gravitacional de una partícula de masa M, situado en el origen, sobre otra partícula de masa m localizado en el punto $P(x,y,z)$.

7.1 FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

Definición

Diremos que f es una función o aplicación del conjunto D en $\mathbb{R}^m$ si para cada vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ corresponde un único vector

$$\vec{y} = \left(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

tal que $\vec{y} = f(\vec{x})$. Cada coordenada $f_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, es una función que se le asigna con el nombre de ***Función Coordenada***, donde $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 1 Sea D una región en $\mathbb{R}^2$ limitado por las gráficas de las ecuaciones: $y = x$, $y = x - 2$, $x = -y$, $x = -y + 3$. Se pide :

a) Definir una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

b) Hallar la imagen de D, esto es $f(D)$.

Solución:

En primer lugar, observemos las cuatro ecuaciones que se dan en el problema. Notamos que hay relaciones algebraicas comunes que podemos sacarle provecho para construir la función f de D en $\mathbb{R}^2$.

De las ecuaciones $\begin{cases} y = x \\ y = x - 2 \end{cases}$ se obtiene : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ ..... (I)

De las ecuaciones $\begin{cases} x = -y \\ x = -y + 3 \end{cases}$ se obtiene : $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ..... (II)

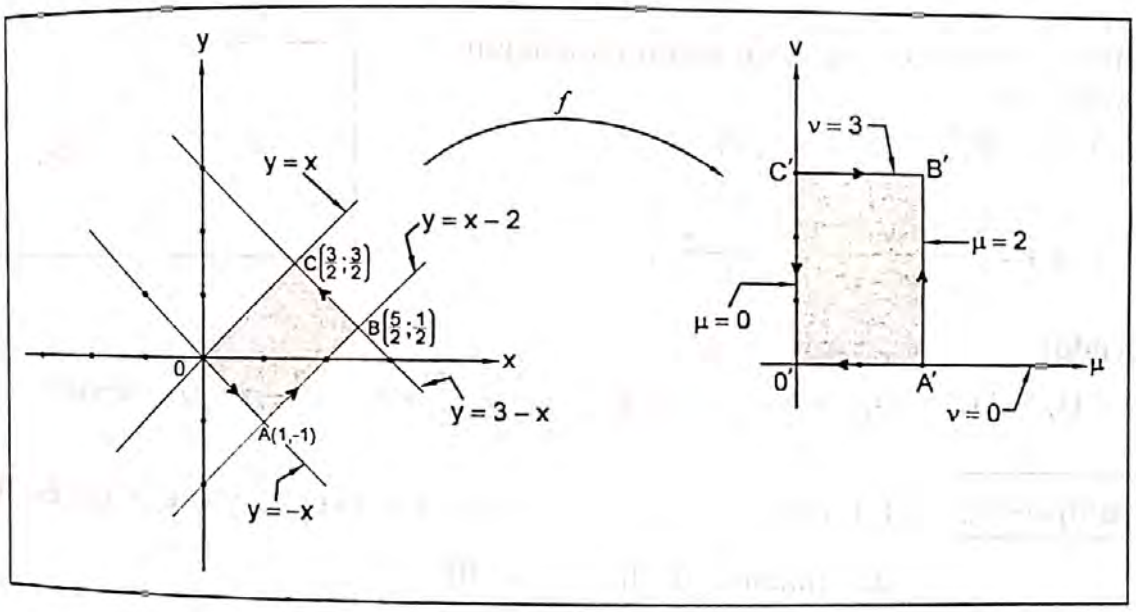
En segundo lugar, en (I) hacer $x - y = \mu$ y en (II) hacer $x + y = \nu$.

Así, obtenemos : DE (I) $\begin{cases} u = 0 \\ u = 2 \end{cases}$, de (II) $\begin{cases} \nu = 0 \\ \nu = 3 \end{cases}$

a) La función f es $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longrightarrow (x-y\,,\,x+y)$

tal que $\begin{cases} x-y=\mu \\ x+y=\nu \end{cases}$

b) La imagen de D por f es $f(D)=\{(\mu\,,\nu)\in \mathbb{R}^2 / 0\le\mu\le 2 \;\;,\;\; 0\le\nu\le 3\}$



Nota. La función f, también se puede expresar del modo siguiente :
$f(x,y)=(x-y\,,\,x+y)\;\;,\;\;(x,y)\in D\;\;,\;\;D\subset \mathbb{R}^2$.
donde las funciones coordenadas son :

a) $f_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f_1(x,y)=x-y$

b) $f_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f_2(x,y)=x+y$.

Ejemplo 2 Sea la función $f(x\,,\,y)=\left(\dfrac{xy}{1-x^2-y^2}\,,\,\dfrac{\sqrt{y^2-x}}{x}\right)$ hallar el dominio de f.

Solución :

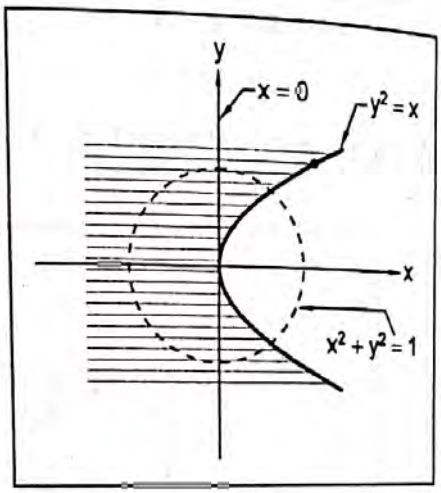
El dominio de la función f es la intersección de los dominios de las funciones coordenadas $f_1(x,y)=\dfrac{xy}{1-x^2-y^2}$ y $f_2(x,y)=\dfrac{\sqrt{y^2-x}}{x}$.

a) El dominio de f_1 es $D_{f_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x^2 - y^2 \neq 0\} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \neq 1\}$

b) El dominio de f_2 es $D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x \geq 0 \ \wedge \ x \neq 0\}$ Luego, el dominio de f es :

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$$

$$= \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1 \ , \ y^2 - x \geq 0 \ , \ x \neq 0\}$$



Ahora, la función f definido como aplicación, se escribe así :

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por

$$f(x, y) = \left(\frac{xy}{1 - x^2 - y^2} \ , \ \frac{\sqrt{y^2 - x}}{x} \right)$$

Siendo:

$$D = D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 1 \ , \ y^2 - x \geq 0 \ , \ x \neq 0\}$$

Ejemplo 3 La relación $f(x,y,z) = (x + y - z)\, e_1 + xy^2 z\, e_2 + xy z\, e_3$, define una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $f(x,y,z) = (x + y - z , x y^2 z , xyz)$.

7.2 LÍMITE Y CONTINUIDAD

Definición 2

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y **a** un punto de acumulación del dominio D. Diremos que $\ell = (\ell_1 , \ell_2 , \ldots , \ell_m)$ es el **límite de f (x)** en el punto **a**, esto es $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ sí, y solo si

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) : x \in D \ \wedge \ 0 < \| x - a \| < \delta \ \Rightarrow \ \| f(x) - \ell \| < \varepsilon$$

Nota : Es claro que $\| x - a \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ y $\| f(x) - \ell \|$ representa una norma en $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 4 Calcular el $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y, 2x+y, 2y)$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y, 2x+y, 2y) = ((1)^2(2), 2(1)+2, 2(2))$$

$$= (2, 4, 4).$$

Definición 3

Dado una función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, decimos que **f** es continua en el punto $a \in D$, sí y sólo si $\lim_{x\to a} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(a)$

TEOREMA 1 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, donde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Si $\mathbf{a} \in D'$ (punto de acumulación de D) y $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in R^m$, diremos que el límite de f en **a** es ℓ sí, y sólo si

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \ell_1 \ , \ \lim_{x\to a} f_2(x) = \ell_2 \ , \ldots , \ \lim_{x\to a} f_m(x) = \ell_m$$

Ejemplos Sea la función $f(x,y) = \left(\frac{x^2}{x+y}, \frac{xy}{|x|+|y|}, xy\,\text{sen}\frac{1}{x} \right)$ ¿existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solución:

El dominio de f es $D_f = ((x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \wedge (x,y) \neq (0,0))$. Según el Teorema, bastará analizar la existencia de los límites de las funciones componentes $f_1(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$; $(x,y) \neq (0,0)$; $f_2(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$; $(x,y) \neq (0,0)$

$f_3(x,y) = xy\,\text{sen}\frac{1}{x}$; $(x,y) \neq (0,0)$.

Veamos:

En primer lugar, calcular el límite de cada función componente en el punto de acumulación $(0,0)$ del dominio de f.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x+y} =$

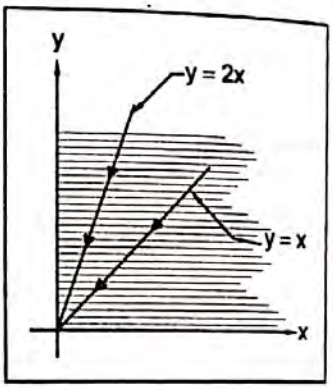
CAMINO $x = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y} = 0$

CAMINO $y = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|} =$

CAMINO $x = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{|y|} = 0$

CAMINO $y = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{|x|} = 0$



c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\text{sen}\dfrac{1}{x} = ?$ como $-1 < \text{sen}\dfrac{1}{x} < 1$

Si $x > 0$, $y > 0$ $\Rightarrow$ $-xy < xy\,\text{sen}\dfrac{1}{x} < xy$

Aplicando el teorema del Sándwich:

i) Haciendo pasar el camino y = x, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}(-x)(x) < \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\text{sen}\frac{1}{x} < \lim_{x\to 0}(x)(x)$$

$$0 < \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\text{sen}\frac{1}{x} < 0$$

lo cual implica : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\,\text{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

ii) De manera similar, por cualquier otro camino obtenemos el mismo resultado. Faltaría probar que :

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x+y} = 0$ s.s.s. (Dado $\varepsilon > 0$) ($\exists\ \delta > 0$) tal que:

$0 < \|(x,y) - (0\ ,\ 0)\| < \delta \wedge < (x\ ,\ y) \in Df$ implica $\left|\dfrac{x^2}{x+y} - 0\right| < \varepsilon$

Veamos :

$0 < \|(x,y)\| < \delta$ implica $0 < |x| < \delta$, $0 < |y| < \delta$.

De $\left|\dfrac{x^2}{x+y}\right| = \dfrac{|x|^2}{|x+y|} < \dfrac{|x|^2}{|x|} = |x| < \delta$. Hacer $\delta = \varepsilon$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$ s.s.s (Dado $\varepsilon > 0$) ($\exists\ \delta > 0$) tal que :

$$|x| < \delta \ , \ |y| < \delta \ , \ (x,y) \in Df \text{ implica } \left|\frac{xy}{|x|+|y|} - 0\right| < \varepsilon$$

Veamos :

$$\left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| = \frac{|x||y|}{|x|+|y|} < \frac{|x||y|}{|y|} = |x| < \delta = \varepsilon$$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ \operatorname{sen}\frac{1}{y} = 0$ s.s.s (Dado $\varepsilon > 0$) ($\exists\ \delta > 0$) tal que :

$$|x| < \delta \ , \ |y| < \delta \ , \ (x,y) \in D_f \text{ implica } \left|xy \operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| < \varepsilon$$

Veamos :

$$\left|xy \operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \le |x|\,|y| \ , \text{ pues } \left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \le 1$$

$< \delta\ \delta = \delta^2$. Hacer $\delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$

TEOREMA 2 Dado una función $f : D \subset IR^n \longrightarrow IR^m$, donde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ y **a** un punto de acumulación perteneciente al dominio D, se dice que $f(x)$ es continua en el punto **a** sí, y sólo si las funciones coordenadas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son continuas en **a**.

Ejemplo 6 Supongamos que :

$D = \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 < 1\} = B_1(0) \subset IR^2$ es un disco abierto de centro en el origen y radio 1.

Si la función $f : D \longrightarrow IR^2$ está definido por $f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2-1}\ ,\ xy\right)$. En este caso, la función f no es continua en los puntos (x,y) que pertenecen a la frontera del dominio D, porque en ella no está definida la función coordenada $f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-1}$

En cambio $f_2(x,y) = xy$ es continua en todo IR por ser un polinomio, en particular es continua en el disco abierto D.

La demostración no lo haremos por dos razones: primero, porque no es relevante; segundo, porque el objeto del curso es estudiar la diferenciabilidad de la función f.

7.3 MATRIZ JACOBIANA, DIFERENCIABILIDAD, DIFERENCIAL.

Definición 4

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D conjunto abierto, y $\mathbf{a} \in D$. Se llama **MATRIZ JACOBIANA** de f en **a**, (denotado por Jf (a)) a la matriz $m \times n$:

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

es la derivada de f en **a**
o matriz derivada de f en **a**

Definición 5

Si $m = n$ (esto es, si la matriz Jacobiana es cuadrada), a la determinante de esta matriz se le llama **JACOBIANO** de f .

El valor absoluto del Jacobiano de f es de aplicación muy importante en las transformaciones (Cambio de variable) que se hacen en las integrales dobles y triples. Ver los ejemplos 8, 9 y 10.

Ejemplo 7 Determine la matriz Jacobiana de f en el punto $\mathbf{a} = (-3,1,2)$, si $f(x,y,z) = (\text{Ln}\,(x^2 - y^2 - z)\,,\, xyz^2)\,)$

Solución :

1. El dominio de f es $D_f = \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 - y^2 - z > 0\,\}$

2. Las funciones componentes de f son :
   $f_1(x,y,z) = \text{Ln}\,(x^2 - y^2 - z)$, $f_2(x,y,z) = x\,y\,z^2$

3. Como la función es $f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, entonces la matriz Jacobiana de f en (x,y,z) es la matriz 2×3 definido por :

$$Jf(x\,,y\,,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2 - y^2 - z} & \frac{-2y}{x^2 - y^2 - z} & \frac{-1}{x^2 - y^2 - z} \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{bmatrix}$$

4. La matriz Jacobiana de f en (−3 , 1 , 2), es :

$$Jf(-3,1,2)=\begin{bmatrix} \frac{2(-3)}{9-1-2} & \frac{-2(1)}{9-1-2} & \frac{-1}{9-1-2} \\ (1)(2)^2 & (-3)(2)^2 & 2(-3)(1)(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 4 & -12 & -12 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8 dado la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(r,\theta) = (r\cos\theta , r\,\text{sen}\,\theta)$ donde $D = \{(r,\theta)/0 < r < +\infty \ , \ \alpha \le \theta \le 2\pi + \alpha\}$. Hallar el Jacobiano de f.

Solución :

El Jacobiano de f es la determinante de la matriz Jacobiana de f en (r,θ) :

$$Jf = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta = r$$

Ejemplo 9 Dado el conjunto

$D = \{(\rho , \theta , \phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho \ge 0 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \phi \le \pi\}$

definimos la función $f: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por

$f(\rho,\theta,\phi) = (\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta , \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta , \rho\cos\phi)$

Hallar el Jacobiano de f.

Solución :

1. Las funciones componentes de f son : $x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$
$y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\theta$
$z = \rho\cos\phi$

2. El Jacobiano de f es la determinante ;

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\phi\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\,\text{sen}\,\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\,\text{sen}\,\phi \end{vmatrix}$$

Desarrollar por la 3ª **FILA** :

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \end{vmatrix} - \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi\,(-\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\,\mathrm{sen}^2\theta - \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\cos^2\theta) - \rho\,\mathrm{sen}\,\phi(\rho\,\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho\,\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$= -\rho^2\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - \rho^2\,\mathrm{sen}^3\phi\,(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)$$

$$= -\rho^2\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi - \rho^2\,\mathrm{sen}^3\phi = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,(\cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi) = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Ejemplo 10 Sea D una región en $\mathbb{R}^2$, limitada por las gráficas de las ecuaciones : $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 15$, $xy^3 = 5$.

a) Hallar una transformación (función) de D en E , $E \subset \mathbb{R}^2$.

b) Hallar el Jacobiano de la función hallado en a).

c) Hallar el Jacobiano de la inversa de la transformación hallado en b).

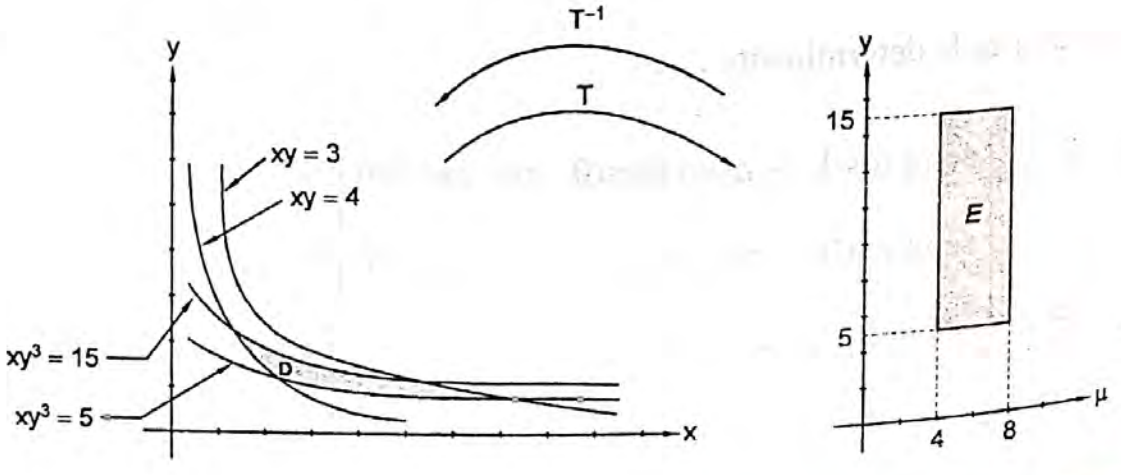
Solución:

a) Basta hacer $\begin{cases} xy = \mu \ldots\ldots (1) \\ xy^3 = v \ldots\ldots (2) \end{cases}$ obteniéndose $\begin{cases} \mu = 4 \ , \ \mu = 8 \\ v = 5 \ , \ v = 15 \end{cases}$

Así obtenemos la región $E = \{ (\mu, v) \in \mathbb{R}^2 / 4 \le \mu \le 8 \ , \ 5 \le v \le 15 \}$.

La transformación es $T : D \longrightarrow E$, definido por $T(x,y) = (\mu, v)$,
$(x,y) \longrightarrow (\mu, v)$

tal que , $\mu(x,y) = xy$, $v(x,y) = xy^3$.



b) El Jacobiano de T es la determinante :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix} = 3xy^3 - xy^3 = 2xy^3$$

La función T, así definida es inyectiva y por lo tanto tiene inversa, la inversa de T, es $T^{-1} : E \longrightarrow D$, definido por $T^{-1}(\mu, \nu) = \left(\sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}}, \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \right)$. Esta función se obtiene fácilmente al dividir (2) entre (1) : $y^2 = \frac{\nu}{\mu}$.

Si en (1) elevamos al cuadrado, obtenemos $x^2 y^2 = \mu^2 \Rightarrow x^2 = \frac{\mu^2}{y^2}$

$$x^2 = \frac{\mu^3}{\nu}.$$

De $x^2 = \frac{\mu^3}{\nu} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}}$, si $x > 0$

De $y^2 = \frac{\nu}{\mu} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$, si $y > 0$

Nota : Topológicamente hablando, la región D se ha deformado en la región E mediante la función T. Al ocurrir la tal "deformación" no se rompe la región D; esto es, la función T es continua. Intuitivamente, lo que se ha hecho, es estirar la región D hasta convertirla en la región E.

---

c) El Jacobiano de $T^{-1} : E \longrightarrow D$ definido por $T^{-1}(\mu, \nu) = \left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\nu}}, \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \right)$ es la siguiente determinante :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3\mu^2}{\nu} & \frac{-\mu^3}{\nu^2} \\ 2\sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}} & 2\sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}} \\ \frac{-\nu}{\mu^2} & \frac{1}{\mu} \\ 2\sqrt{\frac{\nu}{\mu}} & 2\sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \end{vmatrix} = \frac{\frac{3\mu^2}{\nu} \cdot \frac{1}{\mu}}{4\sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}}\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}} - \frac{\frac{\nu}{\mu^2}\frac{\mu^3}{\nu^2}}{4\sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}}\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}} = \frac{1}{2\nu}.$$

PROPIEDAD : Si T^{-1} es la inversa T entonces el Jacobiano de T^{-1} es igual a la inversa del Jacobiano de T. Esto es :

$$J(T^{-1}) = \frac{1}{J(T)} = \frac{1}{2xy^3} = \frac{1}{2\left[\sqrt{\frac{\mu^3}{\nu}}\right]\left[\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right]^3} = \frac{1}{2\nu}$$

Definición 6

Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función dada. Se dice que f es diferenciable en $x_0 \in D$, si existe la matriz Jacobiana $A = Jf(x_0)$ y si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Consecuencias :

1. Si hacemos $x - x_0 = h$, entonces el limite que aparece en la definición se puede expresar como : $x = x_0 + h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

2. El término **Ah** se llama **diferencial de f en x_0 y h**, se denota por :

$$df(x_0;h) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}}_{h}$$

A matriz $m \times n$
h matriz $n \times 1$

La matriz A se llama **derivada de f en x_0** y se denota por $Df(x_0)$ también se llama matriz **Jacobiana de f en x_0** y se denota por $Jf(x_0)$.

Desde el punto de vista del **ALGEBRA LINEAL**, toda matriz está asociada a una aplicación lineal, por lo tanto, la **diferencial de f en x_0 y h**, que está definido por $df(x_0;h) = Ah$, es una aplicación lineal.

Ejemplo 11 Dado la función $f(x,y) = (x^2y\ ,\ 2x^2 + 3y^3)$, determínece $Df(1\ ,-2)$ y $df((1\ ,-2)\ ;(dx\ ,\ dy))$

Solución:

En la función $f(x,y) = (x^2y\ ,\ 2x^2 + 3y^3)$, las funciones componentes son:

$f_1(x,y) = x^2y\ ,\ f_2(x,y) = 2x^2 + 3y^3$.

a) $$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 4x & 9y^2 \end{bmatrix}$$

$$Df(1,-2) = \begin{bmatrix} 2(1)(-2) & (1)^2 \\ 4(1) & 9(-2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 36 \end{bmatrix}$$

b) $$df\big((1,-2);(dx\ ,\ dy)\big) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$ es la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$= \begin{bmatrix} -4dx & + & dy \\ 4dx & + & 36dy \end{bmatrix}_{2x1}$$

En este ejemplo, se tiene $x_0 = (1,-2)$ y $h = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$.

Ejemplo 12 Dado la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $f(x\ ,y\ ,z) = (xyz\ ,\ ze^{xy^2})$.
Hallar $Df(1,0,2)$ y $df((1,0,2)\ ;(dx\ ,\ dy\ ,\ dz))$.

Solución:

Antes de derivar identifiquemos las funciones componentes: $f_1(x,y,z) = xyz$, $f_2(x,y,z) = z\,e^{xy^2}$.

A continuación, hallemos la "derivada de f en (x,y,z)", esto es :

$$Df(x,y) = Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} \quad , \text{ es una matriz } 2 \times 3$$

$$= \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ zy^2e^{xy^2} & 2xyze^{xy^2} & e^{xy^2} \end{bmatrix}$$

a) $$Df(1,0,2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La diferencial de f en x_0 y h, es :

$$df\big((1,0,2);(dx,dy,dz)\big) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}}_{\text{es una aplicación lineal}} = \begin{bmatrix} 0dx + 2dy + 0dz \\ 0dx + 0dy + dz \end{bmatrix}_{2x1}$$

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

donde $T = df(x_0; h)$, $x_0 = (1,0,2)$, $h = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$

NOTA: en estas aplicaciones lineales, son nuevas variables: dx , dy , dz. Haciendo $dx = u$, $dy = v$, $dz = w$; tendremos $T(u,v,v) = (2v, w)$

¿Qué es una aplicación lineal?

Definición 7

Dado dos espacios vectoriales V y W sobre IR, "**Una aplicación lineal de V en W**", que se denota por $T : V \longrightarrow W$, es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un único vector $T(v) \in W$ y que satisface dos condiciones :

a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, $\forall\ v_1$, $v_2 \in V$

b) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ v \in V$.

3. La suma "$f(x_0) + Ah$" es una buena aproximación de la función f en el punto $x_0 + h$, esto es, $\boxed{f(x_0 + h) \approx f(x_0) + Ah}$

Ejemplo 13 Calcular, por aproximación, el valor de $e^{0.2}\ \mathrm{Ln}(1.03)$.

Solución:

En primer lugar, se hace $e^{0.2}\ \mathrm{Ln}\,(1.03) = e^{0+0.2}\ \mathrm{Ln}\,(1 + 0{,}3)$

donde: $x_0 = 0$, $dx = 0.2$, $y_0 = 1$, $dy = 0.3$, $\vec{x}_0 = (0,1)$, $h = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

Se hace así, porque (0.2 , 1.03) está cerca de (0,1) .
En segundo lugar, la función que usaremos es $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f(x,y) = e^x \mathrm{Ln}y$.

En tercer lugar , aplicar la fórmula: $f(\vec{x}_0 + h) \approx f(\vec{x}_0) + Ah$

$$f\big((0,1)+(0.2,03)\big) \approx f(0,1) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\approx e^0 \mathrm{Ln}1 + \begin{bmatrix} e^0\ \mathrm{Ln}1 & \frac{e^0}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\approx 0 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\approx 0.3$$

Cálculos auxiliares:
$f(x,y) = e^x \mathrm{Ln}y$
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \mathrm{Ln}y$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{y}$

4. Para demostrar los teoremas 4 y 5 es necesario introducir el concepto de norma de una matriz.
Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de matrices de m filas por n columnas, esto es,

$$A = \left\{ A = (a_{ij}) / a_{ij} \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 \le i \le m \ , \ 1 \le j \le n \right\}$$

Sobre cada matriz $A \in A$ definimos la norma $\| A \| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{1/2}$

Es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos los elementos de la matriz A.

con las siguientes propiedades :

1. $\| A \| > 0$, $\forall A \neq 0$ y $\| A \| = 0$ si $A = 0$
2. $\| r A \| = r \| A \|$
3. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$, A, B de orden $m \times n$
4. $\| A B \| \leq \| A \| \| B \|$, $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$

TEOREMA 3 ***(Existencia y unicidad de la matriz A)***

Supongamos que $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D abierto, es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces todas las derivadas parciales de f existen en el punto x_0 y la matriz A de $m \times n$ está dada por $\left[a_{ij}\right] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$, esto es,

$$A = Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

, *donde* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *está evaluada en* x_0. *En particular, esto implica que A está determinada de manera única; no existe otra matriz que satisfaga la (1) de la definición 6*

Demostración:

1. Por hipótesis, si $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ es diferenciable en $x_0 \in D$, entonces existe cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en x_0 y además $\lim_{h \to 0} \frac{\left| f_i(x + x_0) - f_i(x_0) - (Ah)_i \right|}{\|h\|} = 0$, $1 \leq i \leq m$; donde $(Ah)_i$ denota la i–ésima componente de la matriz Ah.

2. Considerar $h = a e_j = (0, 0, \ldots, a, \ldots, 0)$, con el número a en el j-ésimo lugar y ceros en los demás.

   obtenemos $$\lim_{a \to 0} \frac{\left| f_i(x_0 + ae_j) - f_i(x_0) - a(Ae_j)_i \right|}{|a|} = 0$$

   que es equivalente a $$\lim_{a \to 0} \left| \frac{f_i(x_0 + ae_j) - f_i(x_0)}{a} - (Ae_j)i \right| = 0$$

Lo cual implica $$\lim_{a \to 0} \frac{f_i(x_0 + ae_j) - f_i(x_0)}{a} = \underbrace{(Ae_j)i}_{} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

3. Así, queda probado que existe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ y es igual a $(Ae_j)i$. Pero $(Ae_j)_i = a_{ij}$, que son los elementos de la matriz A.

TEOREMA 4 ***(Diferenciabilidad implica continuidad)***

Si la función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D abierto; es diferenciable en $x_0 \in D$, entonces f es continua en x_0. Además, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq M_1 \|x - x_0\|$ para alguna constante M_1 y x cerca de x_0, con $x \neq x_0$.

Demostración :

Debo probar que $\| f(x_0 + h) - f(x_0) \| < \varepsilon$ siempre que $\| h \| < \delta \wedge x \in D$.

Veamos:

1. Si f es diferenciable en $x_0 \in D$, entonces existe la matriz A y además.
$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$, lo cual implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \wedge x \in D \Rightarrow \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah \| < \varepsilon \| h \|$$

Si elegimos $\varepsilon = 1$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $\| f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah \| < \| h \|$, siempre que $0 < \| h \| < \delta_1$.

2. Ahora, partir de $\| f(x_0 + h) - f(x_0) \|$. Restar y sumar el término Ah :

$$\| f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah + Ah\| \leq \underbrace{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|}_{} + \underbrace{\|Ah\|}_{}$$

$$< \| h \| + M \| h \|$$

$$< (1 + M) \| h \|$$

$$\Rightarrow \| f(x_0 + h) - f(x_0) \| < (1 + M) \| h \| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2*)$$

3. Hacer $(1+M)\|h\| = \varepsilon \Rightarrow \|h\| = \frac{\varepsilon}{1+M}$ para todo $\varepsilon > 0$

y elegir $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+M}, \delta_1\right\}$, se tendrá ;

$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| < \varepsilon$, siempre que $\|h\| < \delta \wedge x \in D$.

Lo cual implica que $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Por tanto, f es continua en x_0.

4. Sí en (2*) hacemos $1 + M = M_1$, obtenemos

$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| < M_1\|h\|$, lo cual prueba la segunda parte del Teorema. ▪

Apéndice : Dado las matrices $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ y $h = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$

y la norma $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/2} = M$, se cumple: $\|Ah\| \le \|A\|\|h\|$

$$\boxed{\|Ah\| \le M\|h\|}$$

TEOREMA 5

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D abierto. Si existen todas las derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de f y son continuas en una vecindad de un punto $x \in D$, entonces f es diferenciable en x.

Demostración : (es opcional)

Ejemplo 14 Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$. Sea la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = (\sqrt[3]{x+y}, x^2y)$ ¿Es f diferenciable en $(0,0) \in D$?

Solución:

1. $f(x,y)$ está definido en $(0,0) \in D$, pues $f(0,0) = (0,0)$

2. Las funciones componentes de f son :

$f_1 : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$, definido por $f_1(x, y) = \sqrt[3]{x+y}$

$f_2 : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$, definido por $f_2(x, y) = x^2 y$

3. Las derivadas parciales son :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y)^2}} \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y)^2}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x^2$$

En estos cuatros resultados notamos que las funciones $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ y $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ no están definidos en (0,0), esto es, no son derivables en (0,0). Por lo tanto, la función f no es derivable en (0,0).

7.4 REGLA DE LA CADENA

TEOREMA 6 Sean $U \subset IR^n$ y $V \subset IR^m$ abiertos.

Sean $g : U \subset IR^n \longrightarrow IR^m$ y $f : V \subset IR^m \longrightarrow IR^p$ funciones dadas tales que

$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} IR^p$, $g(U) \subseteq V$, de modo que está definido f o g.
$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$

Suponer que g es diferenciable en x_0 y que f es diferenciable en $y_0 = g(x_0)$. Entonces f o g es diferenciable en x_0 y además :

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(y_0)\, Dg(x_0) \,.$$ ← *regla de la cadena.*

También, se expresa : $[D(f \circ g)]_{(x_0)} = [Df]_{(y_0)} \; [Dg]_{(x_0)}$

↑ *matriz* $p \times n$; ↑ *matriz* $p \times m$; ↑ *matriz* $m \times n$

Demostración : (Opcional)

Ejemplo 15 Dado las funciones

$g : IR^2 \longrightarrow IR^3$, definido por $g(x,y) = (xy\ ,\ x^2+y^2\ ,\ 2x+y)$

$f : IR^3 \longrightarrow IR^4$, definido por $f(x,y,z) = (xyz\ ,\ x+y+z\ ,\ 2z\ ,\ y^2+z^2)$

Hallar $D(f \circ g)\,(-1,\ 2)$, si existe.

Solución:

$f \circ g$

Como : $IR^2 \xrightarrow{g} IR^3 \xrightarrow{f} IR^4$

$(-1\ ,\ 2) \longrightarrow g\,(-1\ ,\ 2)$

$= (-2\ ,\ 5\ ,\ 0) \longrightarrow f\,(-2\ ,\ 5\ ,\ 0) = (0\ ,\ 3\ ,\ 0\ ,\ 25)$

entonces $[D(f \circ g)]_{(-1,2)} = [Df]_{(-2,5,0)}\ [Dg]_{(-1,2)}$

matriz 4 × 2 *matriz 4 × 3* *matriz 3 × 2*

a) De $f(x,y,z)$ obtenemos $Df\,(x,y,z) = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2y & 2z \end{bmatrix}$

En $(-2\ ,\ 5\ ,\ 0)$, tenemos $Df(-2,5,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

b) De $g(x,y)$ obtenemos $Dg\,(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

En $(-1\ ,\ 2)$ obtenemos : $Dg\,(-1,2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) Por tanto :

$$D(f\circ g)(-1,2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -10\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 10 & 0\end{bmatrix}_{4\times 3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix}-20 & -10\\ 2 & 4\\ 4 & 2\\ -20 & 40\end{bmatrix}$$

Ejemplo 16 Dado las funciones

$g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $g(x,y)=(\overbrace{x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha}^{g_1}, \overbrace{x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha}^{g_2})$ y

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ definido por } f(\mu,\nu)=\begin{cases}0 & ,\text{si } \nu=0,\ \mu\in\mathbb{R}\\ \nu & ,\text{si } \mu=0,\ \nu\in\mathbb{R}\end{cases}$$

1) Calcular la matriz Jacobiana de $h=f\circ g$

2) Hallar el valor de $\left[\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\right]^2+\left[\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right]^2$

Solución de 1)

Tenemos $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $h=f\circ g$

Por regla de la cadena, tenemos $[Dh(x,y)] = [Df(g(x,y))]\,[Dg(x,y)]$

matriz 1 × 2 *matriz 1 × 2* *matriz 2 × 2*

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial \mu} & \frac{\partial f}{\partial \nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y}\right] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= [\operatorname{sen}\alpha \quad \cos\alpha]$$

Solución de 2) Por igualdad de matrices, se cumple : $\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \operatorname{sen}\alpha \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \cos\alpha \end{cases}$

Luego: $\left[\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\right]^2 + \left[\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right]^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Ejemplo 17 Sea $f : IR^3 \longrightarrow IR$, una función diferenciable en el punto $(0,e,0)$ tal que su matriz jacobiana en ese punto es $[e \quad -1 \quad e]$.

Demostrar que $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(0,1)} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(0,1)} = 0$, donde:

$g(x,y) = f(\operatorname{sen}(xy^2), e^y, \operatorname{Ln}(1+x^2))$ para todo $(x,y) \in IR^2$

Solución:

Según los datos tenemos la siguiente composición de funciones.

$$IR^2 \xrightarrow{g} IR^3 \xrightarrow{f} IR \qquad (f \circ g)$$

En $g(x,y) = f(\mu(x,y), \nu(x,y), w(x,y))$

se tiene : $\mu(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2)$

$\nu(x,y) = e^y$

$w(x,y) = \operatorname{Ln}(1+x^2)$

$$[D(f \circ g)]_{(0,1)} = [Df(g(x,y))]_{(0,e,0)} \quad [Dg(x,y)]_{(0,1)}$$

matiz 1×2 — matiz 1×3 — matiz 3×2

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y}\right]_{(0,1)} = [e \quad -1 \quad e] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,1)}$$

$$= [\,e \quad -1 \quad e\,] \begin{bmatrix} y^2 \cos xy^2 & 2xy \cos xy^2 \\ 0 & e^y \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{bmatrix}_{(0,1)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = [\,e \quad -1 \quad e\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\,e \quad -e\,]$$

Igualando matrices, se obtiene : $\frac{\partial g}{\partial x} = e \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -e$

Luego : $\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{(0,1)} + \left[\frac{\partial g}{\partial y}\right]_{(0,1)} = e - e = 0$

Ejemplo 18 Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable, que en el punto $P \in \mathbb{R}^2$ tiene por matriz jacobiana a $Jg(P) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

y sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cuyo gradiente en $g(P) \in \mathbb{R}^3$ es $\text{grad}\, g(P) = (8, 0, -2)$. Demuestre que la función $f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en P.

Determine el vector gradiente de esta función en P.

Solución:

Como datos se tiene :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ P \arrow[r] & g(P) \arrow[r] & f(g(P)) \end{tikzcd}$$

Se pide hallar. $D(f \circ g)_{(P)} = [Df]_{g(P)} \; [Dg]_{(P)}$

matriz 1×3 matriz 3×2

grad g(P) Jg (P)

$$[8 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = [14 \quad -22]$$

es la gradiente de $f \circ g$ en P.

Ejemplo 19 Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función diferenciable en el punto $P \in \mathbb{R}^2$, donde tiene por matriz jacobiana a $Jg(P) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponga que el gradiente de la función compuesta $f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto P es grad $f \circ g(p) = (1,1)$. Determine el vector gradiente de f en el punto g(P).

Solución:

Veamos la composición $f \circ g$ en un diagrama de flechas

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad (f \circ g)$$

$$P \longrightarrow g(P) \longrightarrow f(g(P))$$

donde : $[D(f \circ g)]_p = [Df]_{g(p)} \; [Dg]_p$

matriz 1×2 matriz 1×2 matriz 2×2

$J f \circ g(P)$ grad f(g(P)) Jg(P)

$$[1 \quad 1] = [m \quad n] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } \quad m = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p)) \quad n = \frac{\partial f}{\partial y}(g(p))$$

$$= [3m + n \quad 2m + 0]$$

Igualando matrices : $\begin{cases} 3m + n = 1 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \\ 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \end{cases}$

Entonces grad $f(g(p)) = \left[\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right]$

7.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. MATRIZ HESSIANA

Definición 8:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

abierto D de $\mathbb{R}^n$ y sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_1) \in D$. Supongamos que las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existen en $\vec{x}$. A la matriz cuadrada de orden n, definido por :

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Se le llama **MATRIZ HESSIANA** de la función f en $\vec{x}$ y se denota por H(f).

Ejemplo 20 Sea la función $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3$. Hallar la matriz Hessiana de f en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Solución:

La matriz Hessiana de f en (x_1, x_2, x_3) es :

$$H(f) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_3x_1} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_3x_2} \\ f''_{x_1x_3} & f''_{x_2x_3} & f''_{x_3x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El Hessiano de f en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$, es el mismo, porque H(f) es una matriz constante.

De $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3$, se obtienen :

$$f'_{x_1} = 2x_1 + 0 + 0 - x_2 + 1 = 2x_1 - x_2 + 1 \longrightarrow \begin{cases} f''_{x_1x_1} = 2 \\ f''_{x_1x_2} = -1 = f''_{x_2x_1} \\ f''_{x_1x_3} = 0 = f''_{x_3x_1} \end{cases}$$

$$f'_{x_2} = 0 + 2x_2 + 0 - x_1 = 2x_2 - x_1 \longrightarrow \begin{cases} f''_{x_2x_2} = 2 \\ f''_{x_2x_3} = 0 = f_{x_3x_2} \end{cases}$$

$$f'_{x_3} = 0 + 0 + 2x_3 - 2 = 2x_3 - 2 \longrightarrow f''_{x_3x_3} = 2$$

Ejemplo 21 Dada la función $f(x,y,z) = 2x^2 - 5y^2 + 3z^2 + xy - 6xz + 2yz + 1$, hallar la matriz Hessiana de f.

Solución:

$$H(J) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{zx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{zy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & -10 & 2 \\ -6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Donde:

$f'_x = 4x + y - 6z$ $\Rightarrow$ $f'_{xx} = 4$, $f'_{xy} = 1$, $f'_{xz} = -6$

$f'_y = -10y + x + 2z$ $\Rightarrow$ $f'_{yy} = -10$, $f'_{yz} = 2$, $f'_{yx} = 1$

$f'_z = 6z - 6x + 2y$ $\Rightarrow$ $f'_{zz} = 6$, $f'_{zx} = -6$, $f'_{zy} = 2$

7.6 FUNCIÓN IMPLÍCITA

Teorema General de la Función Implícita

Consideramos la ecuación $\mathbf{f(x, y) = 0}$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Siendo $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow \underbrace{(y_1(x_1, \ldots, x_m)}_{f_1}, \ldots, \underbrace{y_n(x_1, \ldots, x_m))}_{f_n}$, tal que :

i) $\mathbf{f} \in C^k(D)$, con $k \geq 1$, siendo D un abierto de $\mathbb{R}^{m+n}$

ii) $\mathbf{f(a,b) = 0}$ con $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in D$, donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

iii) de $\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right]_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \neq 0$

Entonces, existe una bola con centro en **a**, $B_\delta(\mathbf{a})$, y existe una bola con centro en **b**, $B_\varepsilon(b)$, tales que :

a) Existe una función implícita φ: $B_\delta(\mathbf{a}) \longrightarrow B_\varepsilon(\mathbf{b})$, $\boxed{\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})}$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$$

tal que $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ y $\mathbf{f(x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{a})$.

b) La función $\varphi \in C^k(B_\delta(\mathbf{a}))$ y su matriz derivada puede ser dada por :

$$[D\varphi]_{(a)} = \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{-1}_{(a,b)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(a,b)}$$

Ejemplo 22 Sea el sistema

$$\begin{aligned} x + y + \mu + w &= 0 \\ x^2 - y^2 + \mu^2 - 2v^2 + w^2 + 1 &= 0 \\ x^3 + y^3 + \mu^4 - 3v^4 + 8w^4 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

a) Diga si el sistema puede definir implícitamente $\underbrace{(\mu\ ,\ v\ ,\ w)}_{y} = \varphi\ \underbrace{(x\ ,\ y)}_{x}$ en una bola de centro en $P = (1\ ,-1\ ,\ 1\ ,-1\ ,\ 0)$

b) Calcular:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(1,-1)\ ,\ \frac{\partial \mu}{\partial y}(1,-1)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,-1)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}(1,-1)\ ,\ \frac{\partial w}{\partial x}(1,-1)\ ,\ \frac{\partial w}{\partial y}(1,-1).$$

Solución:

Según el problema debemos hacer dos cosas:

En primer lugar, analizar la existencia de la función :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longrightarrow (\mu(x,y)\ ,\ v(x,y)\ ,\ w(x,y)) = \varphi(x,y) \end{aligned}$$

Según el teorema, la función φ existe si la $\det \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(1,-1,1,-1,0)} \neq 0$, donde $y = (\mu, v, w)$.

La función f se forma con las ecuaciones dadas en el sistema, del siguiente modo :

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,\mu,v,w) \longrightarrow (\underbrace{x+y+\mu+v+w}_{f_1}\ ,\ \underbrace{x^2-y^2+\mu^2-2v^2+w^2+1}_{f_2}\ ,\ \underbrace{x^3+y^3+\mu^4-3v^4+8w^4+2}_{f_3}) = f(x,y,u,v,w)$$

En segundo lugar, hallar la matriz Jacobiana de φ que es : $\left[D\varphi\right]_{(1,-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$

Directamente, esta matriz no se puede hallar, porque la función φ no se puede expresar explícitamente. Pero el Teorema nos proporciona una fórmula para hallar $\left[D\varphi\right]_{(1,-1)}$:

Si $\underbrace{(\mu, \nu, w)}_{y} = \underbrace{\varphi(x,y)}_{x}$, entonces $\left[D\varphi\right]_{(1,-1)} = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_P^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_P$

matriz 3×2 ; matriz 3×3 ; matriz 3×2

La función f tiene 3 componentes y 5 variables

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial \nu} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial \nu} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial \nu} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix}_P^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & dy \end{bmatrix}_P$$

Empecemos a resolver :

Veamos si el problema satisface las hipótesis del teorema.

Se tiene la función $f : IR^2 \times IR^3 \longrightarrow IR^3$ definido por

$f(x, y, \mu, \nu, w) = (\underbrace{x + y + \mu + \nu + w}_{f_1}, \underbrace{x^2 - y^2 + \mu^2 - 2\nu^2 + w^2 + 1}_{f_2}, \underbrace{x^3 + y^3 + \mu^4 - 3\nu^4 + 8w^4 + 2}_{f_3})$

tal que :

i) $f \in C^k(IR^5)$, con $k \geq 1$

ii) $f(\underbrace{1, -1}_{a}, \underbrace{1, -1, 0}_{b}) = (0,0,0)$, con $a = (1, -1) \in IR^2$, $b = (1, -1, 0) \in IR^3$

iii) La matriz $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$ es $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial \nu} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial \nu} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial \nu} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\mu & -4\nu & 2w \\ 4\mu^3 & -12\nu^3 & 32w^3 \end{bmatrix}$

$$\text{La } \det\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(1,-1,1,-1,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

a) Porque la determinante es diferente de cero, afirmamos que existe una función implícita $\underbrace{(\mu, y, w)}_{y} = \varphi\,\underbrace{(x, y)}_{x}$ en el entorno del punto $P = (1\,,-1\,,1\,,1\,,-1\,,0)$; esto es, existen las funciones $\mu = \mu(x,y)$, $\nu = \nu(x,y)$, $w = w(x,y)$; las cuales, a pesar de que no se pueden ver explícitamente, sabemos que tienen derivadas continuas en una vecindad del punto $(1\,,-1)$.

b) La matriz derivada de la función $\varphi(x,y)$ en un entorno del punto $(1\,,-1)$, es:

$$\left[D\varphi\right]_{(a)} = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{-1}_{(a,b)}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(a,b)} \qquad \text{donde : } \begin{matrix} y = (\mu, \nu, w) \\ x = (x, y) \end{matrix}$$

Cálculos auxiliares :

(1) $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{bmatrix} = A$ ..... (ver *iii*)

(2) La inversa de la matriz A es $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(3) La matriz $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ es $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{bmatrix}_{(1,-1,1,-1,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

(4) Por lo tanto $[D\varphi]_{(1,-1)} = -\begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & -1 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & -3/2 \\ 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$,

Esto es, $\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & -3/2 \\ 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

COROLARIO Con las mismas hipótesis del teorema general de la función implícita, la $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ se halla con la fórmula :

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}$$

Ejemplo 23 Con los mismos datos del ejemplo 22, hallar $\frac{\partial w}{\partial y}$ en $(1, -1)$.

Solución:

Aplicar el corolario :

se tiene $(x,y), (\mu, v, w) \Rightarrow$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(u, v, y)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\mu, v, w)}}$$

En el numerador, la posición de w es sustituido por y, en el momento de hallar la matriz jacobiana

Cálculos auxiliares:

1) Hallar la determinante de la matriz Jacobiana del denominador en el punto $\mu = 1$, $v = -1$, $w = 0$ que debe ser diferente de cero, para confirmar la existencia de $\frac{\partial w}{\partial y}(1, -1)$.

Veamos:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\mu, v, w)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\mu & -4v & 2w \\ 4\mu^3 & -12v^3 & 32w^3 \end{bmatrix}_{\substack{\mu=1 \\ v=-1 \\ y=-1}} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{bmatrix} = 8$$

2) Hallar la determinante de la matriz Jacobiano del numerador en $\mu = 1$, $y = -1$, $w = 0$.

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\mu, v, y)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\mu & -4v & -2y \\ 4\mu^3 & -12v^3 & 3y^2 \end{bmatrix}_{\substack{\mu=1 \\ v=-1 \\ y=-1}} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 12 & 3 \end{bmatrix} = -2$$

CONCLUSIÓN: $\frac{\partial w}{\partial y}(1,-1) = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}$

Observación: Este resultado coincide con el elemento a_{32} de la matriz $[D\varphi]_{(1,-1)}$ del ejemplo anterior.

Ejemplo 24 El siguiente sistema de ecuaciones tiene una solución $(2,1,2)$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^3 - z^3 = -2 \\ 3x^2y - 5y^3z = 2 \end{cases}$$

¿Es cierto que si x toma valores cercanos a 2, entonces el sistema tiene solución única para (y,z)? Si la respuesta es afirmativo, ¿cuáles son aproximadamente los valores del vector (y,z) si $x = 1.97$?

Solución:

El problema pide hallar dos cosas :

1° Se pide responder si la función implícita $(y,z) = \varphi(x)$ existe en un entorno del punto $P(2,1,2)$.

2° se pide hallar la matriz $\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$, que es la aproximación del vector (x,y) si $x = 1.97$.

Veamos:

Con el sistema de ecuaciones que se da en el problema, se forma la función F, del siguiente modo :

$$F : IR \times IR^2 \longrightarrow IR^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (\underbrace{x^2 + 2y^3 - z^3 + 2}_{F_1}, \underbrace{3x^2 y - 5y^3 z - 2}_{F_2})$$

La función F, cumple las hipótesis del teorema de la función implícita :

i) $F \in C^k(IR^3)$

ii) $F(2,1,2) = (4 + 2 - 8 + 2 , 3(4)(1) - 5(1)(2) - 2) = (0,0)$

iii) La función $\overbrace{(y,z)}^{y} = \varphi(x)$ existe si sólo si det $A \neq 0$

donde $\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] = A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y^2 & -3z^2 \\ 3x^2 - 15y^2 z & -5y^3 \end{bmatrix}_{(2,1,2)}$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -246$$

1° Si det $A \neq 0$, entonces existe la función implícita $(y,z) = \varphi(x)$ cercanos a $x_0 = 2$. Decir que existe $\varphi(x)$, es equivalente decir que el sistema tiene solución única para (y,z).

Como la función F tiene dos componentes y tres variables, por el teorema de la función implícita se tiene :

Si $\underbrace{(y,z)}_{y} = \varphi(x)$, entonces $[D\varphi]_{x=1} = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{bmatrix}_{x=1} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}_p^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{bmatrix}_p$$

$$= -\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -18 & -5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

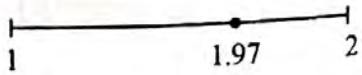
$$= -\frac{1}{-246}\begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{246}\begin{bmatrix} 124 \\ 144 \end{bmatrix}$$

donde $B = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 2x \\ 6xy \end{bmatrix}_{p(2,1,2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

se tiene : $\boxed{[D\varphi]_{x=1} = -A^{-1}B}$

2° Si tenemos $(y,z) = \varphi(x)$, obtenemos :

$$\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = [D\varphi]_{(2)}\,\Delta x$$



$$= \frac{1}{246}\begin{bmatrix} 124 \\ 144 \end{bmatrix}[-0.03]$$

$$x = x_0 + \Delta x$$
$$1.97 = 2 - 0.03$$

$$= \frac{1}{246}[-3.72 \quad -4.32]$$

$$= [-0.015 \quad -0.017]$$

de aquí se obtiene :

$$(y,z) = (1,2) + (\Delta y, \Delta z)$$
$$= (1,2) + (-0.015, -0.017).$$

Ejemplo 25 Considere las funciones $\mu=(x,y)$, $v=(x,y)$ definidas implícitamente por las ecuaciones $\begin{cases} e^{\mu}+e^{v}=x+ye \\ \mu e^{\mu}+ve^{v}=xye \end{cases}$

Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial\mu}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial\mu}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$, para $\mu=0, v=1, x=1, y=1$.

Solución:

Tener las funciones $\mu=\mu(x,y)$, $v=v(x,y)$ definidas implícitamente por las dos ecuaciones dadas en el problema es equivalente tener la función implícita $(\mu,v)=\varphi(x,y)$. Aplicando el teorema de la función implícita a la función $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y,\mu,v)=(\underbrace{x+ye-e^{\mu}-e^{v}}_{f_1},\underbrace{xye-\mu e^{\mu}-ve^{v}}_{f_2})$, tenemos :

Si $(\mu,v)=\varphi(x,y)$ entonces $\left[D\varphi\right]_{(x,y)}=-\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_p^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_p$, $p=(x,y,\mu,v)=(1,1,0,1)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=1}} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\mu} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1}_{\substack{\mu=0\\v=1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=1}}$$

$$= -\begin{bmatrix} -e^{\mu} & -e^{v} \\ -e^{\mu}-\mu e^{\mu} & -e^{v}-ve^{v} \end{bmatrix}^{-1}_{\substack{\mu=0\\v=1}} \begin{bmatrix} 1 & e \\ ye & xe \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=1}}$$

$$= -\begin{bmatrix} -1 & -e \\ -1 & -2e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & e \\ e & e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-e & e \\ 1-e^{-1} & 0 \end{bmatrix} .$$

Ejemplo 26 Dado las ecuaciones $\begin{cases} uv-3x+2y=0 \\ \mu^4-v^4=x^2-y^2 \end{cases}$

Si $\mu=x(x,y)$, $v=v(x,y)$ definen funciones implícitas alrededor del punto $p=(\mu,v,x,y)=(1,1,1,1)$; hallar las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies $\mu=\mu(x,y)$, $v=v(x,y)$ en p.

Solución:

1) La ecuación del plano tangente a la superficie $\mu(x,y)-z=0$ en $(x,y,z)=(1,1,1)$, es:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial \mu}{\partial y}\ ,\ -1\right)\cdot\big((x,y,z)-(1,1,1)\big)=0$$

2) La ecuación del plano tangente a la superficie $v(x,y)-z=0$ en $(x,y,z)=(1,1,1)$, es:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ -1\right)\cdot\big((x,y,z)-(1,1,1)\big)=0$$

Por hallarse : $\nabla \mu\,(x,y)$ y $\nabla v\,(x,y)$

Decir que $\mu=\mu(x,y)$, $v=v(x,y)$ definen funciones implícitas alrededor del punto p, es equivalente a tener la función implícita $(\mu,v)=\varphi(x,y)$.

Con las dos ecuaciones dadas, se define la función $f: IR^2\times IR^2 \longrightarrow IR^2$ por :

$$f(\mu,v,x,y)=\underbrace{(\mu v-3x+2y}_{f_1},\ \underbrace{\mu^4-v^4-x^2+y^2)}_{f_1}$$

$$\text{si } (\mu,v)=\varphi(x,y) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=1}} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1}_{\substack{\mu=1\\v=1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=1}}$$

$$= -\begin{bmatrix} v & \mu \\ 4\mu^3 & -4v^3 \end{bmatrix}^{-1}_{\substack{\mu=1\\v=1}} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2x & 2y \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=1}}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Los planos tangentes son :

1) $\left(\frac{14}{8}, \frac{-10}{8}, -1\right) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \iff \boxed{7x - 5y - 4z + 2 = 0}$

2) $\left(\frac{10}{8}, \frac{-6}{8}, -1\right) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \iff \boxed{5x - 3y - 4z + 2 = 0}$

Ejemplo 27 Establecer condiciones bajo las cuales las expresiones

$$\begin{cases} f(x, y) = g(\mu, \nu) \\ g(x, y) = f(\mu, \nu) \end{cases}$$

determinan funciones de clase C^1 $\mu = (x,y)$, $\nu = (x,y)$.

Hallar $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ en términos de las funciones $f, g : IR^2 \longrightarrow IR$ que son de clase C^1.

Solución:

Implícitamente $\mu = \mu(x,y)$, $\nu = \nu(x,y)$ es equivalente a $(\mu, \nu) = \varphi(x,y)$.

Definamos la función $F : IR^2 \times IR^2 \longrightarrow IR^2$ del siguiente modo

$$F(x,y,\mu,\nu) = \underbrace{(f(x,y) - g(\mu,\nu)}_{F_1} , \underbrace{g(x,y) - f(\mu,\nu))}_{F_2}$$

Si $(\mu,\nu) = \varphi(x,y)$, entonces $\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \mu} & \frac{\partial F_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \mu} & \frac{\partial F_2}{\partial \nu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$= - \begin{bmatrix} -g_\mu & -g_\nu \\ -f_\mu & -f_\nu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$$

Hallando la inversa y multiplicando, se obtiene : $\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{f_\mu g_\nu - f_\nu g_\mu} (g_\nu g_x - f_\nu f_x)}$

La condición es que $f_\mu g_\nu - f_\nu g_\mu \neq 0$ para que exista la división.

7.7 FUNCIÓN INVERSA

TEOREMA *(De la función inversa)*

Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longrightarrow y = f(x)$ una función definida en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$.

Sea $F(p) = q$, donde $p = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, $q = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots \overline{y}_n)$.

En una bola abierta A de centro en P, hagamos dos supuestos :

i) La función F es de clase C^k, $k \geq 1$

ii) $\det JF(p) \neq 0$

Entonces :

a) Hay una bola abierta B en $\mathbb{R}^n$ de centro en q y existe la función inversa

$$F^{-1} : B \longrightarrow A, \quad y \longrightarrow x = F^{-1}(y)$$

b) La función F^{-1} es de clase C^k y su matriz derivada está dado por $JF^{-1}(y) = (JF(x))^{-1}$

Ejemplo 28 Demostrar que la función definida por $(\mu,\nu) = f(x,y)$ con $\mu = e^{xy} + 1$, $\nu = e^{xy} + y^2$ posee una inversa local definida en una bola centrada en $(\mu,\nu) = (2,2)$ con valores en una bola centrada en $(x,y) = (0,1)$, que es de clase C^1 y calcular $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \mu}(2,2)$.

Solución:

Se tiene como dato la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (\mu(x,y), \nu(x,y))$

con $\mu = e^{xy} + 1$; $\nu = e^{xy} + y^2$; $f(0,1) = (2,2)$

Hallar la determinante de la matriz Jacobiana de f en el punto $(x,y) = (0,1)$:

La matriz Jacobiana de f es :

$$Jf(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ ye^{xy} & xe^{xy}+2y \end{bmatrix}_{\substack{x=0\\ y=1}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) La $\det Jf(0,1)=2\neq 0$, por lo tanto afirmamos que existe la función inversa $f^{-1}: B_{\varepsilon}(2,2) \longrightarrow B'_{\delta}(0,1)$ que es de clase C^1.

> ***Observación :***
> El teorema de la función inversa nos garantiza la existencia de f^{-1}, pero no dice que se puede hallar y escribirla en forma explícita, salvo excepciones.

b) la matriz Jacobiana de f^{-1} en el punto $(\mu,v)=(2,2)$, es :

$$Jf^{-1}(2,2)=\big(Jf(0,1)\big)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

El problema pide hallar $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \mu}(2,2)$. Lo cual, se puede ver en la primera columna de la matriz, esto es, $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \mu}(2,2)=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Ejemplo 29 Sea $f: IR^3 \longrightarrow IR^3$, definida por

$$f(x,y,z)=(\underbrace{z\cos(xy)}_{\mu},\ \underbrace{z\,\text{sen}\,(xy)}_{v},\ \underbrace{x+z}_{w})$$

Determine el conjunto de puntos donde el teorema de la función inversa puede ser aplicado. Calcule la matriz jacobiana de f^{-1} en el punto $(1,0,2)=f(1,0,1)$.

Solución:

En primer lugar, hallar la matriz jacobiana de la función f

$$Jf(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} & \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} -zy\,sen(xy) & -zx\,sen(xy) & cos(xy) \\ zy\cos(xy) & zx\cos(xy) & sen(xy) \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La determinante de $Jf(x,y,z)$ es:

$$\det Jf(x,y,z) = -zx\,sen^2(xy) - zx\cos^2(xy) - z^2 x\,y\,sen(x\,y)\cos(xy) + z^2 xy\,sen(xy)\cos(xy)$$
$$= -zx$$

a) El teorema de la función inversa se aplica para $-zx \neq 0$, esto es, $x \neq 0$, $z \neq 0$.

b) $$Jf(1,0,1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $$Jf^{-1}(1,0,2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, es la matriz Jacobiana de f^{-1} en el punto $(\mu, v, w) = (1,0,2)$

Ejemplo 30 Demostrar que la función $f: IR^2 \longrightarrow IR^2$, definida por $f(x,y)=((x+y)^3,(x-y)^3)$ no verifica las hipótesis del teorema de la función en el origen, sin embargo, f es invertible en IR^2

Solución:

1) Hallar la $\det J(0,0)$.

Veamos:

$$Jf(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(x+y)^2 & 3(x+y)^2 \\ 3(x-y)^2 & -3(x-y)^2 \end{bmatrix}$$

$$Jf(0,0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det Jf(0,0)=0$$

Este resultado, nos dice que f no verifica las hipótesis del teorema en $(x,y)=(0,0)$

2) La inversa es: $f: IR^2 \longrightarrow IR^2$

$$(\mu,y) \longrightarrow (x(\mu,\nu), y(\mu,\nu))$$

$$\text{Haciendo:}\begin{cases}(x+y)^3=\mu \rightarrow x+y=\sqrt[3]{\mu}\\ (x-y)^3=\nu \rightarrow x-y=\sqrt[3]{\nu}\end{cases}$$

$$2x=\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\mu}-\sqrt[3]{\nu}\right).\end{cases}$$

Ejemplo 31 Sea $g: IR \longrightarrow IR$ una función continua tal que $g(0)=1$. Considere la función $F: IR^2 \longrightarrow IR^2$ dada por:

$F(x,y)=\left(\int_x^y g(t)\,dt\ ,\ \int_y^{x^2} g(t)\,dt\right)$. Demuestre que esta función tiene una inversa F^{-1} definida en una bola B del origen de coordenadas. Determine $JF^{-1}(0,0)$.

Solución:

1) Hallemos

$$Jf(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial y}\\ \frac{\partial\nu}{\partial x} & \frac{\partial\nu}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-g(x) & g(y)\\ 2xg(x^2) & -g(y)\end{bmatrix}$$

En $(x,y)=(0,0) \Rightarrow Jf(0,0)=\begin{bmatrix}-g(0) & g(0)\\ 0g(0) & -g(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Donde $\det Jf(0,0)=1\neq 0$. Este resultado indica que f tiene inversa en la bola $B_\varepsilon(0,0)$.

2) La matriz Jacobiana de f^{-1} en (0,0) es: $Jf^{-1}=(Jf)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

7.8 EXTREMOS CONDICIONADOS

(Multiplicadores de Lagrange)

Hay problemas muy interesantes que consiste en hallar un punto $((a,b),f(a,b))$ perteneciente al gráfico de la función $f(x,y)$ tal que maximice a la función $f(x,y)$ bajo alguna condición que se da en el problema de maximización. De manera similar existen problemas de minimización de una función $f(x,y)$ bajo la restricción de otra función.

Aclaremos esta idea con 4 ejemplos:

Ejemplo 1 *(Problema de Economía)*

Supongamos que una ama de casa tiene sus preferencias representada por la función $f(x,y) = 2\,\text{Ln}\,x + \text{Ln}\,y$ (llamado función de utilidad), donde x es la cantidad del bien X (yuca) y y es la cantidad del bien Y (papa).

El ama de casa desea consumir papa o yuca, disponiendo de un presupuesto de 36 soles, siendo el precio de un kilogramo de yuca de 2 soles y el precio de un kilogramo de papa es 4 soles.

Se pregunta: ¿Qué cantidad de papa y de yuca deberá consumir el ama de casa para que se encuentre satisfecha?

Solución:

Se trata de maximizar la función utilidad $f(x,y) = 2\,\text{Ln}\,x + \text{Ln}\,y$, bajo la condición de la recta de presupuesto: $2x + 4y = 36$, donde "x" es la cantidad de yuca y "y" es la cantidad de papa. La técnica para maximizar $f(x,y)$, consiste en :

1°) Formar la función Lagrange: $F(x,y,\lambda) = \underbrace{2\,\text{Ln}\,x + \text{Ln}\,y}_{\text{función que se quiere optimizar}} + \lambda\,\underbrace{(36 - 2x - 4y)}_{\text{restricción}}$

multiplicador de Lagrange.

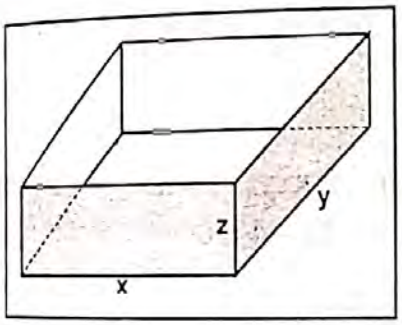
2°) Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{1}{y} - 4\lambda = 0 \\ 36 - 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Al resolver el sistema, se obtiene $x = 12$, $y = 3$. Este resultado nos índica que el ama de casa se sentirá satisfecha cuando consume 12 kg. de yuca y 3 kg de papa, cuando su presupuesto es de 36 soles.

Ejemplo 2 *(Problema geométrico)* Una caja rectangular sin tapa, debe tener un área de superficie de $16\ m^2$. hallar las dimensiones que maximicen su volumen.

Solución:

Se trata de maximizar el volumen de una caja rectangular sin tapa, sabiendo que tiene un área de superficie $16\ m^2$



a) El volumen de la caja es: $V = xyz$

b) El área sin tapa es: $16 = xy + 2z\,(x + y)$

área de la base ; *área lateral*

El volumen restringido al área es: $F(x, y, \lambda) = \underbrace{xyz}_{\text{función que se quiere optimizar}} + \lambda\,(\underbrace{16 - xy - 2z\,(x + y)}_{\text{restricción}})$

Derivar:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda(-y - 2z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda(-x - 2z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda[-2(x + y)]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 16 - xy - 2z(x + y)$$

Ahora resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1)\ yz - \lambda(y + 2z) = 0 \\ (2)\ xz - \lambda(x + 2z) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{yz}{y + 2z} = \frac{xz}{x + 2z} \Rightarrow y = x \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\begin{cases} (3)\ xy - 2\lambda(x + y) = 0 \\ (4)\ xy + 2z(x + y) = 16 \end{cases} \rightarrow \frac{xz}{x + 2z} = \frac{xy}{2(x + y)} \Rightarrow 2z\,(x + y) = y\,(x + 2z) \ldots\ldots (6)$$

(5) en (6): $z = \frac{x}{2}$ ..... (7)

(5) y (7) en (4): $x^2 + 2\frac{x}{2}(2x) = 16$

$$x^2 + 2x^2 = 16$$

$$3x^2 = 16$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Conclusión: Las medidas de la caja son: $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 3 Hallar el mínimo de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, Si (x,y,z) está en la recta $L: \begin{cases} 2x - y - 3z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Solución:

Se trata de hallar el mínimo de la función f restringido a las funciones

$g_1(x,y) = 2x - y - 3z - 4$

$g_2(x,y) = x + 2y + z - 1$

La función de Lagrange es :

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(2x - y - 3z - 4) + \lambda_2(x + 2y + z - 1)$$

Resolver el sistema :
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases}$$

Se obtiene $x = \frac{16}{15}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{11}{15}$

Continué Ud. ...

Ejemplo 4 En el plano $x + y - 2z = 0$ hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que medien entre dicho punto y los planos $x + 3z = 6$ e $y + 3z = 2$ sea la menor posible

Solución:

Sea $P = (x,y,z)$ un punto del plano $\mathcal{P} : x + y - 2z = 0$

la distancia de P al plano $\mathcal{P}_1 : x + 3z - 6 = 0$ es $d_1 = \frac{|x + 3z - 6|}{\sqrt{10}}$

la distancia de P al plano $\mathcal{P}_2 : y + 3z - 2 = 0$ es $d_2 = \frac{|y + 3z - 2|}{\sqrt{10}}$

Se pide el mínimo de: $d_1^2 + d_2^2$ sujeto al plano $x + y - 2z = 0$.

Para ello procedemos del siguiente modo :

1° Formar la función de Lagrange :

$$F(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{10}(x + 3z - 6)^2 + \frac{1}{10}(y + 3z - 2)^2 - \lambda(x + y - 2z)$$

2° Hallar las derivadas parciales :

$$(\alpha)\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{5}(x + 3z - 6) - \lambda \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{5}(y + 3z - 2) - \lambda \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{5}(x + 3z - 6) + \frac{3}{5}(y + 3z - 2) + 2\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x + y - 2z) = 0 \end{cases}$$

3° Resolver el sistema (α), se obtiene: $(3, -1, 1)$, que es el punto que minimiza a la función $d_1^2 + d_2^2$.

Observación:

En los cuatro ejemplos, solo hemos aplicado la condición necesaria de orden 1. Puede Ud. aplicar la condición suficiente usando la matriz hessiana.

A continuación, enunciaremos un teorema que establece condiciones necesarias para la existencia de extremos condicionados, en el caso general.

TEOREMA *(Multiplicadores de Lagrange – Extremos Condicionados)*

Sea $f : D \subseteq IR^n \longrightarrow IR$ una función real de clase C^1 definida en el conjunto abierto D de IR^n. Sean $g_1 , g_2 , \dots , g_m : D \subseteq IR^n \longrightarrow IR$, m funciones reales de clase C^1 en D $(m < n)$.

Sea S el conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in D$ tales que

$g_1(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = 0$

$g_2(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = 0$

$\vdots$

$g_m(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = 0$

Sea $\mathbf{x}_0 \in S$ un punto de extremo condicionado de f, esto es, existe una bola $B_r(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} \in IR^n / \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < r \} \subset D$ con la propiedad de que $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ o $f(\mathbf{x}0) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B \cap S$. Suponga que el determinante $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right) \neq 0$ para un conjunto de m variables x_j, tomadas del conjunto de n variables $\{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \}$ de g_i. Entonces existen m números reales $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_m$ tales que cumplen:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_0) \qquad (*)$$

A los números $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_m$ se les llama Multiplicadores de Lagrange, y al método que el teorema nos permite hallar los posibles extremos de f sujeta a las m restricciones $g_1(\mathbf{x}) = 0$, $g_2(\mathbf{x}) = 0 , \dots , g_m(\mathbf{x}) = 0$, se le llama **METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.**

ACLARACIÓN DE LA IGUALDAD (*)

1° $\nabla F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

$\nabla g_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_1}{\partial x_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right)$

$\nabla g_2 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \frac{\partial g_2}{\partial x_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right)$

$\vdots$

$\nabla g_m = \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_1}, \frac{\partial g_m}{\partial x_2}, \frac{\partial g_m}{\partial x_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \right)$

son vectores de IR^n

2° La ecuación (*) se puede escribir del modo siguiente :

$$\nabla f - \lambda_1 \nabla g_1 - \lambda_2 \nabla g_2 - \ldots\ldots\ldots - \lambda_m \nabla g_m = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\nabla \underbrace{(f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots\ldots\ldots - \lambda_m g_m)}_{F} = \vec{0}} \quad (**)$$

3° Hagamos: $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_m g_m$ donde F es una función cuyas variables son: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

En consecuencia F se puede escribir también así :

$$\boxed{F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \ldots x_n) \ldots - \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)}$$

ésta función se llama: FUNCIÓN DE LAGRANGE

4° De la ecuación (**) se deduce un sistema de ecuaciones.

Veamos:

Como F es una función que, ahora, depende de $n + m$ variables que son : $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Entonces el **OPERADOR NABLA** : ∇ será de la siguiente forma :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \right)$$

En consecuencia **EL GRADIENTE DE F SERA :**

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \right)$$

Como $\nabla F = \vec{0}$ según (**), entonces :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}, \ldots\ldots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \right) = \vec{0} \quad (I)$$

$$\vec{0} = \underbrace{(0, 0, 0, \ldots, 0)}_{n+m \text{ veces.}}$$

Como $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_m g_m$, entonces de la igualdad (I), se deduce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = 0 \end{cases} \iff (\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} - \ldots\ldots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} - \ldots\ldots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} - \lambda 2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} - \ldots\ldots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ \vdots \\ g_m = 0 \end{cases}$$

Como vemos, el sistema de ecuaciones (α) consta de $n + m$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas. Los puntos que resultan de resolver el sistema (α) son precisamente los puntos donde existen los extremos de la función f (máximos o mínimos) condicionados a $g_1, g_2, \ldots, g_m$.

PARA LOS EFECTOS DE LA PRACTICA SE PUEDEN PRESENTAR CASOS COMO:

1. Si se tiene una función $f(x,y)$ y se quiere hallar el máximo ó mínimo de dicha función condicionado por la ecuación $\phi(x,y)$, entonces se opera del siguiente modo:

EN PRIMER LUGAR se forma la función $F = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$

Lo que es lo mismo : $F = f(x,y) - \lambda_1\phi(x,y)$

donde : $\lambda = -\lambda_1$

EN SEGUNDO LUGAR Hacemos :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \iff (\alpha)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

EN TERCER LUGAR Resolver el sistema (α). De la solución se obtienen los puntos críticos, en los cuales deben haber máximos o mínimos.

2. Si se quiere optimizar la función $\mu = xyz$ bajo las condiciones $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$; entonces procedemos del modo siguiente :

EN PRIMER LUGAR Formar la función de Lagrange, que sería :
$F = \mu + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$

Donde $\begin{cases} \mu = xyz \\ g_1 = x + y + z - 5 \\ g_2 = xy + yz + zx - 8 \end{cases}$

Luego tendríamos : $\boxed{F = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)}$

EN SEGUNDO LUGAR Hacemos :

$$(\alpha)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = zy+\lambda_1+\lambda_2 y+\lambda_2 z=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz+\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_2 z=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy+\lambda_1+\lambda_2 y+\lambda_2 x=0 \\ g_1 = x+y+z-5 \quad =0 \\ g_2 = xy+yz+zx-8 \quad =0 \end{cases}$$

EN TERCER LUGAR Resolver el sistema (α).

ACLARACIÓN IMPORTANTE Notemos que al deducir el sistema de ecuaciones (α) habíamos, previamente, formado la Función de **LAGRANGE**, haciendo

$$F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_m g_m .$$

Como vemos los multiplicadores de Lagrange λ_1 , λ_2 , ... , λ_m aparecen con signo **NEGATIVO**; pero no hay ningún inconveniente en escribirlo con el signo positivo,

Así : $$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \ldots + \lambda_m g_m$$

Esta es la forma que la mayoría de los libros escriben la ***Función de Lagrange***

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Hallar los valores extremos de $z = xy$ con la condición $x + y = 1$.

Solución:

Paso 1: Formar la función de Lagrange : $F = xy + \lambda (x + y - 1)$

Paso 2: Hacemos :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff (\alpha) \begin{cases} y + \lambda = 0 & (1) \\ x + \lambda = 0 & (2) \\ x + y - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Paso 3: Resolver el sistema (α) :

De (1) despejamos y : $\boxed{y = -\lambda}$ (4)

De (2) despejamos x : $\boxed{x = -\lambda}$ (5)

SUSTITUIR (4) y (5) en (3) : $-\lambda - \lambda - 1 = 0$

$$\iff -2\lambda - 1 = 0 \iff \boxed{\lambda = -1/2} \ (6)$$

SUSTITUIR (6) en (1) y (2) :

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}} \\ x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

El punto critico es : (1/2 , 1/2)

Luego $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ⟵ *Es un Extremo (MÁXIMO).*

Aplicar la condición suficiente para probar que $\frac{1}{4}$ es un máximo local en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

SEGUNDO MÉTODO DE RESOLVER EL PROBLEMA 1

Hallar los valores extremos de $z = xy$ con la condición $x + y = 1$

Paso 1 : De $x + y = 1$ despejo y : $\boxed{y = 1 - x}$ ①

Paso 2 : Sustituir ① en z : $z = x(1 - x)$

$$\boxed{z = x - x^2} \quad ②$$

Paso 3 : Hallar los extremos de la función $z = x - x^2$.

i) $\boxed{\frac{dz}{dx} = 1 - 2x}$

ii) Haciendo $1 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

iii) $\frac{d^2z}{dx^2} = -2$

iv) Como $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$, entonces existe máximo en $x = ½$

donde : $\text{máximo} = Z\,]_{x=½} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

PROBLEMA 2 Hallar las distancias máximas y mínimas desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Solución:

Paso 1 : Supongamos que (x , y) es un punto de la curva $\mathcal{C} : 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

La distancia del origen $(0,0)$ al punto $(x,y) \in \mathcal{C}$, es :

$d = f(x , y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se pide optimizar la distancia d restringido a la función $\phi(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8$

Nota: optimizar la distancia **d** restringido a la función $\phi(x,y)$ es equivalente a optimizar la distancia al cuadrado (d^2) restringido a la función $\phi(x,y)$.

Paso 2 : Formar la función de ***Lagrange*** : $F = (x^2 + y^2) + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)$

Paso 3 : Hallar las derivadas parciales de $F(x,y;\lambda)$ y resolver el sistema (α) :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(10x + 6y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(6x + 10y) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 5x^2 + 6xy - 8 \end{cases} \qquad (\alpha) \begin{cases} 2x + \lambda(10x + 6y) = 0 & (1) \\ 2y + \lambda(6x + 10y) = 0 & (2) \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

Paso 4 : Resolver el sistema (α)

De (1) despejar λ : $\lambda = -\frac{x}{5x + 3y}$ ..... (4)

De (2) despejar λ : $\lambda = -\frac{y}{3x + 5y}$ ..... (5)

Igualar (4) con (5) : $\frac{x}{5x + 3y} = \frac{y}{3x + 5y}$

$\Leftrightarrow \quad x(3x + 5y) = y(5x + 3y)$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 5xy = 5xy + 3y^2$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 = 3y^2 \iff x^2 = y^2 \iff \boxed{y = x}$ (6) $\vee$ $\boxed{y = -x}$ (7)

a) Sustituir (6) en (3)

Si $y = x \Rightarrow 5x^2 + 6x(x) + 5(x)^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow 16x^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Entonces : si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en (6) : $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

si $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, en (6) : $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Para A, el valor de λ se obtiene en (4) : $\lambda = -\frac{1}{8}$

Para B, el valor de λ en (4) es : $\lambda = -\frac{1}{8}$

b) Sustituir (7) en (3) :

$$5x^2+6x(-x)+5(-x)^2-8=0$$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0$$

$$4x^2-8=0 \iff x^2=2 \iff x^2=2 \iff \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$

Al sustituir en (7) obtenemos : $C(\sqrt{2},-\sqrt{2}),\lambda=-\frac{1}{2}; D(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\lambda=-\frac{1}{2}$

Los puntos críticos son:

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ C(\sqrt{2},-\sqrt{2})\ \text{y}\ D(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

Paso 5 : Los extremos de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ son :

a) $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$

b) $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$

c) $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=\sqrt{2+2}=2$

d) $f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=2$

La mínima distancia de $(0,0)$ a $\mathcal{C}$ es 1 y la máxima es 2.

PROBLEMA 3 Hallar los valores extremos del campo escalar $f(x,y,z)=x-2y+2z$ en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$

Solución: Se trata de optimizar la función f bajo la restricción de $\phi(x,y)=x^2+y^2+z^2-1$

Paso 1 : Formar la función de Lagrange $F=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

Paso 2 : Hallar las derivadas parciales de $F(x,y,z;\lambda)$ y resolver el sistema (α):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2+2\lambda z$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=z^2+y^2+z^2-1$$

$$(\alpha)\begin{cases} 1+2\lambda x=0 & (1)\\ -2+2\lambda y=0 & (2)\\ 2+2\lambda z=0 & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1 & (4)\end{cases}$$

so 3 : Resolver el Sistema (α) :

DESPEJAR x DE (1) : $x = -\frac{1}{2\lambda}$ (5)

DESPEJAR y DE (2) : $y = \frac{1}{\lambda}$ (6)

DESPEJAR z DE (3) : $z = -\frac{1}{\lambda}$ (7)

Sustituir (5) , (6) y (7) en (4)

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1 \iff 1+4+4=4\lambda^2$$

$$\iff 9=4\lambda^2 \iff \lambda^2=\frac{9}{4}$$

$$\iff \boxed{\lambda = 3/2} \vee \boxed{\lambda = -3/2}$$

$$\text{⑧} \qquad \text{⑨}$$

a) Sustituir (8) en (5) , (6) y (7) :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2(3/2)} = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3/2} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\tfrac{1}{3}\ ,\ \tfrac{2}{3}\ ,\ -\tfrac{2}{3}\right)$$

b) Sustituir (9) en (5) , (6) y (7) :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\tfrac{1}{3}\ ,\ -\tfrac{2}{3}\ ,\ \tfrac{2}{3}\right)$$

Paso 4 : Los extremos de la función $f(x,y) = x - 2y + 2z$ existen en los puntos

$$P\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) \text{ y } Q\left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

Los extremos son :

a) $f\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{3} = -3 \longrightarrow$ *mínimo.*

b) $f\left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} = 3 \longrightarrow$ *máximo.*

PROBLEMA 4 Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

Solución: Este problema es similar al problema 2.

Paso 1 : Queremos determinar los puntos de la superficie S: $z^2 - xy = 1$ que están más próximos al origen. Un punto (x,y,z) del espacio de tres dimensiones, está a una distancia r del origen si y sólo si esta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Esta esfera es una superficie de nivel de la función :

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se pide minimizar $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sujeto a $z^2 - xy - 1 = 0$. Lo que es equivalente minimizar $x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $\varphi(x,y,z) = z^2 - xy - 1$

Paso 2 : Formar la función de Lagrange : $F = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\substack{\textit{distancia al cuadrado} \\ \textit{del origen al punto} \\ (x,y,z)}} + \lambda \underbrace{(z^2 - xy - 1)}_{\textit{restricción}}$

Paso 3 : Hallar las derivadas parciales de $F(x,y;\lambda)$ y resolver el sistema (α) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda y \qquad (\alpha)\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2x}{y} & \ldots\ldots (1) \\ 2y - \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{x} & \ldots\ldots (2) \\ 2z + 2\lambda z = 0 \Rightarrow 2z(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{z = 0}}_{(3)} \vee \lambda = -1 & \\ z^2 - xy - 1 = 0 & \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2\lambda z$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = z^2 - xy - 1$$

Igualando (1) con (2) : $\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = x \ \vee \ y = -x$

$[y = x \ \wedge \ z = 0]$ en (4) : $0 - x(x) - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ *(vacío)*
$[y = -x \ \wedge \ z = 0]$ en (4) : $0 - x(-x) - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
Así obtenemos los puntos : $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, 1, 0)$

Paso 4 : En $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ se obtienen :

$$\begin{cases} f(1,-1,0) = \sqrt{2} \\ f(-1,1,0) = \sqrt{2} \end{cases}$$. A y B son los puntos más proximos al origen.

7.8.1 Condición Suficiente de Extremo Condicionado

Sean $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno $D \subset \mathbb{R}^n$ de un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{g(a)} = \mathbf{0}$ y rang $dg(\mathbf{a}) = m$, siendo $m < n$. Se supone que **a** es un punto estacionario de la función de Lagrange $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$ (donde $g_1, \ldots, g_m$ son los componentes de **g** y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son unos ciertos números reales), esto es, se supone que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $d\mathbf{F(a)} = 0$.

Entonces (si es $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el incremento de la variable $\mathbf{x} \in D$, o sea, $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$) se verifica que :

1° Si $d^2\mathbf{F(a)}(\Delta\mathbf{x}) > 0$ para todo $\Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $dg(\mathbf{a})(\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, entonces **f** tiene en **a** un mínimo relativo condicionado por la ligadura $\mathbf{g(x)} = \mathbf{0}$,

2° Si $d^2\mathbf{F(a)}(\Delta\mathbf{x}) < 0$ para todo $\Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $dg(\mathbf{a})(\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, entonces **f** tiene en **a** un máximo relativo condici ·do por la ligadura $\mathbf{g(x)} = \mathbf{0}$.

3° Si $d^2\mathbf{F(a)}(\Delta\mathbf{x}_1) > 0$ y $d^2\mathbf{F(a)}(\Delta\mathbf{x}_2) < 0$ para unos ciertos $\Delta\mathbf{x}_1$ e $\Delta\mathbf{x}_2$ tales que $dg(\mathbf{a})(\Delta\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ y $dg(\mathbf{a})(\Delta\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, entonces **f** no tiene en **a** un extremo relativo condicionado por la ligadura $\mathbf{g(x)} = \mathbf{0}$.

Aplicar la condición suficiente al ***PROBLEMA 2.***

Necesitamos hallar a) $d^2 F(x,y)\,(dx, dy)$

y b) $d\varphi(x,y)\,(dx, dy)$

Donde :

a) $$d^2 F(x,y)\,(dx,dy) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right)^{(2)}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

Aplicar esta fórmula en el paso 3 de la pág. 661 :

$$d^2 F(x,y)\,(dx, dy) = (2 + 10\lambda)\,dx^2 + (2 + 10\lambda)dy^2 + 2(6\lambda)dx\,dy \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

b) $$d\phi(x,y)(dx, dy) = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy$$

Aplicar esta fórmula a la función $\phi(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8$,

Obteniéndose : $d\phi(x,y)(dx,dy) = (10x + 6y)dx + (6x + 10y)dy$ ..... (2)

A continuación, reemplazamos los puntos $A=(x,y;\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{8}\right)$, B, C y D; tanto en (2) como en (1).

i) A en (2) : $d\phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(dx,dy)=8\sqrt{2}\,dx+8\sqrt{2}\,dy$

Según 1° de la condición suficiente, debe ser : $8\sqrt{2}\,dx+8\sqrt{2}\,dy=0$, del cual se obtiene: $dy=-dx$, que la reemplazamos en d^2F :

ii) A en (1) : $d^2F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(dx,dy)=\left(2-\frac{5}{4}\right)dx^2+\left(2-\frac{5}{4}\right)dy^2-\frac{3}{2}dx\,dy$

$$=\frac{3}{4}dx^2+\frac{3}{4}dx^2+\frac{3}{2}dx^2$$

$$=3\,dx^2$$

Este resultado, nos indica que: d^2F es "definida positiva" (como función de dx), luego f tiene en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un mínimo relativo condicionado por $\phi(x,y)=0$.

De manera similar se analiza en los puntos B, C y D.

Aplicar la condición suficiente al ***PROBLEMA 3.***

Necesitamos las fórmulas a) y b) :

a) $d^2F(x,y,z)(dx,dy,dz)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}dx\,dz+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}dy\,dz.$$

b) $d\phi(x,y,z)(dx,dy,dz)=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$

1° Al aplicar la fórmula b) en el PROBLEMA 3, paso 2, pág 662 :

$$\begin{aligned} d^2F(x,y,z)\,(dx,dy,dz) &= 2\lambda\,dx^2+2\lambda\,dy^2+2\lambda\,dz^2+2(0)\,dx\,dy \\ &\quad +2(0)\,dx\,dz+2(0)\,dy\,dz \\ &= 2\lambda\,dx^2+2\lambda\,dy^2+2\lambda\,dz^2 \quad \text{.....} \quad (1) \end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula a) a la función $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, obtenemos :

$d\phi(x,y,z)\,(dx, dy, dz) = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$ ..... (2)

2° Sustituir el punto $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}; \lambda = \frac{3}{2}\right)$ en (2) y (1) :

i) En (2) : $d\phi\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)(dx, dy, dz) = -\frac{2}{3}dx + \frac{4}{3}dx - \frac{4}{3}dz$.

ii) En (1) : $d^2F\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)(dx, dy, dx) = 3dx^2 + 3dy^2 + 3dz^2$, que es ***definida positiva*** (como función de dx, dy, dz), luego f tiene en el punto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ un mínimo relativo condicionado por $\phi(x,y,z) = 0$.

3° Sustituir el punto $Q\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \lambda = -\frac{3}{2}\right)$ en (2) y (1) :

i) En (2) : $d\phi\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)(dx, dy, dz) = \frac{2}{3}dx - \frac{4}{3}dy + \frac{4}{3}dy$.

ii) En (1) : $d^2F\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)(dx, dy, dz) = -3\,dx^2 - 3\,dy^2 - 3\,dz^2$, que es ***definida negativa*** (como función de dx, dy, dz), luego f tiene un máximo relativo en $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ condicionado por $\phi(x,y,z) = 0$.

PROBLEMA 5 Hallar los puntos de la curva de intersección de las dos superficies $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$ que están más próximos al origen.

Solución:

Paso 1 : Queremos determinar los puntos de la curva de intersección de las dos superficies. $S_1 : x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$
$S_2 : x^2 + y^2 = 1$ que están más próximos al origen.

La función distancia del origen al punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que deseamos optimizar es $\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ restringido a las superficies S_1 y S_2. Pero optimizar $\mathbf{r}$ es equivalente a optimizar la distancia al cuadrado : $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la restricción de las funciones $\varphi(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1$, $\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$.

Paso 2 : Formar la función de Lagrange :

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) + \mu\,(x^2 + y^2 - 1)$$

Paso 3 : *(CONDICIÓN NECESARIA)*

Hallar las derivadas parciales de $F(x,y,z;\lambda,\mu)$ y resolver el sistema (α) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x-y) + 2\mu x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(-x+2y) + 2\mu y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2\lambda z$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - 1$$

$$(\alpha)\begin{cases} 2x + \lambda(2x-y) + 2\mu x = 0 & \ldots\ldots (1) \\ 2y + \lambda(-x+2y) + 2\mu y = 0 & \ldots\ldots (2) \\ 2z - 2\lambda z = 0 & \ldots\ldots (3) \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 & \ldots\ldots (4) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \ldots\ldots (5) \end{cases}$$

a) De (1) despejar λ : $\lambda = \frac{2x(1+\mu)}{y-2x}$ ..... (6)

De (2) despejar λ : $\lambda = \frac{2y(1+\mu)}{x-2y}$ ..... (7)

Igualar (6) con (7) : $\frac{2x(1+\mu)}{y-2x} = \frac{2y(1+\mu)}{x-2y}$

$$(1+\mu)(y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow \mu = -1 \vee y = x \vee y = -x$$

b) De (3) obtenemos : $2z(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \vee z = 0$

c) Sustituir (5) : $x^2 + y^2 = 1$ en (4) : $1 - xy - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow xy + z^2 = 0$

Así obtenemos :

$$[\mu = -1 \vee y = x \vee y = -x] \wedge [z = 0 \vee \lambda = 1] \wedge \overbrace{[x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0}^{(4)} \wedge \overbrace{x^2 + y^2 = 1]}^{(5)}$$

$$\boxed{xy + z^2 = 0} \quad (8)$$

d) Si $y = x \wedge z = 0$, en (4) : $x^2 - x^2 + x^2 - 0 - 1 = 0$

$$x = \pm 1$$

Así obtenemos los puntos : $A = (1,1,0)$ y $B = (-1,-1,0)$ que no satisfacen la ecuación (8).

e) Si $y = -x \wedge z = 0$, en (4) : $x^2 + x^2 + x^2 - 0 - 1 = 0$

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Así obtenemos los puntos : $C=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ y $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$; que no satisfacen (8).

f) Si $y=x$ en (5) : $2x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

- Si $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ se obtiene $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, que al reemplazar en (8) obtenemos : $\frac{1}{2}+z^2=0$ (que no tiene solución)
- Si $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, que en (8) : $\frac{1}{2}+z^2=0$ *(no tiene solución).*

g) Si $y=-x$ reemplazamos en (5) : $2x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Al elegir $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ obtenemos $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, que al reemplazar en (8) obtenemos:

$-\frac{1}{2}+z^2=0 \Rightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Así obtenemos los puntos : $E=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $G=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- Si $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, que al reemplazar en (8) obtenemos : $z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Así tendremos los puntos : $P=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $Q=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

h) Para $\mu=1$, no existe solución.

Conclusión : Los puntos : E, G, P y Q son puntos estacionarios de la función de Lagrange $F=f+\lambda g_1+\mu g_2$, donde $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $\varphi(x,y,z)=x^2-xy+y^2-z^2-1$, $\psi(x,y,z)=x^2+x^2-1$.

Paso 4 : *CONDICIÓN SUFICIENTE :*
Para ello, deben aplicarse las 3 siguientes fórmulas :

a) $$d^2F(x,yz)(dx,dy\,dz)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial F^2}{\partial z^2}dz^2$$
$$+2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial z}dx\,dz+2\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial z}dy\,dz$$

b) $d\varphi(x,y,z)(dx,dy,dz) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$

c) $d\psi(x,y,z)(dx,dy,dz) = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz$

Estas tres fórmulas se aplican del siguiente modo :

En primer lugar, se reemplazan en las tres fórmulas un punto estacionario $P_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$.

En segundo lugar, se resuelven : $d\varphi(x_0 , y_0 , z_0)(dx , dy , dz) = 0$

$d\psi(x_0 , y_0 , z_0)(dx , dy , dz) = 0$

En tercer lugar, éstas soluciones se reemplazan en :

$d^2 F(x,y,z)$ (dx , dy , dz), para averiguar si la función $d^2 F(x,y,z)$ (dx , dy , dz), como función de dx, dy, dz; es **DEFINIDA NEGATIVA** o es **DEFINIDA POSITIVA.**

PROBLEMA 6 Si a , b , y c son números positivos, hallar el valor máximo de $f(x , y , z) = x^a\ y^b\ z^c$ con la condición $x + y + z = 1$.

Solución:

Paso 1 : Formar la función de Lagrange : $F = x^a y^b z^c + \lambda (x + y + z - 1)$

Paso 2 : *(CONDICIÓN NECESARIA)*

Hallar las derivadas parciales de $F(x,y,z,\lambda)$ y resolver el sistema (α) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a x^{a-1} y^b z^c + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b y^{b-1} x^a z^c + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = c z^{c-1} x^a y^b + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 1$$

$$(\alpha)\begin{cases} y^b z^c a x^{a-1} + \lambda = 0 & (1) \\ x^a z^c b y^{b-1} + \lambda = 0 & (2) \\ x^a y^b c z^{c-1} + \lambda = 0 & (3) \\ x + y + z = 0 & (4) \end{cases}$$

Paso 3 : Resolver el sistema (α)

De (1) obtengo : $y^b z^c x^a \frac{a}{x} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x^a y^b z^c = -\frac{x\lambda}{a}$ (5)

De (2) obtengo : $x^a z^c y^b \frac{b}{y} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x^a y^b z^c = -\frac{\lambda y}{b}$ (6)

De (3) obtengo : $x^a y^b z^c \frac{c}{z} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x^a y^b z^c = -\frac{\lambda z}{c}$ (7)

Igualando ⑤ y ⑥ : $-\frac{\lambda x}{a} = -\frac{\lambda y}{b} \iff \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{bx}{a}}$ ⑧

Igualando ⑤ y ⑦ : $-\frac{\lambda x}{a} = -\frac{\lambda x}{c} \iff \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{cx}{a}}$ ⑨

Sustituir ⑧ y ⑨ en ④ :

$$x + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} - 1 = 0$$

$$ax + bx + cx - a = 0$$

$$x(a+b+c) = a \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{a}{a+b+c}}$$ ⑩

Sustituir ⑩ en ⑧ : $y = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{a+b+c}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{b}{a+b+c}}$

Sustituir ⑩ en ⑨ : $z = \frac{c}{a}\left(\frac{a}{a+b+c}\right) \Rightarrow \boxed{z = \frac{c}{a+b+c}}$

Paso 4 : El Punto Crítico es : $P\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right)$.

El máximo de la función $f(x,y,z) = x^a y^b z^c$ es :

$$f\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right) = \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^a \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^b \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right) = \frac{a^a\, b^b\, c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}}$$

Aplique Ud. la condición suficiente, para comprobar esta afirmación.

7.8.2 Aplicaciones a la Economía

A. Demanda de Bienes de Consumo

Dado la función utilidad del consumidor $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ donde $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son, respectivamente, las cantidades de los bienes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y dada la restricción de su presupuesto $M = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son respectivamente los precios de mercado de los bienes $X_1, X_2, \ldots, X_n$; siempre hay un máximo restringido.

La función de Lagrange, en el cual encontramos el punto $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ que haga máximo a la función U sujeto a la función M, será :

$$z = U(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \lambda(M - p_1 q_1 - p_2 q_2 - \ldots - p_n q_n)$$

Donde la función M representa el ingreso monetario del consumidor.

PROBLEMA 7 La función de utilidad de un ama de casa A es $U = 18 - \frac{1}{2}x^2 - y^2$. donde x e y son respectivamente las cantidades que se compran de X e Y. Supóngase que el ingreso monetario de A es M = 12 y que los precios de X e Y son respectivamente 2 y 3.

Determine las cantidades de X e Y que maximizan la función de utilidad, considerando la restricción presupuestal.

Solución:

Paso 1 : La función ingreso monetario del ama de casa A, es $M = 2x + 3y$, como $M = 12$, entonces tendremos : $12 = 2x + 3y \iff 2x + 3y - 12 = 0$

Paso 2 : La función de Lagrange, será : $z = 18 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \lambda(2x + 3y - 12)$

Paso 3 : Hallar las derivadas parciales de la función $z = z(x, y; \lambda)$ y resolver el sistema (α) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -x + 2\lambda$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -y + 3\lambda$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 12$$

$$(\alpha)\begin{cases} -x + 2\lambda = 0 & (1) \\ -y + 3\lambda = 0 & (2) \\ 2x + 3y - 12 = 0 & (3) \end{cases}$$

Paso 4 : Resolver el sistema (α) :

De (1) despejamos x : $x = 2\lambda$ (4)

De (2) despejamos y : $y = \frac{3}{2}\lambda$ (5)

Sustituir (4) y (5) en (3) :

$$2(2\lambda) + 3(3/2\lambda) - 12 = 0$$

$$8\lambda + 9\lambda - 24 = 0$$

$$17\lambda - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{24}{17}} \quad (6)$$

Sustituir (6) en (4) y (4) :

$$x = 2\left(\frac{24}{17}\right) = \frac{48}{17}$$

$$y = \frac{3}{2}\left(\frac{24}{17}\right) = \frac{36}{17}$$

Respuesta. La cantidad de X es $x = \frac{48}{17}$ y la cantidad de Y es $y = \frac{36}{17}$

PROBLEMA 8 Si la función de utilidad de dos mercancías de X e Y es $U = 3x^2 + y^3$ y la restricción presupuestal es:

$M = 15 = P_x x + P_y y = 2x + 3y$, encuentre las cantidades que se demandan de X e Y.

Solución:

Paso 1 : Si la función de utilidad de dos mercancías X e Y es $U = 3x^2 + y^3$ y la restricción presupuestal es : $15 = 2x + 3y \iff 15 - 2x - 3y = 0$, entonces la función de Lagrange será :

$$z = 3x^2 + y^3 + \lambda(15 - 2x - 3y)$$

Paso 2 : Hallar las derivadas parciales de la función $z = z(x, y; \lambda)$ y resolver el sistema (α) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2\lambda$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3\lambda$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 15 - 2x - 3y$$

$$(\alpha) \begin{cases} 6x - 2\lambda = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3\lambda = 0 & (2) \\ 15 - 2x - 3y = 0 & (3) \end{cases}$$

Paso 3 : Resolver el sistema (α) :

De (1) despejamos x: $x = \frac{1}{3}\lambda$ (4)

De (2) despejamos y : $y = \sqrt{\lambda}$ (5)

Sustituir (4) y (5) en (3) :

$15 - 2\left(\frac{1}{3}\lambda\right) - 3\sqrt{\lambda} = 0$ | Haciendo $\boxed{\sqrt{\lambda} = \beta}$ (6) la ecuación se convierte en:

$\longleftrightarrow \quad 45 - 2\lambda - 9\sqrt{\lambda} = 0$ | $2\beta^2 + 9\beta - 45 = 0$

$\longleftrightarrow \quad 2\lambda + 9\sqrt{\lambda} - 45 = 0$ | $(2\beta + 15)(\beta - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}$ (7)

Sustituir (7) en (6) : $\sqrt{\lambda} = 3 \Rightarrow \boxed{\lambda = 9}$ (8)

Sustituyendo (8) en (4) y (5) : $x = \frac{1}{3}(9) = 3$

$y = \sqrt{9} = 3$

Respuesta : La cantidad de demanda de la mercancía X es $x = 3$.
La cantidad de demanda de la mercancía Y es $y = 3$.

B. Demanda de los Factores de Producción

Caso I Supongamos que $X = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sea la función de producción y $c = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$ sea la función costo, en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son respectivamente, las cantidades de insumo de los factores de producción $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son los costos respectivos de los factores (**YA SEAN SALARIOS O RENTA**).

Luego la función de Lagrange, en el cual encontramos el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que haga máximo la función producción X sujeto a la función c, será :

$$F = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \lambda\left(c - \sum_{i=1}^{n} w_i\, a_i\right)$$

c = es una constante :

Hallando las derivadas parciales de la función $F(a_1, \ldots, a_n; \lambda)$ y resolver el sistema de ecuaciones (α) :

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_1} - \lambda w_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{\partial f}{\partial a_2} - \lambda w_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{\partial f}{\partial a_n} - \lambda w_n$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = c - \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$$

$$(\alpha)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1} - \lambda w_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial a_1}}{w_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_2} - \lambda w_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial a_2}}{w_2} \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_n} - \lambda w_n = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial a_n}}{w_n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i\, a_1 = c \end{cases} \quad \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_1}}{w_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_2}}{w_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial f}{\partial a_n}}{w_n}$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial a_i}$ *es el producto físico marginal del factor i*

CASO II Ahora consideremos el inverso del caso I.

Supongamos que queremos minimizar el costo de producción sujeto a las posibilidades de producción, para ello debemos tener en cuenta dos funciones :

En primer lugar, sea $C = g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la función del costo.

En segundo lugar, sea $X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, a_i$ las posibilidades de producción, en donde los valores $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son los productos físicos marginales de los factores. ($X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, a_i$ es una función producción lineal homogénea)

En consecuencia, la función de Lagrange, en el cual encontremos el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que haga mínimo el **COSTO TOTAL** para obtener una cierta producción X_0, será :

$$F = g(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \left(X_0 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i \right)$$

PROBLEMA 9 La función de producción de la empresa A es:

$$X = 15\ell + 26k + 2\ell k - \ell^2 - 2k^2$$

en donde ℓ y k son respectivamente insumos de diversas clases de trabajo, L y K. Supóngase que los salarios para L y K son respectivamente 3 y 2 y que la empresa puede gastar únicamente 50 en este insumo. Encuentre la producción máxima (se utiliza la misma unidad de medida para X que para el costo de producción).

Solución:

Paso 1 : La función costo será $c = 3\ell + 2k$

Como $c = 50$, entonces tendremos $50 = 3\ell + 2k$

$$\Longleftrightarrow \quad 50 - 3\ell - 2k = 0$$

Pero, la función de producción es $X = 15\ell + 26k + 2\ell k - \ell^2 - 2k^2$, entonces la función de Lagrange, será :

$$F(\ell, k; \lambda) = 15\ell + 26k + 2\ell k - \ell^2 - 2k^2 + \lambda(50 - 3\ell - 2k)$$

Paso 2 : Hallar las derivadas parciales de la función $F(\ell, k; \lambda)$ y resolver el sistema (α) .

$$\frac{\partial F}{\partial \ell} = 15 + 2k - 2\ell - 3\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 26 + 2\ell - 4k - 2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 50 - 3\ell - 2k$$

$$(\alpha) \begin{cases} 15 + 2k - 2\ell - 3\lambda = 0 & (1) \\ 26 + 2\ell - 4k - 2\lambda = 0 & (2) \\ 50 - 3\ell - 2k = 0 & (3) \end{cases}$$

Paso 3 : Resolver el sistema (α) :

De (1) despejar λ : $\lambda = \frac{1}{3}(15 + 2k - 2\ell)$ ..... (4)

De (2) despejar λ : $\lambda = 13 + \ell - 2k$ ..... (5)

Igualando (4) y (5) : $\frac{1}{3}(15 + 2k - 2\ell) = 13 + \ell - 2k$

$\Longleftrightarrow$ $24 + 5\ell - 8k = 0$ ..... (6)

Ahora, resolver el sistema formados por (6) y (3) :

$$\begin{cases} 24 + 5\ell - 8k = 0 & (6) \\ 50 - 3\ell - 2k = 0 & (3) \end{cases}$$

Multiplicar por -4 la ecuación (3) :

$$\begin{cases} 24 + 5\ell - 8k = 0 \\ -200 + 12\ell + 8k = 0 \end{cases}$$

$-176 + 17\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell = \frac{176}{17}}$ (7)

Sustituir (7) en (3) : $50 - 3\left(\frac{176}{17}\right) - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{161}{17}}$

Respuesta: Existe máximo de la función X , cuando $\ell = \frac{176}{17}$ y $k = \frac{161}{17}$.

El máximo es :

$$X\left(\frac{176}{17}, \frac{161}{17}\right) = 15\left(\frac{176}{17}\right) + 26\left(\frac{161}{17}\right) + 2\left(\frac{176}{17}\right)\left(\frac{161}{17}\right) - \left(\frac{176}{17}\right)^2 - 2\left(\frac{161}{17}\right)^2$$

$$= 311$$

Problemas Propuestos

1 Encuentre el nivel de utilidad máximo de la demanda de X e Y, si la función de utilidad es $U = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2$ y la restricción presupuestal es $4x + 5y = 28$ o sea, $M = 28$, $p_x = 4$ y $P_y = 5$.

2 Si la función de utilidad de las mercancías X e Y es $U = 8x + 22y - x^2 - 2xy - y^2$ y la restricción presupuestal es $12 = x + 2y$, determine los valores de X e Y que maximizan la utilidad.

3 El producto Y utiliza los factores A y B de acuerdo con la función producción $y = k\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 3xy}$ donde k es una constante. Dados los precios de los factores P_a y P_b encuentre su uso óptimo para minimizar el costo con un monto dado de producto Y.

Demuestre que en este óptimo $x_1 = m_1 y$ y $x_2 = m_2 y$ donde m_1 y m_2 son constantes (es decir, los factores se combinan en proporciones fijas dependiendo de P_a y P_b).

4 Dado las siguientes definiciones y el Teorema de Euler:

Definición 1. *(FUNCIÓN HOMOGÉNEA)*
Dado $z = f(x,y)$ y una constante λ, si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k z$ se dice que f es una función homogénea de grado k.

Definición 2.
Se dice que la función $z = f(x,y)$ es homogénea de primer grado (de homogeneidad lineal) si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$.

TEOREMA DE EULER: Dado que $z = f(x,y)$ es homogénea de grado k, entonces

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = k\,z\,.$$

Se pide:

i) Identificar cuales de las funciones $z = f(x,y)$, $w = f(x,y,z)$ y $X = X(L,K)$ son homogéneas de grado k.

ii) ¿Cuáles son de homogeneidad lineal?

iii) Aplique el Teorema de Euler a las funciones homogéneas.

a) $z = 3x + 5y$ **b)** $z = xy + x^2 + y^2$ **c)** $w = \frac{xy}{z} + 4z + \frac{z^3}{xy} + \frac{5y^2}{2x} + 3y$

d) $X = A\,L^{\alpha}\,K^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$ **e)** $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ **f)** $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

g) $f(x,y) = \mathrm{Ln}\frac{y}{x}$ **h)** $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$

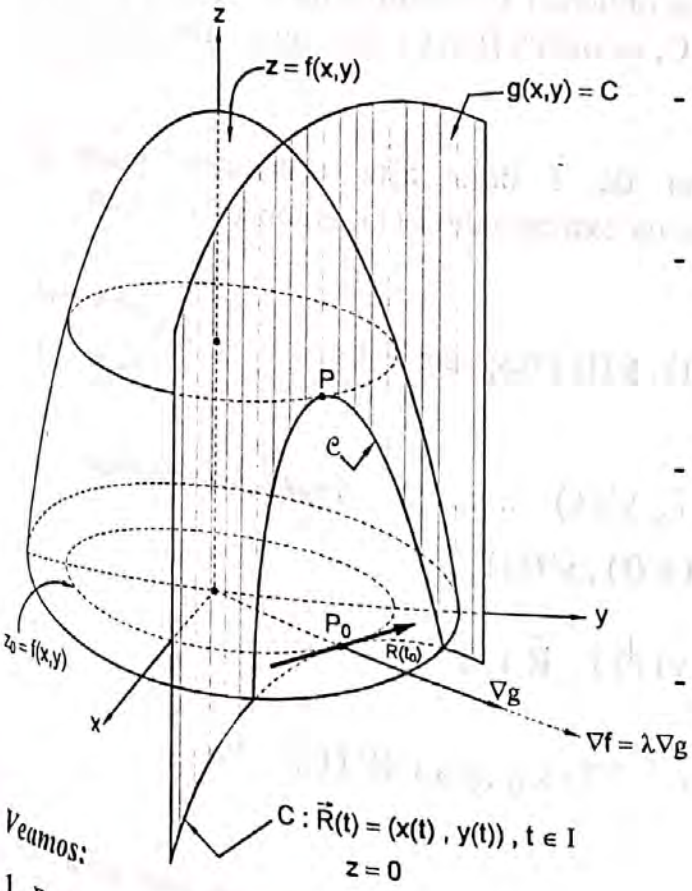
7.8.3 Multiplicadores de Lagrange con un parámetro para funciones de dos variables.

TEOREMA 2 Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$. Sea $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ otra función de clase C^1 en D.

Supongamos que f tiene un extremo en $P_0(x_0, y_0)$ sobre la curva regular de restricción $g(x,y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un número λ tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Demostración: Debo probar que el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es paralelo al vector $\nabla g(x_0, y_0)$.



En el gráfico podemos apreciar:

- La intersección de las superficies $z = f(x,y)$ y $g(x,y) = c$ es la curva $\mathcal{C}$.
- La función f tiene un extremo en $P_0 = (x_0, y_0) = R(t_0)$ sobre la curva $\mathcal{C}$. El extremo recae en el punto $P = f(x_0, y_0)$.
- La parametrización de la curva $g(x,y) = c$, es:

$$\vec{R}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}\,,\ t \in I$$

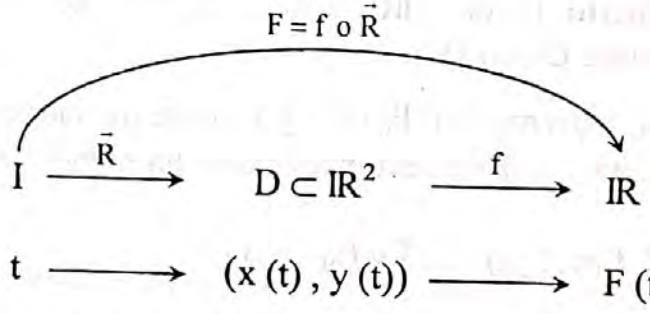
- La composición de $\vec{R}(t)$ con $f(x,y)$ es $F(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in I$.

Veamos:

1. Designemos por C a la curva de restricción $g(x,y) = c$ cuya parametrización sea $\vec{R}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, con el cuidado que esta curva sea de clase C^1 y que para algún $t_0 \in I$ cumpla que $P_0 = \vec{R}(t_0)$.

2. Según la hipótesis del teorema, la función $f(x,y)$ tiene un extremo en el punto $P_0(x_0, y_0)$ que corresponde a $t = t_0$, esto es, $P_0 = \vec{R}(t_0)$.

3. Con las funciones $\vec{R}(t)$ y $f(x,y)$ se puede definir la composición de $\vec{R}(t)$ y $f(x,y)$, del siguiente modo:

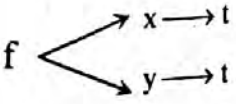


obteniéndose la función $F : I \longrightarrow IR$ definido por $F(t) = f(x(t), y(t))$.

Cuando t varía en el intervalo I se obtienen los valores de la función f (x,y) que corresponden a (x,y) en la curva C, es decir, $f(x,y)$ está sujeta a la restricción de $g(x,y) = c$.

4. Como $f(x_0, y_0)$ es un extremo de f bajo esta restricción, resulta que $F(t_0) = f(x(t_0), y(t_0))$ también es un extremo de $F(t)$, entonces $F'(t_0) = 0$.

5. Al derivar la función $F(t) = f(x(t), y(t))$ respecto a t



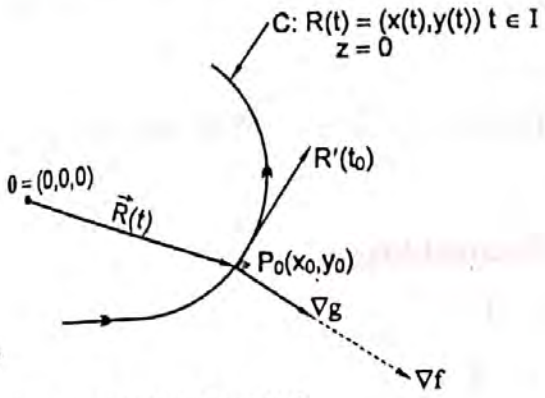
obtenemos:
$$F'(t) = f_x\, x'(t) + f_y\, y'(t) \quad \ldots\ldots\ldots \textit{(regla de la cadena)}$$
$$= (f_x, f_y) \cdot (x'(t), y'(t))$$
$$= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \vec{R}'(t)$$

6. Por 4. Se tiene: $F'(t_0) = 0$, esto es: $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{R}'(t_0) = 0$
Analizar esta igualdad:

a) si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, entonces la condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ se cumple para $\lambda = 0$

b) si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $R'(t_0)$.

Pero $\nabla g(x_0, y_0)$, también es **ORTOGONAL** a $\vec{R}'(t_0)$, porque es vector normal a la curva C.



En consecuencia, si $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son ortogonales al mismo vector, entonces son paralelos, esto es, existe algún número real $\lambda \neq 0$ tal que, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

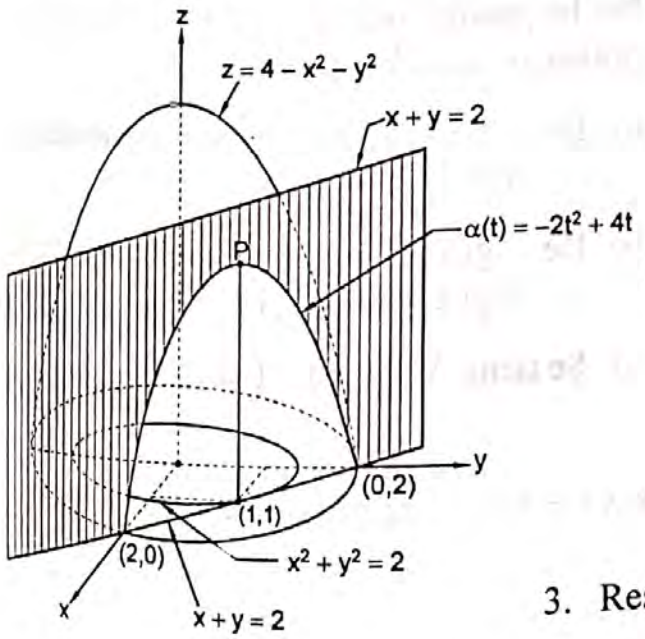
lqqd.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ sujeta a la restricción $x + y = 2$ con $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Solución:

Mirar el siguiente gráfico y comparar los resultados al aplicar el método de Lagrange:



Método de Lagrange:

1. La función de Lagrange es:

   $F(x,y,\lambda) = 4 - x^2 - y^2 + \lambda (x + y - 2)$

2. Las derivadas parciales son:

   $F_x = -2x + \lambda$
   $F_y = -2y + \lambda$
   $F_\lambda = x + y - 2$

3. Resolver el sistema: $\begin{cases} -2x + \lambda = 0 \rightarrow x = \lambda/2 \\ -2y + \lambda = 0 \rightarrow y = \lambda/2 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

Reemplazar en la 3ra ecuación: $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = 2$

Sustituyendo $\lambda = 2$ en 3. Se obtiene: $x = 1$, $y = 1$

Los extremos son: a) El máximo es $f(1,1) = 2$.

b) $f(2,0) = f(0,2) = 0$, es el mínimo.

Interpretación de la demostración del Teorema 2.

En el ejemplo que acabamos de hacer, se pide hallar los extremos de la función $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Los pasos seguidos, al demostrar el Teorema 2, son:

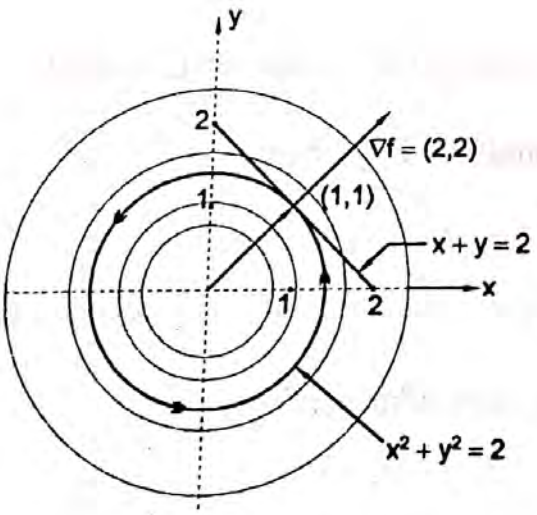
1° Parametrizar la recta $C : x + y = 2$
Esto se logra, haciendo $x = t$ y despejando $y = 2 - t$. Así obtenemos la parametrización $\vec{R}(t) = (t, 2-t)$, $0 \leq t \leq 2$

2° Hacer la composición $\vec{R}(t)$ con $f(x,y)$, obteniéndose:
$F(t) = f(x(t), y(t)) = 4 - t^2 - (2-t)^2 = -2t^2 + 4t.$

3° Hallar los extremos de $F(t) = -2t^2 + 4t$, $0 \leq t \leq 2$

a) $F'(t) = -4t + 4$; b) $F'(t) = 0 \iff -4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1.$

c) $F''(t) = -4$. Como $F''(1) = -4$ es negativo, existe máximo en $t = 1$; el máximo es $F(1) = 2$.



4° Por otro lado se comprueba que
$\nabla f(1,1) = -2\,\nabla g(1,1)$, $\lambda = -2$

En la parametrización de C, para $t = 1$, se obtienen: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

a) De $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, se obtiene
$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$

b) De $g(x,y) = x + y$, $c = 2$, se obtiene:
$\nabla g(x,y) = (1,1)$

c) Se tiene $\nabla f(1,1) = (-2, -2)$

Ejemplo 2 Hallar el mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $xy = 1$.

Solución:

Formar el Langragiano: $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$

Las derivadas parciales de F son: $F_x = 2x - \lambda y$, $F_y = 2y - \lambda x$, $F_\lambda = -(xy - 1)$.

Al resolver el sistema: $\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$ obtenemos: $(1,1)$ y $(-1, -1)$.

El mínimo es: $2 = f(1,1) = f(-1,-1)$.

Según la demostración del Teorema 2, tendremos:

1° La parametrización de $C: xy = 1$, haciendo $x = t$;
tendremos $C: \bar{R}(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right)$, $t \neq 0$.

2° Hacer la composición de $\bar{R}(t)$ con $f(x,y) = x^2 + y^2$ es:

$F(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + \frac{1}{t^2}$

a) Al derivar $F(t)$, obtenemos: $F'(t) = 2t - \frac{2}{t^2}$

b) De $F'(t) = 0$, obtenemos $t = \pm 1$ y $(1,1)$, $(-1,-1)$

3° De $f(x,y) = x^2 + y^2$ se obtiene: $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$
De $g(x,y) = xy$ se obtiene: $\nabla g(x,y) = (y,x)$

4° En el punto $(1,1)$ se cumple : $\nabla f = 2\nabla g$
En el punto $(-1,-1)$ se cumple: $\nabla f = -2\nabla g$.

TEOREMA 3 ***(Tasa de variación del valor extremo)***

Supongamos que E es un valor extremo (máximo o mínimo) de $z = f(x,y)$ sujeto a la restricción $g(x,y) = c$. Entonces el multiplicador de Lagrange λ es la tasa de variación de E con respecto a c, es decir, $\boxed{\lambda = \frac{dE}{dc}}$

Demostración:

1. La función de Lagrange es: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda [g(x,y) - c]$

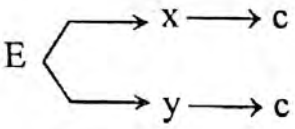
donde: $\begin{cases} F_x = f_x - \lambda g_x \\ F_y = f_y - \lambda g_y \\ F_\lambda = -[g(x,y) - c] \end{cases}$

2. Al igualar a cero cada ecuación se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = c \end{cases} \Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$$

3. Las coordenadas (x,y) que optimizan a la función $f(x,y)$, dependen de la constante "c" porque, restricciones distintas digamos $g(x,y) = k$ darán lugar a otros puntos que optimizan a $f(x,y)$.

4. Como el valor extremo E es función de x , y ; escribimos $E = E(x , y)$ y porque "x" e "y" son funciones de c, obtenemos la siguiente composición de funciones:



Por la regla de la cadena, la $\frac{dE}{dc}$ es: $\frac{dE}{dc} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dc} + \frac{\partial E}{\partial Y}\frac{dy}{dc}$

Como $E = f(x,y)$, escribimos : $\frac{dE}{dc} = f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc}$

Por el paso 2 obtenemos : $= \lambda g_x \frac{dx}{dc} + \lambda g_y \frac{dy}{dc}$

$= \lambda \left[g_x \frac{dx}{dc} + g_y \frac{dy}{dc} \right]$

5. Como: $g \begin{cases} \rightarrow x \longrightarrow c \\ \rightarrow y \longrightarrow c \end{cases}$ se obtiene: $\frac{dg}{dc} = g_x \frac{dx}{dc} + g_y \frac{dy}{dc}$

6. Entonces ..... $\frac{dE}{dc} = \lambda \frac{dg}{dc}$

7. Como $g(x,y) = c \Rightarrow \frac{dg}{dc} = 1$; y $\frac{dE}{dc} = \lambda$. ***lqqd.***

LA INTERPRETACIÓN DE LA IGUALDAD. $\frac{dE}{dc} = \lambda$ es: por cada unidad que varía c, entonces la variación de E respecto a c es λ.

7.8.3.1 Aplicación a la economía

La función de Producción de Cobb-Douglas.

Definición

Una función del tipo $Q(x , y) = k x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ se llama una función de Coob-Douglas.

Ejemplo Ilustrativo

Se estima que, si se gastan "x" miles de dólares en trabajo e "y" miles de dólares en equipos, la producción de una fábrica de televisores a color será de:

$$Q(x, y) = 50\, x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{3}{5}} \text{ unidades.}$$

Si se dispone un capital de 150,000 dólares, hallar cuánto se debe distribuir entre trabajo y equipamiento para que la producción sea máxima. ¿Cómo cambia la producción si el total del capital se aumenta en 1000 dólares?

Solución:

Se pide hallar los valores de x e y que haga máximo a la función $Q(x, y) = 50\, x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{3}{5}}$ bajo la restricción de un capital de 150,000 dólares.

Como la suma de "x" dólares con "y" dólares es $x + y = 150000$, entonces el problema se reduce en hallar el máximo de la función $Q(x,y)$ sujeta al presupuesto $x + y = 150000$.

Pasos a seguir:

1. Formar la función de Lagrange: $F(x, y, \lambda) = 50x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{3}{5}} - \lambda\,(x + y - 150000)$

2. Hallar las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 50\,\frac{2}{5}\,x^{\frac{-3}{5}}\, y^{\frac{3}{5}} - \lambda$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 50\,\frac{3}{5}\,x^{\frac{-2}{5}}\, x^{\frac{2}{5}} - \lambda$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x + y - 150000)$$

3. Resolver el sistema:

$$20x^{\frac{-3}{5}}\, y^{\frac{3}{5}} - \lambda = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$30y^{-\frac{2}{5}}\, x^{\frac{2}{5}} - \lambda = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$x + y - 150000 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

De (1) y (2) despejar λ e igualar: $20x^{-\frac{3}{5}}\, y^{\frac{3}{5}} = 30\, y^{-\frac{2}{5}}\, x^{\frac{2}{5}}$

$$2y = 3x$$
$$y = \frac{3}{2}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Reemplazar (4) en (3): $x + \frac{3}{2}x - 150000 = 0$

$$5x - 30000 = 0 \Rightarrow x = 60000$$
$$\text{Luego} \;:\; y = 90000$$

En consecuencia, en trabajo se debe distribuir la suma de 60 mil dólares y en equipos se debe distribuir 90 mil dólares y la producción máxima es:

$$Q(60,90) = 50(60)^{2/5}(90)^{3/5} = 3.826,273502 \quad \text{unidades.}$$

Como: $\lambda = 20x^{-\frac{3}{5}} y^{\frac{3}{5}}$, entonces para $x = 60$ mil e $y = 90$ mil se obtiene: $\lambda = 25,50849001$. Este resultado nos indica que por cada 1000 dólares de crecimiento del capital, la producción crecerá en, aproximadamente, 25.5 unidades.

Aplicando el teorema es : $\frac{dE}{dc} = \frac{3826.273502}{150} = 25,5084900$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Grupo 1 (***Aplicaciones a la Economía***)

01. (Lagrange y el Consumo)
Supongamos que existen dos bienes con precios $p_1 = 2$ y $p_2 = 5$, el ingreso es $M = 40$, y la función utilidad es $u(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x^{1/2}$
Hallar las cantidades de los dos bienes que maximizan la función **UTILIDAD.**

02. La función utilidad de Juan para manzanas y bananas es $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, donde x_1 es el número de manzanas y x_2 es el número de bananas. Cada manzana cuesta S/.0.15 y cada banana S/.0.10. Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar cuántas manzanas y cuántas bananas deberá comprar su amigo David para que Juan maximice su utilidad, si dispone de S/. 1.50

03. La función de utilidad de un consumidor de dos bienes es $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, y sus precios son, respectivamente, $P_1 = S/1$; $P_2 = S/2$. Si el consumidor tiene un ingreso de 40 nuevos soles, ¿ cuántas unidades del primer bien y del segundo bien debe comprar si quiere maximizar su función utilidad ?

04. Asumir que $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ es la función de utilidad de un consumidor A, donde x_1 y x_2 son las cantidades de los bienes X_1 y X_2, respectivamente. Sean p_1 y p_2 los precios de los bienes X_1 y X_2 respectivamente, si M es el ingreso del consumidor A, se pide:

a) Hallar las cantidades x_1^* y x_2^* que maximizan la utilidad.

b) Hallar el valor λ^*.

c) Hallar las funciones demanda $q_1(p_1, p_2, M)$, $q_2(p_1, p_2, M)$.

d) Hallar la función utilidad indirecta definida por:
$V(p_1, p_2, M) = u(q_1(p_1, p_2, M), q_2(p_1, p_2, M))$.

e) Hallar $\frac{\partial v}{\partial M}$.

f) Probar que $\Delta V = V(p_1, p_2, M + \Delta M) - V(p_1, p_2, M) = \lambda^* \Delta M$.

05. Las preferencias de un consumidor están representadas por la función utilidad $u(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Ln} x_1 + \operatorname{Ln} x_2$. Si el presupuesto restringido es $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$, determinar las funciones demanda, esto es, los valores x_1^* y x_2^* en térmimos de P_1, P_2 y M.

06. Un consumidor compra ciertas cantidades de dos artículos frutas y chocolates, cada mes. La función de utilidad del consumidor es $u(x_1, x_2) = x_1^{5/6} x_2^{1/3}$ para un par (x_1, x_2) de x_1 unidades de fruta y x_2 unidades de chocolate. El consumidor tiene un total de S/.40 para gastar en frutas y chocolate cada mes. El precio de la fruta es S/.1 por unidad y el precio del chocolate es S/.2 por unidad. ¿Cuántas unidades de cada uno deberá comprar el consumidor cada mes para maximizar su utilidad?

07. Un consumidor compra manzanas y bananas y su función utilidad es $u(x,y) = xy^2$ donde x es el número de manzanas y "y" el número de bananas. Supongamos que él tiene \$1.80 para gastar en la compra de manzanas y bananas, cada manzana cuesta \$0.12 cada uno, cada banana cuesta \$0.20. Escriba el Langrangeano restringida al presupuesto del consumidor y halla las cantidades de manzana y banana que maximicen la función utilidad.

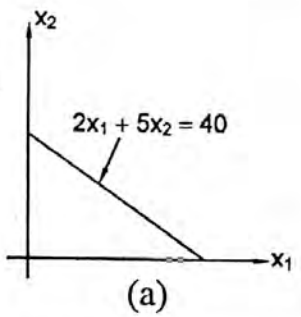
08. Armando es un estudiante graduado y su trabajo semanal lo comparte entre su proyecto de investigación y dictando clases de matemáticas para economistas. Él estima que su función utilidad para ganar \$ w por dictar clases y gastar R horas en su trabajo de investigación es $u(w, R) = W^{3/4} R^{1/4}$. El esta cobrando \$16 por hora para enseñar y trabaja un total de 40 horas cada semana. Cómo podrá dividir su tiempo para maximizar su utilidad.

09. Se pensó que un consumidor mide su función utilidad u de poseer una cantidad x de manzanas y una cantidad y de bananas por la fórmula $u = u(x, y)x^{\alpha} y^{1-\alpha}$. Es conocido que cuando el presupuesto del consumidor para manzanas y bananas es \$1 el comprará 1 manzana y 2 bananas cuando tienen igual precio. Use esta información para encontrar α. El precio de la manzana baja a mitad del precio de las bananas, con el precio de las bananas sin cambiar. Cuántas manzanas y bananas consumirá para luego vender por \$10.

10. Asumir, como el ejercicio 6, que un consumidor tiene función de utilidad $x_1^{5/6} x_2^{1/3}$ para frutas y chocolates. Determinar la función demanda del consumidor $q_1(p_1, p_2, M)$ y $q_2(p_1, p_2, M)$. Determinar también λ^* en términos de p_1, p_2 y M. Encontrar la función de utilidad indirecta y demostrar que $\lambda^* = \frac{\partial V}{\partial M}$. Supóngase, como antes, que el costo de la fruta es \$1 por unidad y el chocolate es \$2 por unidad. Si el ingreso es aumentado desde \$36 a \$36.5, determine el precio que resulta de cambiar en la función de utilidad indirecto. Demostrar que éste es aproximadamente igual a $(0.5)\lambda^*$, donde λ^* es evaluado cuando $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ y $M = 36$.

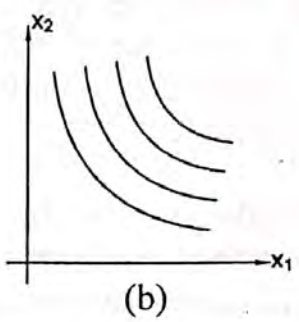
RESPUESTAS: Grupo 1

1. $x_1^* = 8$, $x_2^* = \frac{24}{5}$, $\lambda = \sqrt{\frac{1}{120}}$. Interpretación geométrica :



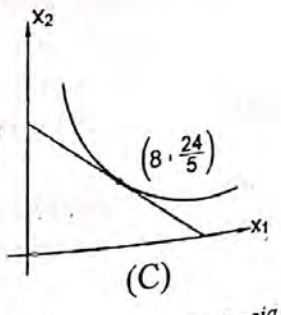
(a)

La función ingreso



(b)

mapa de las funciones de utilidad. Son cóncavas.



(C)

En el punto de tangencia se maximiza la utilidad.

2. $x_1^* = \frac{20}{3}$, $x_2^* = 5$

3. $x_1^* = 20$, $x_2^* = 10$

4. a) $x_1^* = \frac{M}{2p_1}$, $x_2^* = \frac{M}{2p_2}$; b) $\lambda^* = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}$ c) las funciones demanda son, justamente, x_1^* y x_2^*; esto es : $q_1(p_1,p_2,M) = \frac{M}{2p_1}$, $q_2(p_1,p_2,M) = \frac{M}{2p_2}$;

d) $V(p_1, p_2, M) = \frac{M}{2\sqrt{p_1 p_2}}$; e) $\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}$

5. $x_1^* = \frac{2M}{3p_1}$, $x_2^* = \frac{M}{3p_2}$

Grupo 2 (*Diversos*)

01. Una caja tiene la forma de cubo de arista igual a la unidad ubicada en el primer octante. Dentro de la caja se coloca una plancha metálica que es porción del plano $x+y+z=1$. Se calienta la caja de tal forma que la temperatura en cada punto (x,y,z) es $T(x,y,z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$ en cientos de grados centígrados.

Halle el punto más caliente y el más frío de la placa.

R.: $T\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right) = 3.6$ para $\lambda = -\frac{4}{5}$ (máximo).

En la frontera se obtiene : $T\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$, $T\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right) = \frac{10}{3}$, $T\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 3.5$

En los vértices : $T(1,0,0) = 2$, $T(0,1,0) = 3$, $T(0,0,1) = 3$.

02. La temperatura en el punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ viene dada por la función $T(x,y,z) = 100 - xy - xz - yz$. Hallar la temperatura más baja en el plano $x+y+z=10$.

R: La temperatura mínima es 200/3 .

03. Se desea cercar un terreno rectangular con tela metálica y se dispone de 320 metros de dicho material. ¿Cómo hay que construir la cerca para que encierre un área máxima?

R: 80 m por 80 m.

04. La fábrica de chocolates "**RICO**" planea gastar 8 mil dólares en el desarrollo y promoción de un nuevo producto. Se estima que, si gasta "x" miles de dólares en desarrollo e "y" miles en promoción, se venderán aproximadamente $f(x,y) = 50x^{1/2} y^{3/2}$ unidades. Halle la distribución de dinero que hace máxima las ventas.

***R*:** $x = 200$ dólares , $y = 6000$ dólares

05. La fábrica "**EL DORADO**" planea vender un nuevo producto a 150 dólares por unidad. El gerente estima que, si se gasta x miles de dólares en desarrollo e y miles en producción, venderá aproximadamente $\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$ unidades del producto. El coste de producción es de 50 dólares por unidad.

a) El fabricante tiene 8000 dólares para gastar en desarrollo y promoción. Halle la distribución de dinero que genera el máximo beneficio.
b) Suponga que el fabricante decide gastar 8100 dólares, en lugar de 8000, para desarrollo y promoción del nuevo producto. Halle cómo esta variación del capital inicial incidirá en el beneficio máximo.
c) Si hay disponible un fondo ilimitado, ¿cuánto deberá gastar el fabricante en desarrollo y promoción para alcanzar el máximo beneficio?

***R*:** a) 3000 dólares en desarrollo y 5000 en promoción
b) El beneficio aumentará aproximadamente en 130.61 dólares
c) Se deben gastar 4000 dólares en desarrollo y 6000 en promoción.

06. Demuestre que la función de coste $C(x,y) = px + qy$ se hace mínima sujeta al nivel fijo de producción $Ax^{\alpha} y^{\beta} = K$ con $\alpha + \beta = 1$, cuando $x = \frac{k}{A}\left(\frac{\alpha q}{\beta p}\right)^{\beta}$, $y = \frac{K}{A}\left(\frac{\beta p}{\alpha q}\right)^{\alpha}$.

07. Halle el mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $x + y = 4$ e $y + z = 6$.

***R*:** mínimo es $\frac{56}{3}$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

08. Halle el máximo de $f(x,y,z) = xy + xz$ sujeta a las restricciones $2x + 3y = 5$, $xy = 4$.

***R*:** máximo $\frac{121}{24}$ en $\left(\frac{5}{4}, \frac{16}{5}, \frac{5}{6}\right)$.

09. Sea $u: IR^3 \longrightarrow IR$ la función definida por la siguiente expresión en la que $a > 1$, $b > 1$ y $c > 1$ son dados: $u = a^x b^y c^z$

Hallar los valores máximo y mínimo de u cuando (x,y,z) recorre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

10. Se considera el elipsoide, de semiejes a, b y c : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Se inscribe en el elipsoide una pirámide de base rectangular perpendicular al eje z. Hallar el volumen máximo de una tal pirámide.

11. Se consideran todas las pirámides de base cuadrada cuyas aristas tienen, entre las ocho, una longitud constante e igual a k. Hallar, de entre ellas, la pirámide de volumen máximo.

12. Hallar la distancias máxima y mínima de un punto genérico de la siguiente curva α al origen de coordenadas:

$$\alpha: \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

13. Hallar las distancias máximas y mínima de un punto genérico de la siguiente curva α y al plano $x + y + z = 10$

$$\alpha: \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ 2x^2 + y + z = 0 \end{cases}$$

14. Se considera el elipsoide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$. Hallar un punto del elipsoide situado en el primer octante tal que el tetraedro que el plano tangente en él, al elipsoide, determina con los planos coordenados tenga volumen mínimo y hallar éste.

15. Sea $f: C \longrightarrow IR$ la función definida en el círculo $C: x^2 + y^2 \leq 4$ mediante $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2 y^2$.

1. Hallar los extremos relativos de f en $\mathring{C}: x^2 + y^2 < 4$.
2. Hallar los extremos relativos de f en $\partial C: x^2 + y^2 = 4$.
3. Hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en C.

16. Sea $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida en el círculo $C : x^2 + y^2 \leq 4$ mediante $f(x,y) = 3x^2 y^2 + 2x^3 + 2y^3$.

Hallar los valores máximo y mínimo de f en C.

RESPUESTAS: Grupo 2

09. Tomando logaritmos: máximo en $(x,y,z) = (h\,L\,a\,,\, h\,L\,b\,,\, h\,L\,c)$ y mínimo en $(x,y,z) = (-h\,L\,a\,,\, -h\,L\,b\,,\, -h\,L\,c)$, donde $h = r\,[\,(L\,a)^2 + (L\,b)^2 + (L\,c)^2\,]^{-1/2}$. Máximo $e^{r^2 h}$; mínimo $e^{-r^2 h}$. **NOTA :** L es logaritmo natural.

10. Vértice en $(0,0,c)$, base en $z = \text{constante}$; $\text{vol} = (4/3)\,xy(c - z)$ con la ligadura $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$. Tomando logaritmos, $x = \sqrt{3}\,a/2$, $y = \sqrt{3}\,b/2$, $z = -c/2$; vol máximo $= (3/2)\,abc$.

11. Aristas de la base: $(5 - \sqrt{13})\,k\,/\,12$; aristas laterales : $(\sqrt{13} - 2)\,k\,/\,12$.

12. Extremos de $x^2 + y^2 + z^2$ con las dos ligaduras dadas: puntos críticos

$(x\,,y\,,z\,;\lambda\,,\mu) = (0\,,\pm\sqrt{2/7}\,,\pm\sqrt{1/7}\,;-2/7\,,-1/7)$

$(x\,,y\,,z\,;\lambda\,,\mu) = (\pm\sqrt{2/5}\,,0\,,\pm\sqrt{1/5}\,;-1/5\,,-2/5)$

Máximo $\sqrt{3/5}$, mínimo $\sqrt{3/7}$

13. Extremos de $(10 - x - y - z)/\sqrt{3}$ con las dos ligaduras dadas. Máximo $\dfrac{8 + \frac{5}{\sqrt{29}}}{\sqrt{3}}$; mínimo $\dfrac{8 - \frac{5}{\sqrt{29}}}{\sqrt{3}}$.

14. Punto de tangencia (x,y,z), volumen $V(x,y,z) = \dfrac{(abc)^2}{6xyz}$; ligaduras $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Punto buscado $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\,,\dfrac{b}{\sqrt{3}}\,,\dfrac{c}{\sqrt{3}}\,,\right)$, volumen mínimo $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,abc$

15. 1°. En $(0,0)$ mínimo .

2°. En $(0,2)$ y $(0,-2)$ máximo, en $(2,0)$ y $(-2,0)$ mínimo .

3° Máximo $f(0,2) = f(0,-2) = 36$, mínimo $f(0,0) = 0$.

16. Puntos críticos en $\overset{\circ}{C}: (0,0)$ y $(1,-1)$; puntos críticos a lo largo de $\partial D : (0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Máximo $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 12 + 8\sqrt{2}$; mínimo $f(0,-2) = f(-2,0) = -16$.

Grupo 3 ***(Teorema de la función implícita, Teorema de la función inversa)***

01. Sea $F(x,y) = 0$ que define una curva en el plano XY que pasa por el punto (x_0, y_0). Suponer que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Mostrar que esta curva se puede representar localmente por la gráfica de una función $y = g(x)$. Mostrar que:

i) la recta ortogonal a $\nabla F(x_0, y_0)$ concuerda con,

ii) la recta a la gráfica de $y = g(x)$

02. a) Verificar directamente (esto es sin usar el Teorema de la función implícita) dónde podemos resolver la ecuación $F(x,y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$ para "y" en términos de "x".

b) Verificar que la respuesta en la parte (a) concuerde con la respuesta esperada del Teorema de la función implícita. Calcular $\frac{dy}{dx}$.

03. Mostrar que $x^3 z^2 - z^3 yx = 0$ es soluble para z como función de (x,y) cerca de $(1,1,1)$ pero no cerca del origen. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(1,1)$.

04. Analizar la solubilidad de: $\begin{cases} y + x + uv = 0 \\ uxy + v = 0 \end{cases}$ para u y v en términos de "x" y "y", cerca de $x = y = u = v = 0$ y verificar directamente.

05. Considerar $f(x,y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$. ¿Tiene esta función de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en $\mathbb{R}^2$ inversa local cerca de $(0,1)$?

06. Considérese el sistema de ecuaciones $\begin{cases} xu + \operatorname{sen} v = \pi/2 \\ yv + \cos u = 0 \end{cases}$

Analícese si él define implícitamente a dos funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un cierto entorno de $(x,y) = (1,1)$ y tales que $u(1,1) = \pi/2$, $v(1,1) = 0$. Hállense expresiones para du y dv.

07. Compruébese si existen dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^2$ definidas localmente por :

$$\begin{cases} xy(u+v) + (x+y)uv = -2 & u(1,1) = 1 \\ x + y + u + v = 2 & v(1,1) = -1 \end{cases}$$

Hallar $du(1,1)$, $dv(1,1)$, $d^2u(1,1)$ y $d^2v(1,1)$.

08. Sea $z = e^x \cos y$, donde x e y son las funciones de r definidas implícitamente por las ecuaciones :

$$x^3 + e^x = t^2 + t + 1 \quad , \quad yt^2 + y^2 t + y - t = 0$$

y tales que $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Hallar la derivada dz/dt en $t = 0$

09. Sean $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v)$ las funciones definidas implícitamente por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 - \operatorname{sen}(2u + 3v) = 2 & x(\pi/2, 0) = 1 \\ x^2 + z^2 - y\cos(uv) = 0 & y(\pi/2, 0) = 1 \\ xy + z - \operatorname{sen} u \cos v = 0 & z(\pi/2, 0) = 0 \end{cases}$$

Hallar dx, dy y dz en el punto $(u,v) = (\pi/2, 0)$.

10. Si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ definidas por el sistema de ecuaciones $x + y + u + v = a$, $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b^2$

Obtener expresiones que proporcionen las diferenciales de u y v.

11. Supóngase que $(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de cierto punto (x,y,z) en el que sus derivadas parciales no son nulas, por lo que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define implícitamente a tres funciones $z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$, entorno del punto dado.

Hallar: $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}\,\dfrac{\partial x(y,z)}{\partial y}\,\dfrac{\partial y(z,x)}{\partial z}$

12. Calcular las derivadas primera y segunda de una función $y = y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $f(x,y) = 0$, en los casos :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ 2. $f(x,y) = \text{Ln}\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} - \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

13. Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ funciones definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones $xy + uv = 1$, $xu + yv = 1$. Hallar $\partial^2 u / \partial x^2$.

14. Si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son las funciones definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + u + v = a \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = a^3 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(a,-a) = 0 \\ v(a,-a) = a \end{cases}$$

Hallar las diferenciales primeras y segundas de u y v en el punto $(x,y) = (a,-a)$.

15. Si es $z(x,y)$ la función definida implícitamente por : $z^3 + xz + y = 0$, $z(-2,1) = 1$ Hallar $dz(-2,1)$ y $d^2 z(-2,1)$

16. Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones $x^2 - xu - v^2 = 0$, $y^2 - yv - u^2 = 0$

Hallar expresiones para du , dv , d^2u , d^2v.

17. Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ las funciones definidas implícitamente por :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + u^2 + 2v^2 = 5 & u(0,1) = 2 \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = -4 & v(0,1) = -1 \end{cases}$$

Hallar du , dv , d^2u y d^2v en el punto $(x,y) = (0,1)$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \longrightarrow f(u,v)$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que la ecuación $f(x^2 - y^2 , y^2 - z^2) = 0$ define implícitamente a cierta función $z = z(x,y)$. Calcúlese la expresión :

$$E = yz\,\frac{\partial z}{\partial x} + zx\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

comprobando que no depende de f .

19. Considérese la transformación $(u,v) \longmapsto (x,y)$ definida por $x = ue^v$ e $y = ve^u$. Sea $(x,y) \longmapsto (u,v)$ la transformación inversa de la anterior tal que $u(1,0) = 1$ y $v(1,0) = 0$. Hallar las diferenciales primeras y segundas de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ en el punto $(x,y) = (1,0)$.

20. Considérese la transformación $(u,v) \longmapsto (x,y)$ definida por $x = u^v$ e $y = v^u$. Sea $(x,y) \longmapsto (u,v)$ la transformación inversa de la anterior tal que $u(1,2) = 1$ y $v(1,2) = 2$. Hallar $du(1,2)$ y $dv(1,2)$.

21. Sea $(\rho,\varphi,\theta) \longmapsto (x,y,z)$ la transformación que pasa de coordenadas esféricas a cartesianas rectangulares, esto es :

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

Hallar el jacobiano de J de (x,y,z) respecto de $(\rho\ ,\ \varphi\ ,\ \theta)$ y las derivadas parciales de las funciones $\rho(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ y $\theta(x,y,z)$ que determina la transformación inversa (calcúlense solamente $\partial\rho/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ y $\partial\theta/\partial x$).

22. Sean $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ y $w = w(x,y,z)$ tres funciones dadas, de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de un punto (x_0,y_0,z_0) , en el que es no nulo el jacobiano J de (u,v,w) respecto de (x,y,z). Si la inversa de la función $(x,y,z) \longmapsto (u,v,w)$, entorno de (x_0,y_0,z_0) , es $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, hallar las derivadas parciales de estas funciones en función de las derivadas parciales de las funciones dadas.

23. Para x, y, z positivos, considérense las siguientes u , v y w :

$u = y\,z\,f(x)$; $v = \operatorname{Ln}(x^2 y)$; $w = \operatorname{Ln} z$

donde f es una función positiva de clase $\mathcal{C}^1$. Hallar la expresión más general de f para la que entre u, v y w existe una relación funcional.

24. Hallar las relaciones que deben cumplirse entre a , b , c , d y e para que las siguientes funciones f y g sean dependientes :

$$f(x,y) = e^{x+2y} \quad , \quad g(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey$$

25. Analícese si las tres siguientes funciones, f , g y h pueden ser dependientes, en algún conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, para algunos valores no nulos de los parámetros a , b y c :

$f(x,y,z) = ax + by + cz$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $h(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$

RESPUESTAS:

01. Usar el Teorema de la función implícita con $n = 1$. La recta :

i) Está dada por:

$$0 = (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Para la recta

ii) El teorema nos dice que $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0)$.

02. a) Si $x < -\frac{1}{4}$ podemos despejar "y" en términos de x usando la fórmula cuadrática.

b) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 1$ no es cero para $\left\{ y / y < -\frac{1}{2} \right\}$ y $\left\{ y / y > -\frac{1}{2} \right\}$ y a la selección del signo en la fórmula cuadrática. La derivada $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2y+1}$ es negativa en la mitad superior de la parábola y positiva en la inferior.

03. Sea $F(x,y,z) = x^3 z^2 - z^3 yx$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 2x^3 z = 3z^2 yx \neq 0$ en $(1,1,1)$. Cerca del origen, con $x = y \neq 0$, obtenemos $z = 0$, $z = x$ de modo que no hay solución única. En $(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{4}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

04. Con $F_1 = y + x + uv$ y $F_2 = uxy + v$, el determinante en el teorema general de la función implícita es $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = v - uxy$, que es 0 en $(0,0,0,0)$. Así, no se aplica el teorema de la función implícita. Si tratamos en forma directa hallamos que $v = -uxy$, de modo que $x + y = u^2 xy$. Para una selección particular de (x,y) cerca de $(0,0)$ no hay soluciones para (u,v) o bien hay dos.

05. No. $f(x,y) = (-1 , 0)$ tiene infinidad de soluciones, a saber $(x,y) = (0,y)$ para cualquier y.

06. Sí existe, pues el jacobiano vale $2 \neq 0$.

$$du\,(x,y)\,(dx,dy) = \frac{-uydx + v\cos v dy}{xy + \operatorname{sen} u \cos v} \qquad dv\,(x,y)\,(dx,dy) = \frac{-u\operatorname{sen} u\,dx - xv\,dy}{xy + \operatorname{sen} u \cos v}$$

07. El jacobiano es $-4 \neq 0$, luego existen

$$du\,(1,1)\,(dx,dy) = -dx - dy \quad ; \quad dv\,(1,1)\,(dx,dy) = 0$$

$$d^2u\,(1,1)\,(dx,dy) = -dx\,dy \quad ; \quad d^2v\,(1,1)\,(dx,dy) = dx\,dy$$

08. 1

09. $dx\left(\frac{\pi}{2},0\right)(du,dv) = -\frac{1}{3}du - \frac{1}{2}dv \quad ; \quad dy\left(\frac{\pi}{2},0\right)(du,dv) = -\frac{2}{3}du - dv$

$$dz\left(\frac{\pi}{2},0\right)(du,dv) = du + \frac{3}{2}dv$$

10. $du\,(x,y)\,(dx,dy) = \frac{x-v}{v-u}dx + \frac{y-v}{v-u}dy \quad ; \quad dv\,(x,y)\,(dx,dy) = \frac{x-u}{v-u}dx + \frac{y-u}{v-u}dy$

11. -1

12. 1° $y'(x) = -\frac{b^2x}{a^2y}$, $y''(x) = -\frac{b^4x^2 + a^2b^2y^2}{a^4y^3}$

2° $y'(x) = \frac{x+y}{x-y}$, $y''(x) = \frac{2x^2 + 2y^2}{(x-y)^3}$

13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{u^2 - y^2}{(1-2ux)^3}(2u - 3u^2x - xy^2)$

14. $du\,(a, -a)\,(dx, dy) = 0$

$du\,(a, -a)\,(dx, dy) = -dx - dy$

$d^2u\,(a, -a)\,(dx, dy) = (4/a)\,dx^2$

$d^2v\,(a, -a)\,(dx, dy) = -(4/a)\,dx^2$

15. $dz\,(-2, 1)\,(dx, dy) = -dx - dy$

$d^2z\,(-2, 1)\,(dx, dy) = -4dx^2 - 10\,dx\,dy - 6\,dy^2$

16. $du = \left[(2x-u)\,y\,dx - (2y-v)\,v\,dy\right]\frac{1}{J}$

$dv = \left[(2y - v)\, x\, dx - (2x - u)\, u\, dy \right] \frac{1}{J}$

$d^2u = \frac{2}{J}\left[y(dx^2 - dxdu - dv^2) - 2v(dy^2 - dydv - du^2) \right]$

$d^2v = \frac{2}{J}\left[x(dy^2 - dydv - du^2) - 2u(dx^2 - dxdu - dv^2) \right]$

siendo : $J = xy - 4uv$

17. $du(0,1)(dx,dy) = \frac{1}{2}dy$; $dv(0,1)(dx,dy) = 0$

$d^2u(0,1)(dx,dy) = 6dx^2 + \frac{3}{2}dy^2$, $d^2v(0,1)(dx,dy) = 2dx^2$

18. $xf'_u - zz'_x f'_u = 0$, $-yf'_u + (y - zz'_y) f'_v = 0$; $E = xy$

19. $du(1,0)(dx, dy) = dx - dy$ $\quad d^2u(1,0)(dx, dy) = -2dx\,dy + 2dy^2$

$du(1,0)(dx, dy) = dy$ $\quad d^2v(1,0)(dx, dy) = 2dy^2$

20. $du(1,2)(dx, dy) = (1/2)\,dx$; $dv(1,2)(dx, dy) = -L\,2dx + dy$

21. $J = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$; $\partial\rho/\partial y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$

$\partial\varphi/\partial z = -\operatorname{sen}\varphi / \rho$, $\partial\theta / \partial x = -\operatorname{sen}\theta / (\rho \operatorname{sen}\varphi)$

22. $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J}\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial(w,u)}{\partial(y,z)}$, $\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{J}\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$ *(análogo resultado para las derivadas de y y de z)*.

23. $\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = f'(x) - \frac{2}{x}f(x) \equiv 0$; $\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv 2x$; $L\,f(x) \equiv L\,x^2 + k$; $f(x) = cx^2$

24. $c = 2b = 4a$ y $e = 2d$

25. No; el jacobiano es $cxy(x - y) + ayz(y - z) + bxz(z - x)$, que no se anula en ningún abierto en $\mathbb{R}^3$

Otros problemas:

1. Hallar los máximos y mínimos de $f(x,y,z) = z^2 - 2xy$ cuando (x,y,z) recorre la superficie de ecuación $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$.
2. Hallar los extremos relativos de la función $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z) = xz + yz$ condicionados por las dos ligaduras siguientes:
$\varphi(x,y,z) = x^3 - y^3 - 4z - 4 = 0$; $\psi(x,y,z) \equiv x + y + z^2 - 3 = 0$

3. Dada la función $f: C \longrightarrow IR$ definido por $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ y con dominio $C = \{(x,y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$. Hallar los extremos absolutos de f en C.
4. Halle el punto de la curva intersección del plano $x + 2y + z = 10$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está más próximo al origen.
5. Hallar los puntos de extremo condicionado para las siguientes funciones :
   a) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, si $x - y = \frac{\pi}{4}$
   b) $\mu = xyz$, si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.
   c) $\mu = xy + yz$, si $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ $\quad (x > 0 , y > 0 , z > 0)$
   d) $\mu = \text{sen } x \text{ sen } y \text{ sen } z$, si $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ $\quad (x > 0 , y > 0 , z > 0)$

Respuesta:

1. Los puntos estacionarios son : $(x,y,z;\lambda) = (1,1,0;1/3)$; $\left(-1,-1,2;-\frac{1}{3}\right)$.
   La condición suficiente cumple : $d\varphi(1,1,0)\,(dx, dy, dz) = 6dx + 6dy$,
   $d^2F(1,1,0)\,(dx, -dy, dz) = 12dx^2 + 2dz^2$
   En el segundo punto, cumple: $d^2F(-1,-1,2)\left(dx, dy, -\frac{1}{2}(dx + dy)\right) = \frac{7}{2}dx^2 + \frac{7}{2}dy^2 - 5dx\,dy$
   que es definida positiva.
2. $(x,y,z;\lambda,\mu) = (2,0,1;0,-1)$, $dz = 3dx$, $dy = -7dx$,
   $d^2F(2,0,1)(dx, -7dx, 3dx) = -54\,dx^2$, que es definida **NEGATIVA.**
3. **a)** extremos relativos en el interior de $C: (0,0)$, $(-1,-1)$; máximo relativo es $f(-1,-1) = 1$; b) extremos relativos de f condicionado: $(x,y;\lambda) = (2,2;-9/4)$; $(-2,-2;3/4)$; $(-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}; 9/2)$; $(-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}; 9/2)$. Condiciones suficientes se aplican en $d^2F(x,y)\,(dx, dy) = (6x + 2\lambda)\,dx^2 + 6dx\,dy + (6y + 2\lambda)dy^2$, $d\varphi(x,y)\,(dx, dy) = 2x\,dx + 2y\,dy$, el máximo es 28, el mínimo es –26.
4. $(1,2,5)$, $(-2,-4,20)$; la distancia mínima es $\sqrt{30}$.
5. **a)** Extremo $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^k$ para $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{8}, -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right)$, $k = 0, \pm1, \pm2 \ldots$; máximo si k es par, y mínimo si k es impar.
   b) mínimo $\mu = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$ en:
   $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$; $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$; $(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$;
   máximo $\mu = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ en:
   $(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$; $(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$; $(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$.
   c) $(1,1,1)$, $\mu = 2$; **d)** $(\pi/6, \pi/6, \pi/6)$, $\mu = \frac{1}{8}$

CAPÍTULO 8

INTEGRALES DOBLES

8.0 INTRODUCCIÓN

Recordemos que para hallar las integrales definidas de una función $y = f(x)$, era requisito necesario que f sea continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$.

Ahora, para hallar la integral doble de una función $z = f(x,y)$; es necesario que $f(x,y)$ sea continua sobre una región cerrada $D \subset \mathbb{R}^2$,

REGIÓN EN $\mathbb{R}^2$

***Definición* 1**

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que D es una región, si es la unión de un conjunto abierto conexo con algunos, ninguno o todos sus puntos de frontera.

Definición de Conjunto Conexo

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que D es conexo, si no existen dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}^2$ no nulos tales que $A \cap B = \phi$ y $A \cup B = D$.

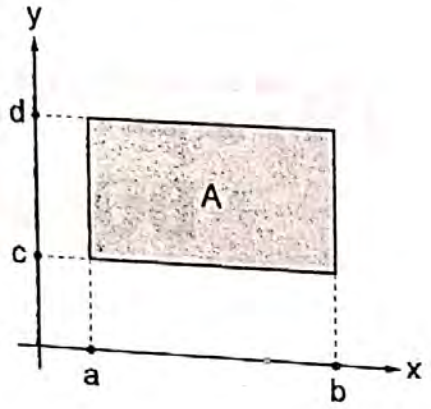
Intuitivamente el conjunto conexo es aquel que está "hecho de una sola pieza".

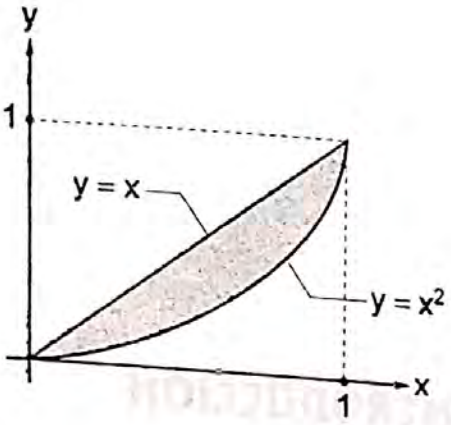
Ejemplos de Regiones en $\mathbb{R}^2$:

1) $A = [a,b] \times [c,d] = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b \ , \ c \le y \le d \}$ es una región cerrada en $\mathbb{R}^2$.

2) $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq x \ , \ 0 \leq x \leq 1 \}$ es otra región cerrada en $\mathbb{R}^2$.

Sus respectivos gráficos, son:





8.1 INTEGRAL DOBLE SOBRE UN RECTÁNGULO

Sea la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde la región D
$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$

es el rectángulo $D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d \}$ *(ver fig. 2)*

Si la función f es continua sobre la región D, deseamos definir la integral doble de la función f sobre la región D, denotado por $\iint_D f(x,y)\, dA$, donde $dA = dx\, dy$ o $dA = dy\, dx$ es el diferencial de área.

Procedemos del siguiente modo:

Paso 1

Consideremos dos particiones P_1 y P_2 de [a,b] y [c,d], respectivamente, $P_1 = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y $P_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ donde $a = x_0 < x, \ldots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots \ y_n = d$.

Definición 2

Una partición del rectángulo D, es el conjunto

$P_1 \times P_2 = \{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] / 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n \}$

Puesto que P_1 descompone $[a,b]$ en m subintervalos y P_2 descompone $[c,d]$ en n subintervalos, la partición $P = P_1 \times P_2$ descompone D en mn subrectángulos (*ver fig. 2*).

Una partición P' de D se llama más fina que P si $P \subset P'$, esto es, si todo punto de P pertenece también a P' .

Paso 2

De cada subrectángulo $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1,2, \ldots\ldots, m$, $j = 1,2, \ldots\ldots, n$

$\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x_i}$ $\quad$ $\underbrace{y_j - y_{j-1}}_{\Delta y_j}$

$\underbrace{\Delta x_i}_{dx}$ $\quad$ $\underbrace{\Delta y_j}_{dy}$

elegimos un punto arbitrario $(x_k^*, y_k^*) \in D_{ij}$, $k = 1, 2, \ldots\ldots, N$

Habrán $N = mn$ rectángulos y $N = mn$ puntos $(x_k^*, y_k^*) \in D_{ij}$

A continuación necesitamos conocer cuatro cosas:

- Llamemos $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N$ a los subrectángulos D_{ij} y $A(r_k) = (\Delta x_i)(\Delta y_j) = dx\, dy = dA$ el área del subrectángulo r_k .
- $f(x_k^*, y_k^*)$ es la imagen de cada punto (x_k^*, y_k^*) .
- Se define la NORMA $\|P\|$ de la partición $P = P_1 \times P_2$ como la longitud de la diagonal más larga de los subrectángulos, esto es; $\|P\| = \text{máx}\,\{\text{diag}\,(D_{ij}) / 1 \le i \le m\,,\, 1 \le j \le n\}$

  Si la partición P la hacemos cada vez más fina, esto es, aumentamos más rectángulos (infinidad de rectángulos) entonces la norma $\|P\|$ será cada vez más pequeña. En términos de límite es: si $N \to +\infty$ entonces $\|P\| \to 0$.
- La suma $\sum_{k}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k)$, se llama suma de Riemann de la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ asociado a la partición P.

Paso 3

Cuando la norma de la partición P tiende a cero ($\|P\| \to 0$), se puede plantear la existencia del límite:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k)$$

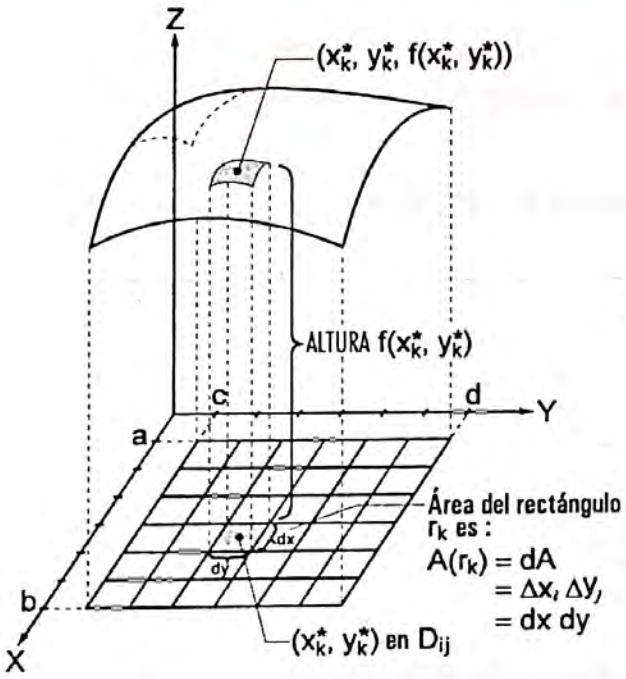


Fig. 1

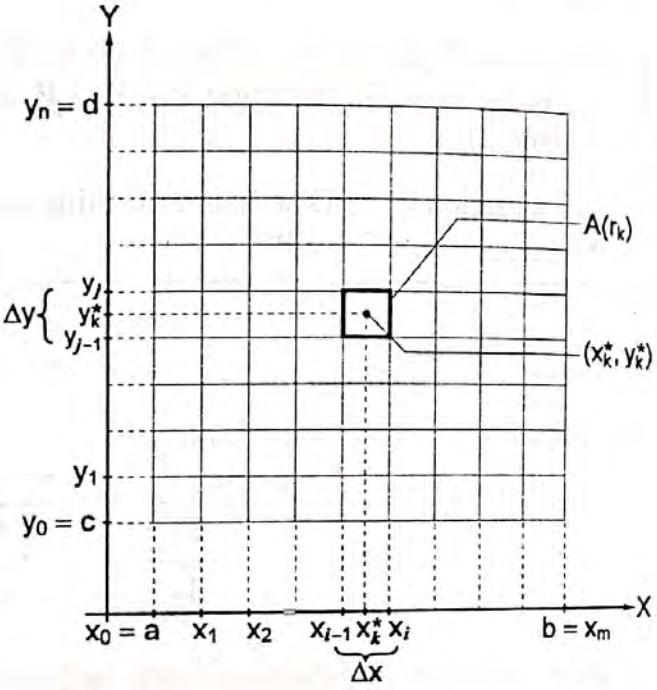


Fig. 2

Definición de Integral Doble

Si $f(x,y)$ está definido sobre el rectángulo $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces la integral doble de f sobre D se define como:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{K=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k)$$

siempre y cuando exista ese limite. Si existe, decimos que f es integrable sobre D.

8.2 FUNCIÓN ACOTADA

Definición 3

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es acotada en la región D si existen dos números reales r y s tales que $r \leq f(x,y) \leq s$; $\forall\, (x,y) \in D$.

8.3 LÍMITE DE LA SUMA DE RIEMANN SOBRE UNA REGIÓN CERRADA D

Definición 4

Sea $f: D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ una función acotada definida en la región cerrada D. Un número I es el límite de la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k)$ donde $\|P\| \to 0$, esto es,

$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k) = I$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left| \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k) - I \right| < \varepsilon$, para toda partición P con $\|P\| < \delta$ y toda elección del punto $(x_k^*, y_k^*) \in r_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

8.4 INTEGRAL DOBLE DE UNA FUNCIÓN ACOTADA DEFINIDA SOBRE UNA REGIÓN CERRADA D.

Definición 5

Una función acotada $f: D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ es integrable sobre la región cerrada D, si existe el número real I, tal que $I = \lim_{\|R\|\to 0} \sum_{K=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k)$.

El número real I se llama la INTEGRAL DOBLE DE f sobre D y se escribe como:

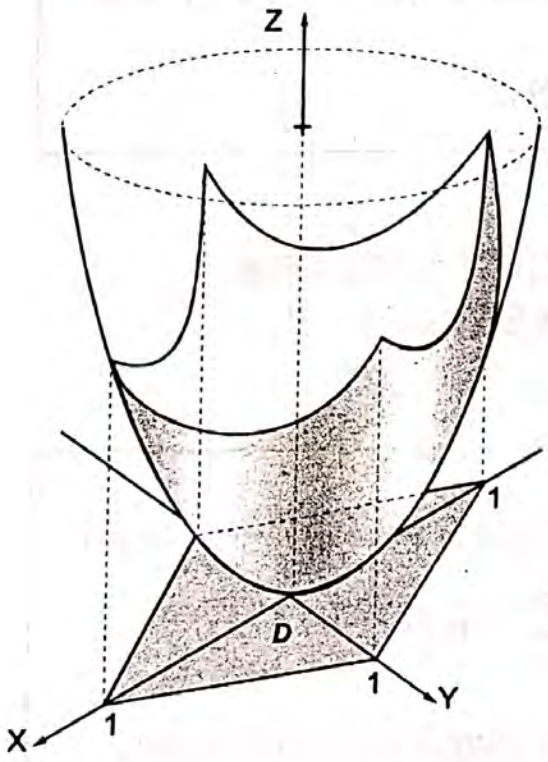
$$I = \iint_D f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\, A(r_k)$$

8.5 INTERPRETACIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE COMO VOLUMEN

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en la región cerrada D, y que $f(x,y) \geq 0$, $\forall\ (x,y) \in D$ entonces $\iint_D f(x,y)\,dA =$ volumen del sólido Q bajo la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$ y que tiene como base la región cerrada D.

EJEMPLO 1

Halle el volumen bajo la gráfica de la superficie $z = x^2 + y^2$ sobre la región $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 , |y| \leq 1 \}$

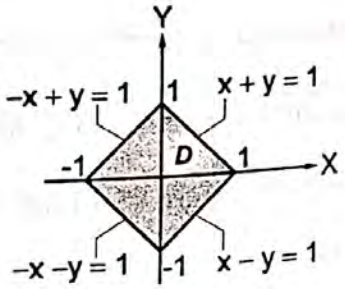


Solución:

$$V(Q) = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA$$

Volumen del sólido Q

$$= 4\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

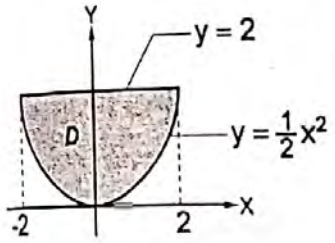


8.6 INTEGRALES ITERADAS

El cálculo de la integral doble $\iint_D f(x,y)\,dA$ se hace por cálculos sucesivos de dos integrales: primero se integra con respecto a una variable y luego se integra el resultado

con respecto a la otra variable. Normalmente, cuando se hace esta integración parcial sucesiva, se opera de dentro hacia fuera, como se indica en la notación siguiente:

a) $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

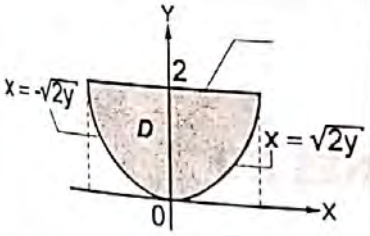


La primera integral es respecto a **y**.
En este caso, se barre la región D verticalmente, mirando que hacia arriba tenga como frontera una curva que es la gráfica de una función $y = g(x)$ y hacia abajo otra curva $y = f(x)$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$$

La segunda integral es respecto a x, en este caso $a \le x \le b$,

b) $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{j(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$



La primera integral se integra primero respecto a x. En este caso, se barre la región D horizontalmente, mirando que hacia la derecha tenga como frontera una curva que es la gráfica de una función $x = h(y)$ y a la izquierda otra curva $x = j(y)$

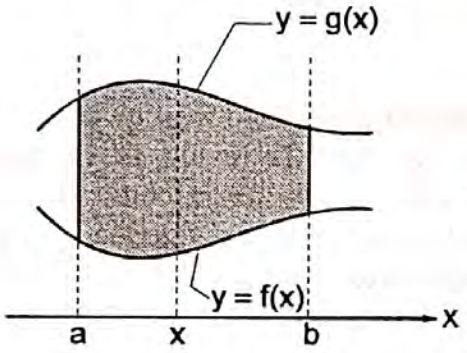
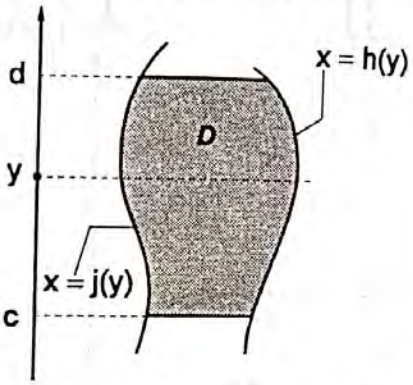
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

La segunda integral es respecto a y, en este caso $c \le y \le d$,

8.7 TEOREMA

Si una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en la región cerrada D, entonces f es integrable en D

8.8 REGIONES NO RECTANGULARES: Región tipo I y región tipo II

Región tipo I (banda vertical)	Región tipo II (banda horizontal)
	
Una región de tipo I, es aquella que está definida del siguiente modo: $D = \{ (x,y) \in R^2 / f(x) \le y \le g(x) , a \le x \le b \}$ Para "x" fijo entre las dos constantes a y b, la ordenada "y" varía de f(x) a g(x), donde f y g son funciones continuas sobre [a,b].	Una región D de tipo II, es aquella que está definida del siguiente modo: $D = \{(x,y) \in R^2 / j(y) \le x \le h(y) , c \le y \le d\}$ Para "y" fijo entre las constantes c y d, la abscisa "x" varía de j(y) a h(y), donde j y h son funciones continuas sobre [c,d].

8.9 TEOREMA DE FUBINE PARA REGIONES NO RECTANGULARES

- Si D es una región de tipo I, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$, siempre y cuando existan las dos integrales.

- Si D es una región de tipo II, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{j(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

8.10 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DOBLE

P_1 : Regla de la Linealidad

Sean : a y b dos constantes y $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en la región cerrada D, entonces $af + bg$ es integrable en la región D, y

$$\iint_D [af(x,y) \pm bg(x,y)]\, dA = a \iint_D f(x,y)\, dA \pm b \iint_D g(x,y)\, dA$$

P_2 : Regla de la Dominación

Si las funciones $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables en la región cerrada D y $g(x,y) \leq f(x,y)$, $\forall\, (x,y) \in D$, entonces:

$$\iint_D g(x,y)\, dA \leq \iint_D f(x,y)\, dA$$

P_3 : Regla de la subdivisión

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en la región cerrada D si la región $D = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 son regiones cerradas y disjuntas, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA$$

P_4 :

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en la región cerrada D, y supongamos que m y M son los valores mínimo y máximo absoluto de f en D, tal que $m \leq f(x,y) \leq M$, $\forall\, (x,y) \in D$.

Entonces $m\, A(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq M\, A(D)$

donde A(D) es el área de la región cerrada D.

8.11 INVERSIÓN DEL ORDEN DE INTEGRACIÓN EN UNA INTEGRAL DOBLE

Es útil a veces invertir el orden de integración en una integral iterada, porque facilita el cálculo y la hace más breve.

EJEMPLO 2

Calcular $\int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x}^{2} e^{y^2}\, dy\, dx$

Solución:

La primera integral, que es respecto a "y", no se puede calcular, porque la función e^{y^2} no tiene una primitiva elemental.

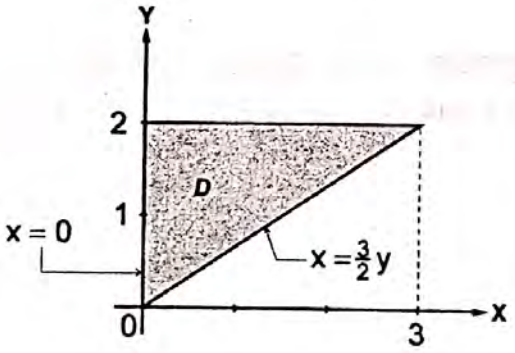
Conviene invertir el orden de integración, para ello grafiquemos la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \tfrac{2}{3}x \le y \le 2 \ , \ 0 \le x \le 3\}$$

Las fronteras son: $\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Invirtiendo el orden de integración, obtenemos:

$$\iint_D e^{y^2}\, dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}y} e^{y^2}\, dx\, dy$$



$$= \int_0^2 e^{y^2} \left[x \right]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}y} dy$$

$$= \int_0^2 e^{y^2} \tfrac{3}{2} y\, dy = \tfrac{3}{2} \int_0^2 y\, e^{y^2} dy$$

$$= \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} e^{y^2} \Big]_{y=0}^{y=2} = \tfrac{3}{4}[e^4 - 1]$$

8.12 CÁLCULO DE VOLUMENES DE SÓLIDOS Y ÁREAS DE REGIONES PLANAS POR INTEGRACIÓN DOBLE

Bajo ciertas condiciones y mediante integrales dobles podemos hallar el volumen de un sólido Q en $\mathbb{R}^3$ y el área de una región $D \subset \mathbb{R}^2$.

1. Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en la región cerrada D y $f(x,y) \geq 0$; $\forall (x,y) \in D$, entonces el volumen del sólido S limitado superiormente por la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$ e inferiormente por la región D está dada por:

$$V(S) = \iint_D f(x,y)\, dA$$

2. Sean $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continua en la región cerrada D y $f(x,y) \geq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$. Entonces el volumen del sólido S, limitado superiormente por la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$ e inferiormente por la gráfica de la superficie $z = g(x,y)$, está dada por:

$$V(S) = \iint_D [f(x,y) - g(x,y)]\, dA$$

Nota: Aquí, el sólido se proyecta sobre el plano XY.

3. Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en la región cerrada D, tal que, $f(x,y) = 1$; $\forall (x,y) \in D$. Entonces el área de la región D está dado por:

$$A(D) = \iint_D dA$$

EJEMPLO 3

Dadas la suma de integrales:

$$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{4y+4}}^{\sqrt{4y+4}} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{0}^{8} \int_{-\sqrt{4y+4}}^{2-y} f(x,y)\, dx\, dy$$

a) Construir la región de integración
b) Expresar la suma de integrales como una sola integral

c) Calcular el valor de la integral hallada en b) para la función $f(x,y) = e^{36x - 6x^2 - x^3}$

Solución de a)

- La región sobre la cual está definida la primera integral es:

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -\sqrt{4y+4} \le x \le \sqrt{4y+4} \ , \ -1 \le y \le 0 \}$$

Sus fronteras son: $\begin{cases} x = -\sqrt{4y+4} \\ x = \sqrt{4y+4} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4(y+1)$ $\quad \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

Parábola de vértice v(0,−1), eje focal, paralelo al eje y.
$4p = 4 \Rightarrow p = 1$

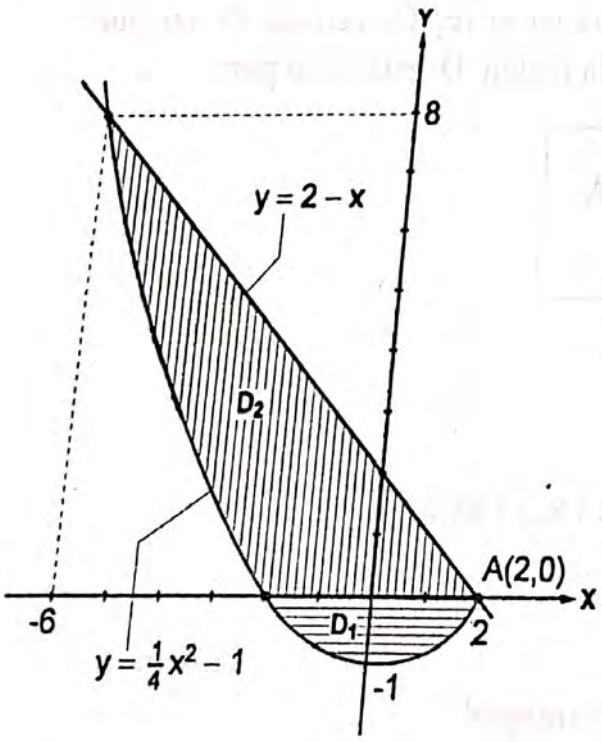
- La región sobre la cual está definido la segunda integral es:

$$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -\sqrt{4y+4} \le x \le 2 - y \ , \ 0 \le y \le 8 \}$$

Las fronteras son:

$\begin{cases} x = -\sqrt{4y+4} \longleftarrow \text{Parábola} \\ x = 2 - y \longleftarrow \text{Recta} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 8 \end{cases}$

- La construcción de la región de integración es:



Solución de b)

Al unir las regiones $D_2 \cup D_1 = D$, la suma de integrales como una sola integral es :

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_{-6}^{2} \underbrace{\int_{\frac{1}{4}x^2 - 1}^{2-x} f(x,y)\, dy\, dx}_{\text{Barre verticalmente la región D}}$$

Notas:

1) Cuando se empieza a "barrer verticalmente" la región D, la primera integral es respecto a y. En este problema para cualquier x variando entre –6 y 2 $(-6 \le x \le 2)$ se tendrá arriba la función $y = 2 - x$ y abajo la función $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$, lo cual implica que con una sola *INTEGRAL DOBLE* bastará hacer el cálculo respectivo.

2) Cuando se empieza a "barrer horizontalmente" la primera integral es respecto a x. En este caso, para cualquier "y" variando entre –1 y 8 $(-1 \le y \le 8)$ notaremos que la esquina A (2,0) hace que la recta horizontal y = 0 (eje x) divide a la región en dos subregiones D_1 y D_2. Esto motiva que haya la suma de dos *INTEGRALES DOBLES*, esto es:

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3) Las "esquinas" que son puntos de intersección de dos curvas o rectas son las causantes que hayan la suma de dos o más *INTEGRALES DOBLES*.

Solución de c)

Se pide calcular $\int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{\sqrt{4y+4}} e^{36x-6x^2-x^3}\,dy\,dx =$

$$= \int_{-6}^{2} (2 - x - \tfrac{1}{4}x^2 + 1)\, e^{36x-6x^2-x^3}\,dx \text{ , haciendo } \mu = 36x - 6x^2 - x^3 \text{ se obtiene :}$$

$$= \frac{1}{12} \int_{-216}^{40} e^{u}\,du = \frac{1}{12}(e^{40} - e^{-216}).$$

EJEMPLO 4

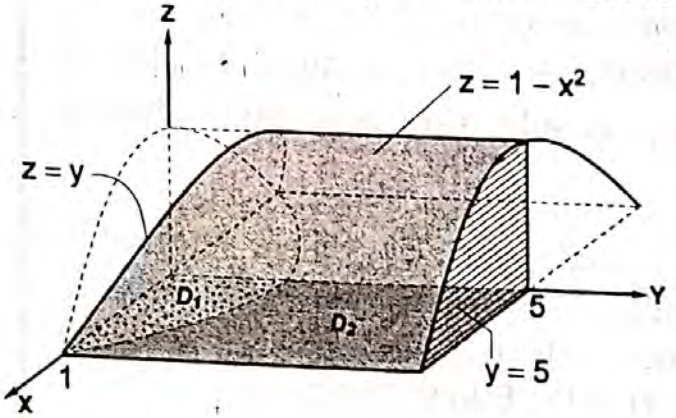
Hallar el volumen del sólido que está limitado por las superficies:
$z = 1 - x^2$, $y = z$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 5$

Solución:

Se pide hallar el volumen de un sólido S, mediante la fórmula: $V(S) = \iint_D (\text{TECHO} - \text{PISO})\,dA$. Si D es la proyección del sólido S sobre el plano XY, entonces el TECHO y el PISO son funciones de la forma: $z = f(x,y)$ y $z = g(x,y)$.

Paso 1

Graficar las superficies que limitan al sólido S



a) $z = 1 - x^2$ (es un cilindro parabólico)

b) $y = z$ (es un plano que pasa por el origen y es perpendicular al plano YZ)

c) $x = 0$ (plano YZ)

d) $z = 0$ (plano XY)

e) $y = 5$ (Plano paralelo al plano XZ)

Paso 2

Recomendaciones para hallar el volumen de un sólido que se proyecta sobre el plano XY:

1° Identificar la ecuación o ecuaciones del techo. En este caso, hay dos techos: $z = y$ y $z = 1 - x^2$.

2° Identificar el "piso", en este caso el piso para ambos techos es $z = 0$ (plano XY)

3° Identificar la región D, que es la proyección del sólido sobre el plano XY. En este caso la región D es la unión de dos subregiones: $D = D_1 \cup D_2$, donde

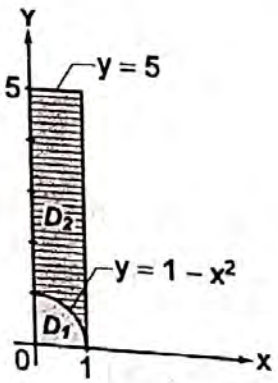
$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le y \le 1 - x^2 \ , \ 0 \le x \le 1 \}$,

$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x^2 \le y \le 5 \ , \ 0 \le x \le 1 \}$

donde: D_1 es la proyección de $z = y$ sobre el plano XY,
D_2 es la proyección de $z = 1 - x^2$ sobre el plano XY.

4° Graficar la región $D_1 \cup D_2$ (proyección del sólido sobre el **plano XY)**

En $z = 1 - x^2$, si $z = y$, se obtiene la parábola $y = 1 - x^2$ (parábola en el plano XY)



Paso 3 El volumen del sólido S es:

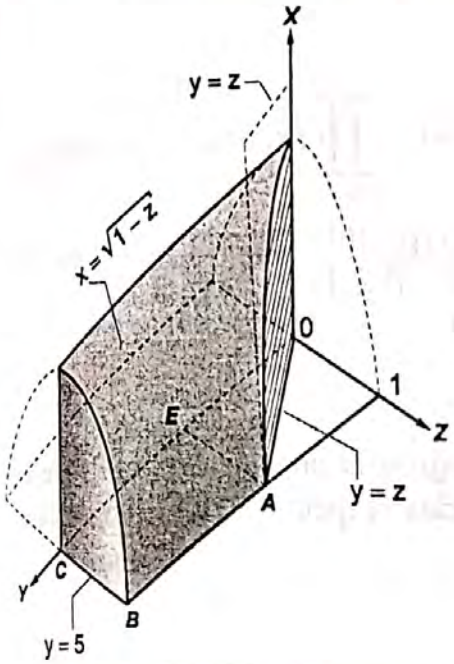
$$V(S) = \iint_{D_1} [\text{TECHO} - \text{PISO}]\, dA + \iint_{D_2} [\text{TECHO} - \text{PISO}]\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} [y - 0]\, dy\, dx + \int_0^1 \int_{1-x^2}^5 [(1-x^2) - 0]\, dy\, dx$$

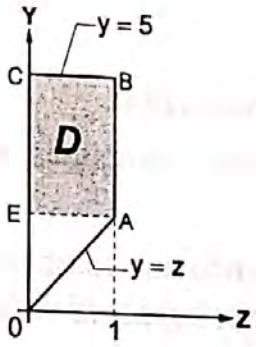
$$= \frac{4}{15} + \frac{14}{5}$$

$$= \frac{46}{15}$$

Método 2: Proyectando el sólido sobre el plano YZ:



Al proyectar el sólido S sobre el plano YZ, se obtiene la región D.



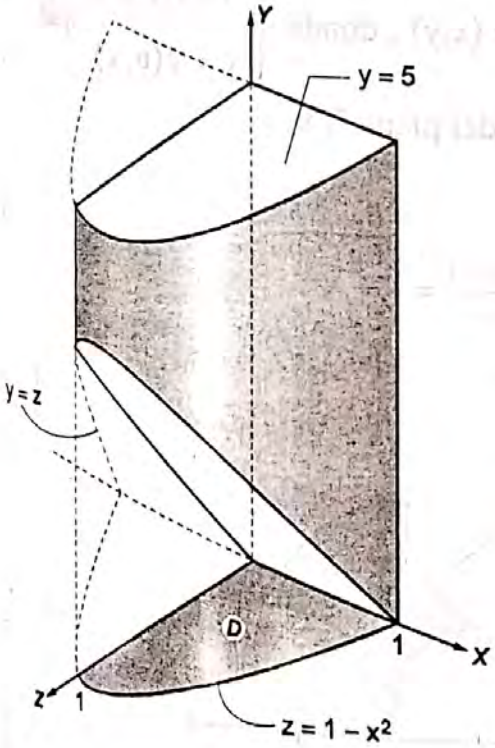
- El volumen del sólido S, es:

$$V(S) = \iint_D [\text{TECHO} - \text{PISO}]\, dA$$

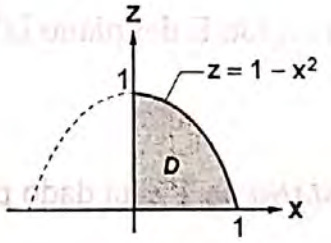
$$V(S) = \int_0^1 \int_Z^5 \sqrt{1 - Z}\, dy\, dz$$

$$= \frac{46}{15}$$

Método 3: Proyectando el sólido sobre el plano XZ:



El proyectar el sólido S sobre el plano XZ, se obtiene la región D



- El volumen del sólido S, es:

$$V(S) = \iint_D dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (5 - z)\, dz\, dx$$

$$= \frac{46}{15}$$

8.13 JACOBIANOS: CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES

Introducción:

Algunas integrales dobles sobre una región $D \subset \mathbb{R}^2$: $\iint_D f(x,y)\,dA$, se calculan haciendo un cambio de variables. Pero esto, sólo es posible cuando se define una *TRANSFORMACIÓN* (función) T, tal que $T: E \longrightarrow D$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$(u,v) \longmapsto (x,y)$$

donde T es inyectiva, continua y diferenciable.

Geométricmente, la transformación T "deforma" la región D en otra región E, que es más sencilla, sobre la cual las nuevas integrales iteradas respecto a (u,v) son de fácil cálculo.

8.13.1 JACOBIANO DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

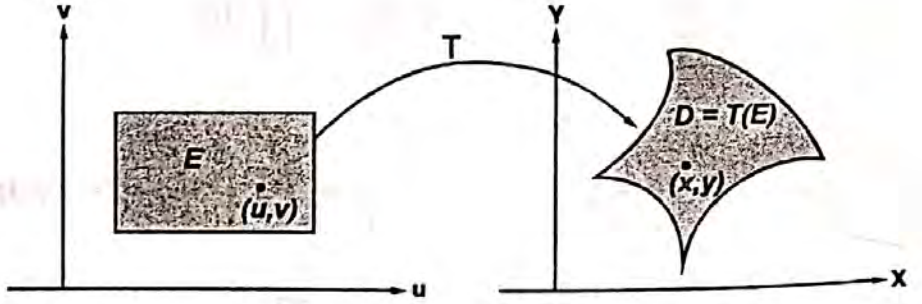
Definición

Sea $T: E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ una función (transformación) biunívoca,

$$(u,v) \longmapsto (x(u,v),y(u,v))$$

continua y diferenciable, definida por $T(u,v) = (x,y)$, donde $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ que lleva una región E del plano UV en la región D del plano XY.

El *JACOBIANO* de T está dado por $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$



EJEMPLO 1

Sea la transformación $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\begin{cases} u = xy \\ v = x - yx \end{cases}$

a) Hallar $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

b) Hallar $J(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

c) ¿Qué relación hay entre los resultados obtenidos en a) y b)

Solución:

a) De las ecuaciones $\begin{cases} \mu = xy \\ v = x - yx \end{cases}$

se despejan x, y: $\begin{cases} x = \mu + v \\ y = \dfrac{u}{u+v} \end{cases}$

Entonces $J(\mu,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{v}{(\mu+v)^2} & -\dfrac{\mu}{(\mu+v)^2} \end{vmatrix} = \dfrac{-1}{\mu+v}$

b) De las ecuaciones $\begin{cases} \mu = xy \\ v = x - yx \end{cases}$

se obtiene: $J(x,y) = \dfrac{\partial(\mu,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} & \dfrac{\partial \mu}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -xy - x(1-y) = -x$

c) En a) se obtuvo $J(\mu,v) = -\dfrac{1}{\mu+v}$

En b) se obtuvo $J(x,y) = -x$

Como $x = \mu + v$, entonces $J(x,y) = -(\mu+v)$

Se puede apreciar que $J(\mu,v)$ y $J(x,y)$ son inversos. Este resultado era de esperarse porque la *TRANSFORMACIÓN* T es inyectiva. Resumamos este resultado en la siguiente proposición.

8.13.2 JACOBIANO DE LA INVERSA DE T

Proposición

Sea $T : E \longrightarrow D$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ una transformación de E sobre D.
$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

Sea $T^{-1} : D \longrightarrow E$, la inversa de T.
$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$

Si $J(\mu,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ es el *JACOBIANO* de T, entonces

$J(x,y) = \dfrac{1}{J(\mu,v)}$ es el *JACOBIANO* de T^{-1}

Observaciones

1. Dado la función $T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, E conjunto abierto y $\vec{a} \in D$.
$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

Se llama matriz jacobiana de f en $\vec{a}$, (denotado por $JT(\vec{a})$ a la matriz cuadrada de orden 2 : $JT(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$.

A la determinante $J(\mu,y) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ se le llama el *JACOBIANO* del cambio de las variables $\{x,y\}$ a las variables $\{u,v\}$.

2. Si $T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, es una función biunívoca, la imagen de E mediante
$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

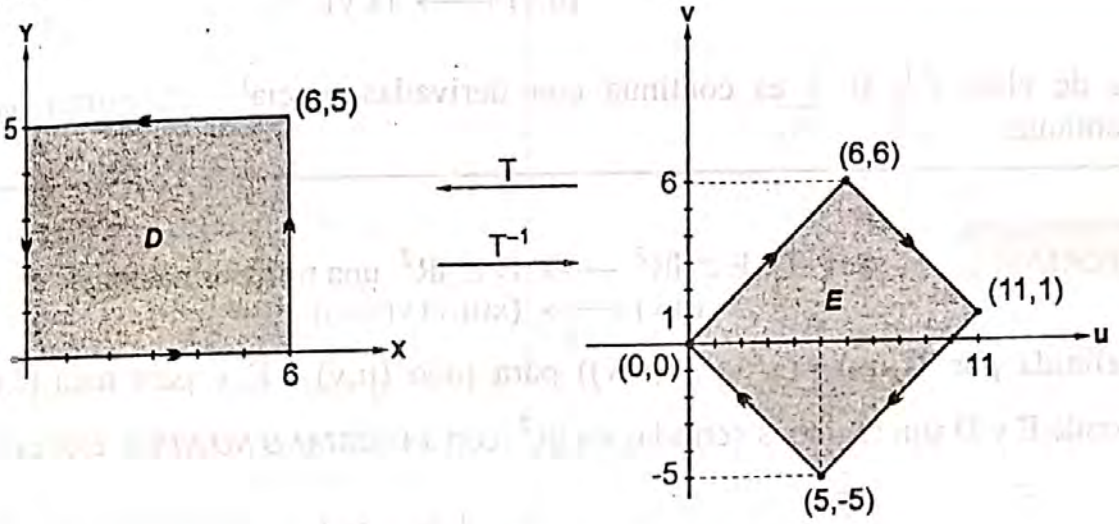
T es; $D = T(E)$

La imagen de la región D mediante T^{-1} es $E = T^{-1}(D)$.

EJEMPLO 2

Dibuje la imagen E en el plano UV mediante la transformación $\begin{cases} \mu = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, si el gráfico de la región D en el plano XY es:

Solución:



Hacer la correspondencia biunívoca, del siguiente modo:

$$(x,y) \longrightarrow (x+y,\ x-y)$$
$$(0,0) \longrightarrow (0+0,\ 0-0) = (0,0)$$
$$(6,0) \longrightarrow (6+0,\ 6-0) = (6,6)$$
$$(6,5) \longrightarrow (11,1)$$
$$(0,5) \longrightarrow (5,-5)$$

Nota:

Cuando la transformación es lineal, como el ejemplo 2, bastará tabular las esquina de la región D.

Pero si la transformación, no es lineal, como por ejemplo $\begin{cases} \mu = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

entonces no se puede proceder como el ejemplo 2.

8.13.3 TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES

Definición

Se dice que la transformación $T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, $(u,v) \longmapsto (x,y)$

es de clase C^1, si T es continua con derivadas parciales de primer orden continuas.

TEOREMA 1 Sea $T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, $(u,v) \longmapsto (x(u,v),y(u,v))$ una transformación de clase C^1, definida por $T(\mu,v) = (x(\mu,v),y(\mu,v))$ para todo $(\mu,v) \in E$ y para todo $(x,y) \in D$, donde E y D son regiones cerradas en $\mathbb{R}^2$ con *JACOBIANO NO NULO*, esto es :

$$J(\mu,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en D, entonces la función $f \circ T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre el conjunto E y

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_E f\big(x(\mu,v), y(\mu,v)\big)\,\big|J(\mu,v)\big|\,d\mu\,dv$$

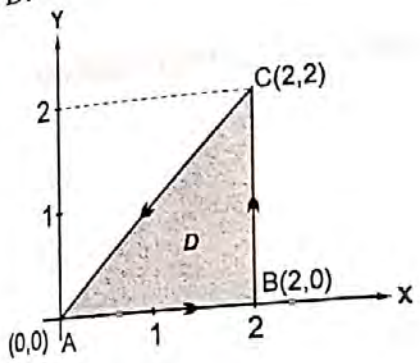
EJEMPLO 3

Calcular $\iint_D \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2+2(x+y)+1}}\,dA$, donde la región D es el triángulo cuyos vértices son A (0,0), B (2,0) y C (2,2)

Solución:

Paso 1

En primer lugar, debemos graficar la región D.



Paso 2

Como la función f(x,y) no tiene primitiva (antiderivada) y aparecen los términos (x - y) y (x + y), es conveniente hacer la siguiente transformación:

$$T:\begin{cases}\mu = x - y\\ v = x + y\end{cases}$$

La imagen de la región D, la podemos graficar haciendo la siguiente correspondencia biunívoca:

$$\begin{array}{ccc}(x,y) & \longrightarrow & (\mu\ ,\ v)\\ (0,0) & \longrightarrow & (0\ ,\ 0)\\ (2,0) & \longrightarrow & (2\ ,\ 2)\\ (2,2) & \longrightarrow & (0\ ,\ 4)\\ (0,0) & \longrightarrow & (0\ ,\ 0)\end{array}$$

Así obtenemos el gráfico de la nueva región E = T(D).

Paso 3

Para integrar sobre la nueva región E se necesita el *JACOBIANO* J(μ,v).

Para ello, despejamos x e y del sistema

$$\begin{cases}\mu = x - y\\ v = x + y\end{cases}$$

$$\mu + v = 2x$$

$$\begin{cases}x = \frac{1}{2}(\mu + y)\\ y = \frac{1}{2}(v - \mu)\end{cases}$$

Luego:

$$J(\mu, v) = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Paso 4

La nueva integral doble es :

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_D f(x(\mu,v), y(\mu,v))\,|J(\mu,v)|\,dv d\mu$$

$$= \int_0^2 \int_\mu^{4-\mu} \frac{1}{\sqrt{\mu^2+2v+1}} \frac{1}{2}\, dv\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\int_\mu^{4-\mu} (\mu^2+2v+1)^{-1/2}\, dv\right] d\mu$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}\,2(\mu^2+2v+1)^{1/2}\right]_{v=\mu}^{v=4-\mu} d\mu$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\sqrt{\mu^2-2\mu+9} - (\mu+1)\right] d\mu$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\sqrt{(\mu-1)^2+8} - (\mu+1)\right] d\mu$$

(VER TABLA)

$$= \frac{3}{2} + 2\,\text{Ln}\,2\,.$$

EJEMPLO 4

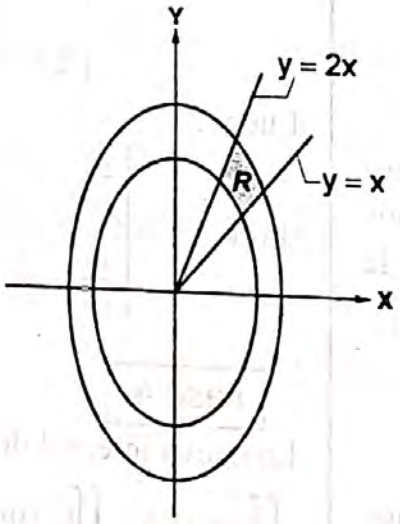
Calcular $I = \iint_R \left(\frac{y^2}{x^2} + 2 \right)^2 e^{\left(\frac{2y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \right)} dx\, dy$, donde R es la región, limitada por

$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y = x$, $y = 2x$ y situada en el primer cuadrante.

Solución:

Paso 1

En primer lugar, graficar la región R.



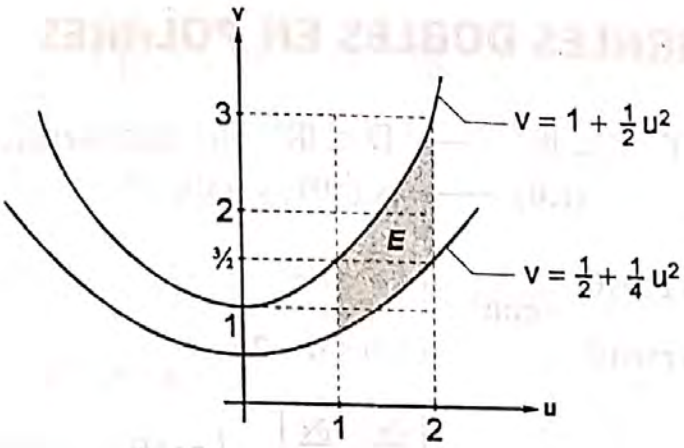
Paso 2

Directamente, no se puede integrar, conviene hacer el siguiente arreglo

$$\text{En} \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \quad \text{hacer } \frac{y}{x} = \mu \begin{cases} \mu = 1 \\ \mu = 2 \end{cases} \Big\rangle \text{ son rectas verticales en el sistema UV}$$

$$\text{En} \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} & \ldots\ldots \text{ se ha multiplicado por } \frac{1}{x^2} \\ x^2 + \frac{y^2}{2} = 2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = 2\frac{1}{x^2} & \ldots\ldots \text{ se ha multiplicado por } \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\text{Hacer } \frac{1}{x^2} = v \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\mu^2 = v \Leftrightarrow \mu^2 = 2(v-1) \\ 1 + \frac{1}{2}\mu^2 = 2v \Leftrightarrow \mu^2 = 4\left(v - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Big\rangle \text{ son parábolas en UV.}$$



Paso 3

Para integrar sobre la región E necesitamos el Jacobiano J (μ,v).

De $\begin{cases} \mu = \frac{y}{x} \\ v = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ podemos hallar el jacobiano

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow J(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{x^4} = 2v^2$$

Entonces, $J(\mu,v)$ es la inversa de $J(x,y)$, esto es, $J(\mu,v) = \frac{1}{2v^2}$

Para integrar, se necesita el valor absoluto de $J(\mu,v)$, esto es $|J(\mu,y)| = \frac{1}{2v^2}$

Paso 4

Luego, se tendrá:

$$I = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E (\mu^2+2)^2\, e^{\left(2\mu+\frac{1}{3}\mu^3\right)} \frac{1}{2v^2}\,d\mu\,dv$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mu^2}^{1+\frac{1}{2}\mu^2} v^{-2}dv\,(\mu^2+2)^2\, e^{\left(2\mu+\frac{1}{3}\mu^3\right)} d\mu = e^{20/3} - e^{7/3}$$

8.13.4 INTEGRALES DOBLES EN POLARES

TEOREMA 2 Sea $T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1,

$$(r,\theta) \longmapsto (x(r,\theta), y(r,\theta))$$

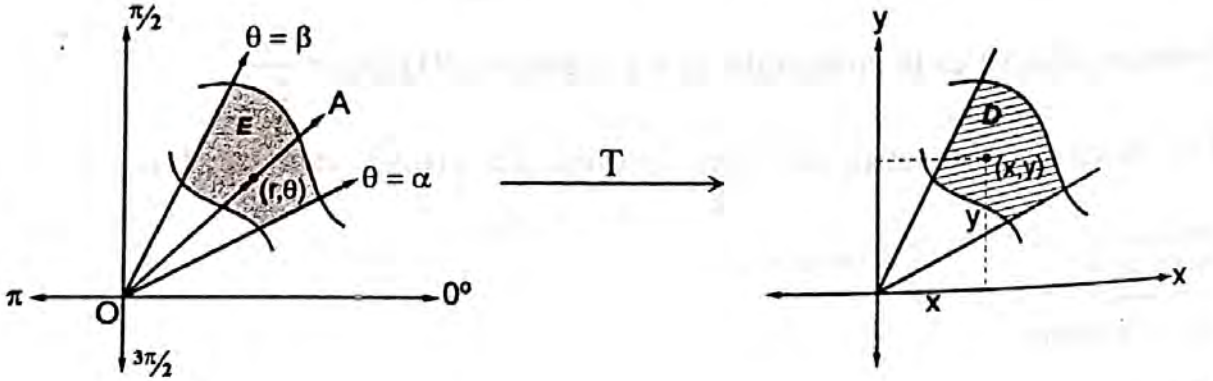
definida por $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ con $\begin{array}{l} 0 \le r < +\infty \\ \alpha \le \theta \le \alpha + 2\pi \end{array}$

con JACOBIANO $J(r,\theta) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en D, entonces la función $f \circ T : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre el conjunto E y

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_E f(x(r,\theta), y(r,\theta))\, r\,dr\,d\theta$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



En coordenadas polares, las fronteras de la región E están expresadas por ecuaciones polares: $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$. Cada punto (r,θ) se mira radialmente, esto es, se mira desde el polo "O" hasta el punto (r,θ). Esta es la razón por la que al integrar, el radio vector $\overrightarrow{OA}$ (el polo "O" es fijo) se debe girar en sentido antihorario, barriendo la región E desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$.

En coordenadas rectangulares, las ecuaciones de las fronteras de la región D están expresadas por ecuaciones en dos variables "x" e "y".

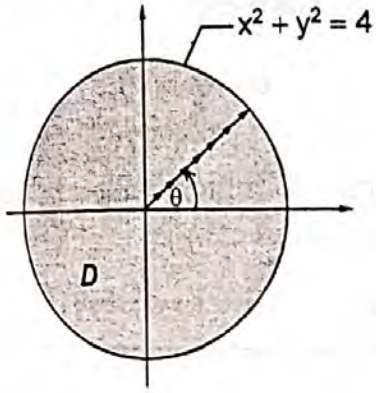
Cada punto $(x,y) \in D$ se mira en forma horizontal y vertical, respectivamente. Esta es la razón por la que al integrar se barre verticalmente, pero si la integral es respecto a "x" la región D se barre horizontalmente.

EJEMPLO 1 Calcular $\iint_D (x^2 + y^2)^n \, dA$, donde D en el disco circular

$$x^2 + y^2 \leq 4 \, , \, n > 0$$

Solución:

Paso 1 Graficar la región D.



Paso 2

Cuando la región D es circular y cuando la función integrando $f(x,y) = (x^2 + y^2)^n$ tiene la suma de los términos $x^2 + y^2$, se aplica las coordenadas polares.

Siga el orden siguiente:

1° Escribir la transformación polar

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

2° Escribir el jacobiano $J = r$.

3° Convertir las fronteras de la región D en ecuación polar

La frontera: $x^2 + y^2 = 4$ se convierte en:

$$r^2 = 4$$
$$\boxed{r = 4}$$

Ecuación polar de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

4° Escribir la nueva región polar E:

$$E = \{(r,\theta)/0 \leq r \leq 2 \, , \, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Paso 3

Hacer el cálculo de la integral doble en coordenadas polares:

$$\iint_D (x^2 + y^2)^n \, dA = \iint_E (r^2)^n \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^{2n+1} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^{2n+2}}{2n+2} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} 2^{2(n+1)} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{n+1} 2^{2(n+1)} \pi$$

EJEMPLO 2

Calcular $\iint_D \frac{1}{x} dA$, donde D es la región del primer cuadrante que está dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3x$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$

Solución:

Paso 1 Graficar la región D

a) La circunferencia:

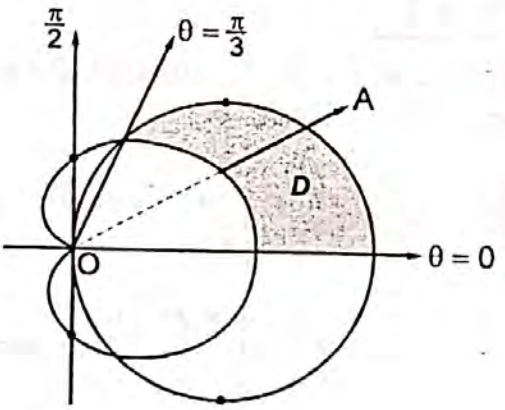
$$x^2 + y^2 = 3x \quad \text{(completar cuadrados)}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} \begin{cases} \text{centro } \left(\frac{3}{2}, 0\right) \\ \text{radio } a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) La cardioide $r = 1 + \cos\theta$
Como es simétrico respecto al eje polar, basta tabular con

$$\theta = 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ ,\ \pi$$



Paso 2

Para integrar en coordenadas polares, necesitamos:

1° La transformación polar $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

2° El Jacobiano $J = r$

3° Las fronteras de la región D expresados en coordenadas polares.
a) $x^2 + y^2 = 3x$ en coordenadas polares es: $r^2 = 3\,r\cos\theta$

$$r = 3\cos\theta$$

4° Necesitamos la intersección de las curvas $\begin{cases} r = 3\cos\theta \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$

Para ello, resolver:

$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ y } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

5° La nueva región sobre la cual se integra es:

$$E = \{(r,\theta) / 1 + \cos\theta \le r \le 3\cos\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{3}\}$$

OJO:
En coordenadas polares, la región D se barre "radialmente", esto es, el vector $\overrightarrow{OA}$ gira en sentido antihorario desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{3}$

Paso 3 La integral en coordenadas polares, es :

$$\iint_D \frac{1}{x}\,dA = \int_0^{\pi/3} \int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \frac{1}{r\cos\theta}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \frac{1}{\cos\theta}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{\cos\theta}(3\cos\theta - 1 - \cos\theta)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} [2 - \sec\theta]\,d\theta$$

$$= \left[2\theta - \text{Ln}\,|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \text{Lm}\,(2 + \sqrt{3})$$

8.13.5 ÁREA MEDIANTE INTEGRAL DOBLE EN POLARES

Si $D \subset IR^2$ es una región cerrada en el plano XY y si mediante un transformación polar la región D "se convierte" (se deforma) en la región:

$$E = \{ (r,\theta) / r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \ , \ \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \} ,$$

entonces el área de la región D en coordenadas polares es : $A(D) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \, dr \, d\theta$

EJEMPLO 3 Hallar el área de la región exterior al círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 8x$ e interior al círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 12x$, limitada por las recta $y = x$, $y + \sqrt{3}x = 0$.

Solución:

Paso 1 Graficar las fronteras de la región D.

a) La circunferencia: $x^2 + y^2 = 8x$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + \ldots + y^2 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16$$
$$(x-4)^2 + y^2 = 16$$

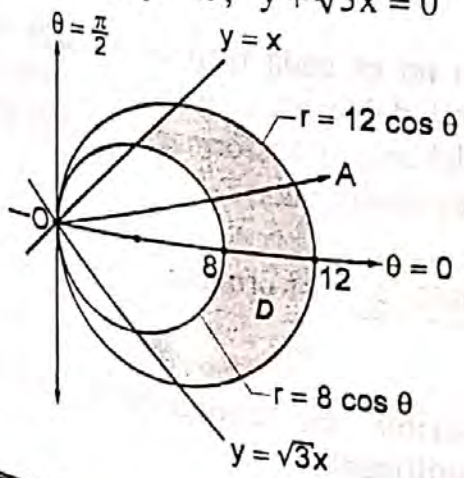
centro : (4,0) , radio a = 4

b) La circunferencia : $x^2 + y^2 = 12x$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 12x + \ldots + y^2 = 0$$
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 36$$
$$(x-6)^2 + y^2 = 36$$

centro : (6,0) , radio a = 6

c) Las rectas $y = x$, $y + \sqrt{3}x = 0$



Paso 2 Para hallar el área en coordenadas polares se necesita:

1° La transformación polar : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

2° El Jacobiano $J = r$

3° Las fronteras de la región D expresadas en coordenadas polares :

a) $x^2 + y^2 = 8x$ se convierte en :

$$r^2 = 8\, r \cos\theta$$
$$\boxed{r = 8\cos\theta}$$

b) $x^2 + y^2 = 12x$ se convierte en :

$$r^2 = 12\, r\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 12\cos\theta}$$

c) $y = x \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

d) $y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

e) El radio vector $\overrightarrow{OA}$ al girar, en sentido antihorario, desde la recta $y = -\sqrt{3}x \left(\theta = -\frac{\pi}{3}\right)$ hasta la recta $y = x \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$ barre toda la región D

Así tenemos la nueva región:

$$E=\left\{(r,\theta)/8\cos\theta\le r\le 12\cos\theta\,,\,-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

Paso 3 El área de la región **D**, en coordenadas polares, es :

$$A(D)=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{8\cos\theta}^{12\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=8\cos\theta}^{r=12\cos\theta}d\theta$$

$$=40\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=4\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{5}{3}[7\pi+6+3\sqrt{3}]\,\mu^2$$

8.13.6 COORDENADAS POLARES MODIFICADAS

Si en una integral doble se presentan los términos de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, entonces se aplica la *TRANSFORMACIÓN POLAR* modificada $T:\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\operatorname{sen}\theta\end{cases}$

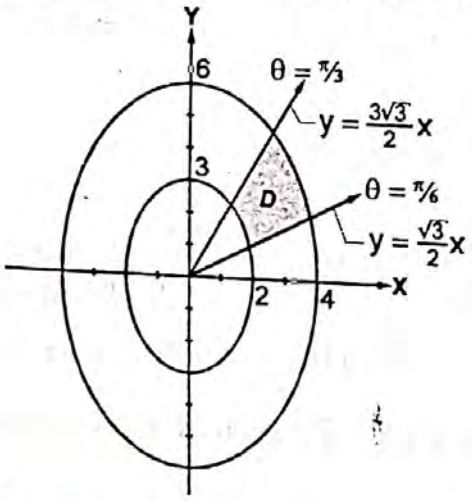
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$$

El Jacobiano es $J=abr$.

EJEMPLO 4 Hallar el área en el primer cuadrante de la región limitada por las elipses : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ y por las rectas $L_1: y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $L_2: y=\frac{3\sqrt{3}}{2}x$

Solución:

Paso 1 Graficar la región D.



Se pide hallar $A(D)=\iint_D dA$

Como no es nada fácil de calcular esta integral doble en coordenadas cartesianas, debemos transformar a coordenadas polares modificadas.

Paso 2 El procedimiento a seguir es:

1° Escribir las coordenadas polares modificadas:

$$T:\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{2}\,\text{tg}\,\theta$$

2° El Jacobiano es $J = 6r$

3° Expresar las fronteras de la región D en coordenadas polares.

La elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ se convierte en: $\frac{4r^2\cos^2\theta}{4} + \frac{9r^2\,\text{sen}^2\theta}{9} = 1$

$$r^2 = 1 \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

La elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ se convierte en:

$$\frac{4r^2\cos^2\theta}{16} + \frac{9r^2\,\text{sen}^2\theta}{36} = 1$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

La recta L_1 :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{2}\,\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

La recta L_2 :

$$\frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{2}\,\text{tg}\,\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

Paso 3 La nueva región sobre la cual se halla la integral doble es:

$$E = \left\{ (r,\theta) \Big/ 1 \le r \le 2\,,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

El área de la región D, es:

$$A(D) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 r\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}\pi$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 1 INTEGRALES DOBLES

Calcule cada una de las integrales iteradas.

1. $\int_0^2 \int_0^{x^2} y\,dy\,dx.$ ***Rpta.:*** 16/5

2. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx.$ ***Rpta.:*** $a^3/6$

3. $\int_0^1 \int_0^2 (x+2)\,dy\,dx.$ ***Rpta.:*** 5

4. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx.$

Rpta.: $\pi a^3/6$

5. $\int_1^e \int_0^y \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ***Rpta.:*** $\pi/4$

6. $\int_1^{\pi} \int_0^{\cos\theta} r\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta$ ***Rpta.:*** 1/3

7. $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy.$

Rpta.: $8\ln 8 - 16 + e$

En los ejercicios del 8 al 12 la integral iterada tiene el mismo valor que la integral doble $\iint_R F(x,y)\,dA$. En cada ejercicio (a) Grafique la región R. (b) escriba una integral iterada (o suma de integrales iteradas) con el orden de integración invertida.

8. $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y^2}{3}}^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)\,dx\,dy$

9. $\int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{4}}^{(8-y^2)/4} F(x,y)\,dx\,dy$

10. $\int_1^3 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} F(x,y)\,dx\,dy$

11. $\int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} F(x,y)\,dx\,dy +$

$\int_2^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} F(x,y)\,dx\,dy$

12. $\int_{-2\sqrt{5}}^{0} \int_{\frac{x^2}{5}}^{\sqrt{36-x^2}} F(x,y)\,dy\,dx +$

$\int_0^{2\sqrt{5}} \int_{\frac{x^2}{5}}^{\sqrt{36-x^2}} F(x,y)\,dy\,dx$

En cada uno de los ejercicios de 13 al 17 se especifica una función F y se describe una región R. Encuentre el valor de $\iint_R F(x,y)\,dA$ en cada ejercicio.

13. $F(x,y) = x + y$; R está limitada por los gráficos de $y = x^2$ y $y^2 = x$

Rpta.: 3/10

14. $F(x,y) = 2 - x$; R está limitada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$

Rpta.: 8π

15. $F(x,y) = 1$; R está limitada por los gráficos de $xy = 6$ y $x + y = 5$

Rpta.: $5/2 + \ln 2/3$

16. $F(x,y) = x^2 + y^2$; R está limitado por la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$

Rpta.: $625\pi/2$

17. $F(x,y) = 4 - x^2 - y^2$; R está limitada por las gráficas de $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = 0$

Rpta.: $7\pi/4$

En los ejercicios del 18 al 20 calcule el área de la región descrita.

18. La región limitada por las gráficas de $y = 4x - x^2$ y $y = x$

Rpta.: 9/2

19. La región limitada por las gráficas de $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

Rpta.: $\pi - 4/3$

20. La región limitada por las gráficas de $y = x^3 - 2x$ y $y = 6x - x^3$

Rpta.: 16

21. Calcular $I = \iint_D x\, e^{-x^2/y}\, dx\, dy$

donde :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 , 1 \leq y \leq 2 , y > x^2\}$

Rpta.: $3(e - 1)/(4e)$

GRUPO 2 ÁREA DE REGIONES PLANAS

1. Sean D_1 la región limitada por las parábolas $y = \sqrt{x}$, $y = 3x^{1/6}$ y la recta $x = 6$.

$D_2 = \{ (x,y) / |x| \leq 4 , |y| \leq 4 \}$.

Calcular el área de $D_1 \cap D_2$.

Rpta.:

2. Calcular el área de la región limitada por las rectas $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$ y $x + 3y = a$; $(a > 0)$

Rpta.: $7a^2/120$

3. Calcular el área de la región limitada por el eje X, por la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

Rpta.: $\frac{10a^2}{3}$

4. Hallar el área de la región limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$

Rpta.: $\frac{16}{3}\sqrt{15}$

5. Hallar el área de la región R, limitada por las gráficas de :
$y = 4x - x^2$, $y = 0$, $y = -3x + 6$

Rpta.: $\frac{15}{2}$

6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de : $xy = a^2$,
$x + y = \frac{5}{2}a \ (a > 0)$

Rpta.: $\frac{15}{8} - 2\,Ln2$

7. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de : $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$ $(p > 0 , q > 0)$

Rpta.: $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$

8. Hallar el área de la región R limitado por las gráficas de : $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

Rpta.: 2

9. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de: $y = x^3$, $y = 2x - x^3$

Rpta.: 37/12

- En los ejercicios del 10 al 26, hallar el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones que se dan a continuación :

10. $y = -x^3 + 4x^2 - 3x$, $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

Rpta.: 3253/96

11. $y = 3x - x^2$, $y = 3x^2 - x^3$

Rpta.: 37/12

12. $xy = 1$, $y(x^2 + 1) = x$, a la derecha de la recta $x = 1$.

Rpta.: $\frac{1}{2}Ln2$

13. $y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = e^x$, $x = 1$

Rpta.: $e - 1 - \frac{\pi}{4}$

14. $y = x$, $y = -x + 2$, $y = (x-1)^2$

Rpta.: $\frac{5}{2}\sqrt{5} - \frac{20}{3}$

15. $x^3 = y^2\left(\frac{1}{2p} - x\right)$ y su asíntota

Rpta.: $3\pi/16p^2$

16. $y = x^2$, $y = \frac{2}{x^2+1}$

Rpta.: $\pi - \frac{2}{3}$

17. $y = a\,sen\,x$, $y = b\,cosx$

Rpta.: $8ab/\sqrt{a^2 + b^2}$

18. Región encerrada por la curva $y^2 = (1 - x^2)^3$

Rpta.: $\frac{3}{4}\pi$

19. $y = \frac{Lnx}{4x}$, $y = x\,Lnx$

Rpta.: $\frac{1}{16}(3 - 2\,Ln2 - 2Ln^2 2)$

20. $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$, $y = 0$

Rpta.: $\pi\,a^2$

21. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota

$x = 2a$, $a > 0$

Rpta.: $3\pi a^2$

22. $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ y su asíntota , $a > 0$

Rpta.: $a^2\left(a + \frac{\pi}{a}\right)$

23. $y = |x| - 1$, $y = 1 - |x|$

24. $y = |\operatorname{sen} x|$, $y = x^2 - 2\pi x$

25. $y = |4 - x^2|$, $y = 2$

26. $(y-1)^2 = \frac{6-x}{4}$, $xy = 4$

Rpta.: $\frac{32}{3} - \operatorname{Ln} 64 - 3\sqrt{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^3$

GRUPO 3 CAMBIO EN EL ORDEN DE INTEGRACIÓN

I. Calcular las siguientes integrales iteradas :

1. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)\, dx$

Rpta.: $4\frac{2}{3}$

2. $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

Rpta.: $\operatorname{Ln} 25$

3. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$ ***Rpta.:*** $\frac{\pi}{12}$

4. $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{1+y^2}$ ***Rpta.:*** $\frac{9}{4}$

5. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\, dx$

Rpta.: 50.4

6. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{a\operatorname{sen}\theta}^{a} r\, dr$ ***Rpta.:*** $\frac{\pi a^2}{2}$

7. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy$

Rpta.: $\frac{\pi}{6}$

8. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{3\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, dr$

Rpta.: $2{,}4$

II. Otras integrales

9. Sea R el rectángulo $[1,4] \times [1,2]$ y $f(x,y)$ la función definida en R mediante :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-2} & , y \le x \le 2y \\ 0 & , \text{en otro lugar} \end{cases}$$

Calcular $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$

Rpta.: $\frac{1}{6}\operatorname{Ln} 2$

10. Calcular $\int_0^1 \int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dy\, dx$

11. Calcular $\iint_R xy\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante limitado por las gráficas de : $y^2 = x$, $y^2 = 4 - x$, $y = 0$.

12. Calcular $\iint_R (x - y)\,dA$, donde R es la región limitada por las gráficas de: $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$, $x + y - 3 = 0$.

13. Calcular la integral :

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{(x+2y+1)(y+1)}\,dx\,dy \text{ donde}$$

$D = [0,2] \times [0,1]$

Rpta.: $I = \frac{5}{2}\text{Ln } 5 - 3\text{ Ln}3$

III. Cambio en el orden de integración

14. Dada la integral doble

$$\iint_R f(x,y)dydy = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{9x+9}}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)dydx + \int_{0}^{15}\int_{x-3}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)dydx$$

a) Dibuje la región R
b) Exprese la suma de integrales del segundo miembro como una sola integral en la que el orden de integración esté invertido.
c) Calcule la integral determinada en b) para la función $f(x,y) = y^2$

Rpta.: 1968.75

15. Calcular el valor de la integral :

$$\int_0^1 \int_{\text{arc sen } y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$$

Rpta.: $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

16. Demostrar que :

$$\int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dxdy =$$

$$\int_0^a (a - x)\, e^{m(a-x)} f(x)\,dx$$

17. Sea $a = \int_1^4 \frac{\text{sen } x}{x}\,dx$. Calcular, en función de a, el valor de :

$$\int_0^1 \int_{1+y}^{2} \frac{\text{sen } x}{x}\,dx\,dy + \int_0^1 \int_2^4 \frac{\text{sen } x}{x}\,dx\,dy + \int_1^3 \int_{1+y}^{4} \frac{\text{sen } x}{x}\,dx\,dy$$

Rpta.: $-\cos 4 + \cos 1 + a$

18. Dada la suma de integrales

$$\int_1^2 \int_1^y \frac{\text{Ln } x}{x}\,dx\,dy + \int_2^4 \int_{y/2}^{2} \frac{\text{Ln } x}{x}\,dx\,dy$$

a) Dibujar la región de integración
b) Expresar dichas integrales en una sola integral, en la cual el orden de integración esté invertido.
c) Calcular la integral determinada en b)

19. Dada:

$$E = \int_{-1}^{0}\int_{-2}^{\operatorname{sen}\pi x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{-1+\sqrt{x}}^{\operatorname{sen}\pi x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{-2}^{-1-\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

a) Esbozar la gráfica, indicando las ecuaciones de sus fronteras,

b) Hallar E, para $f(x,y) = x$

20. Dado : $$I = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} (x^2, y^2)\,dxdy + \int_{1}^{2}\int_{0}^{2-y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

Se pide :

a) Dibujar la región correspondiente

b) Hallar I con una sola integral

Rpta.: $I = 4/3$

21. Dado: $$I = \int_{0}^{a\operatorname{sen} c}\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{a\operatorname{sen} c}^{b\operatorname{sen} c}\int_{y\cot gc}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

siendo $0 < a < b$ y $0 < c < \frac{\pi}{2}$, dibujar la región R dando las ecuaciones de todas las curva que constituyen su frontera

Rpta.: $y = 0$, $y = x\operatorname{tg} c$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$

22. Dado : $$I = \int_{1}^{2}\left[\int_{x}^{x^3} f(x,y)\,dy\right]dx + \left[\int_{2}^{8}\int_{x}^{8} f(x,y)\,dy\right]dx$$

a) Dibujar la región R y expresar I mediante una integral reiterada en la que el orden de integración esté invertido.

b) Efectuar la integración y calcular I cuando $f(x,y) = e^x\sqrt{\frac{x}{y}}$

Rpta.: a) $$\int_{1}^{8}\left[\int_{y^{1/3}}^{y} f(x,y)\,dx\right]dy$$

b) $4e^8 + 2e/3$

23. Dadas : $$A = \int_{0}^{1} e^{-t^2}\,dt \quad y \quad B = \int_{0}^{1/2} e^{-t^2}\,dt$$

Calcular la integral iterada

$$I = 2\int_{-1/2}^{1}\left[\int_{0}^{x} e^{-y^2}\,dy\right]dx$$

en función de A y B. Existen enteros positivos m y n tales que

$$I = mA - nB + e^{-1} - e^{-1/4}$$

24. Invertir el orden de integración en

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{-x+2} f(x,y)\,dy\,dx$$

Rpta.: $$\int_{0}^{1}\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

25. Invertir el orden de integración en

$$\int_{-5}^{0}\int_{-\sqrt{4-x}}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Rpta.: $\int_{-3}^{2}\int_{y-2}^{4-y^2} f(x,y)\,dx\,dy$

26. Dado :

$$I = \int_{0}^{2}\int_{0}^{x} dy\,dx + \int_{2}^{4}\int_{0}^{4-x} dy\,dx$$

Dibujar la región y calcular I mediante una sola integral

27. Calcular :

$$\int_{0}^{2}\int_{y/2}^{y} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_{2}^{4}\int_{y/2}^{2} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Rpta.: Ln (5/2)

28. Calcular :

$$\int_{0}^{4}\int_{0}^{3x/4} x\,dy\,dx + \int_{4}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx$$

Rpta.: 25

29. Cambiando el orden de integración, hallar

$$I = \int_{2}^{4} dx \int_{4/x}^{(20-4x)/(8-x)} (4y - y^2)\,dy$$

Rpta.: 4/3

30. Graficar la región de integración y calcular la siguiente integral :

$$I = \int_{0}^{1}\left\{ \int_{y}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \right\} dy$$

Rpta.: $1 - \cos 1$

GRUPO 4 OTRAS INTEGRALES DOBLES

1. Calcular $I = \iint_D |x - \operatorname{sen} y|\,dxdy$

donde :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le \pi\}$

Rpta.: π

2. Calcular $\iint_I f(x,y)\,dA$, siendo :

$I = [0,1] \times [0,1]$ y

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x$, si $x > y$; $f(x,y) = y^2$, si $x \le y$.

Rpta.: -1

3. Calcular :

$$I = \int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{2a\operatorname{sen}\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\; r\,dr\,d\theta$$

Rpta.: $\frac{4}{9}a^3(3\pi - 4)$

4. $\int_0^{2\pi}\int_0^{6} 3r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta$

Rpta.: 0

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{3} \sqrt{9-r^2}\; r \, dr\, d\theta$

Rpta.: $\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta \, dr\, d\theta$

Rpta.: $\frac{\pi^2}{8}+1$

7. Calcular :

$\iint_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\, dx\, dy$, D es la región acotado por la línea $x^2+y^2=1$ y los ejes coordenados.

Rpta.: 4/135

8. Calcular

$I=\iint_R k\cos^2\alpha\,(x\,\operatorname{tg}\alpha - y)^2 dy\, dx$

donde R $\{(x,y/\ b^2x^2 + a^2y^2 \le a^2\ b^2\}$

Rpta.: $\frac{1}{4}ab\pi k\,[a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\,]$

9. Calcular $\iint_R e^{x-y}\operatorname{sen}(x+y)\, dA$, donde

$R=\{(x,y)\in IR^2/x+y\le\pi\,,\ x\ge 0\,,\ y\ge 0\}$

Rpta.: $\frac{1}{4}(e^{\pi}-e^{-\pi})$

10. Hallar $I=2\pi\iint_R y\, dy\, dx$, donde R es la región limitada por las gráficas de $x^2+y^2=2ax$, $y=x$

Rpta.: $\frac{\pi}{3}a^3$

11. Calcular $\iint_R (4xy+2y^2)\, dA$, donde R es la región limitada por las gráficas de $y+x=0$, $y-x=0$, $x=1$.

Rpta.: $^1/_3$

12. Calcular $\iint_R (1-x)\, dy\, dx$, donde R es la región limitada por $x^2+y^2=2x$, $y\ge 0$.

Rpta.: $^1/_3$

13. Calcular $I=\iint_R (9y-yz^2)\, dA$, donde R es la región en el plano yz limitada por la circunferencia $y^2+z^2=9$

Rpta.: 0

14. Calcular : $I=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (3-z)\, dz\, dy$

Rpta.: 27π

15. Calcular :

$I=\int_{-\pi/4}^{2\pi/3}\int_1^5 \mu^2(\cos v - \operatorname{sen} v)\, d\mu\, dv$

Rpta.: $\frac{62}{3}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})$

16. Calcular:

$$I = \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\pi/4}(\cos v \cdot \operatorname{sen}^2 w + \cos w \operatorname{sen} w)\,dv\,dw$$

Rpta.: $\frac{15\pi}{32}(1+\sqrt{2})$

17. Dado la integral $I = \int_0^{\pi/4}\int_2^5 r\,dr\,d\theta$

a) Graficar la región de integración, y
b) hallar el valor de I.

Rpta.: $I = \frac{21\pi}{8}$

18. Dado la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2\cos^2\theta} r\,dr\,d\theta$

a) Graficar la región de integración, y
b) Hallar el valor de I

Rpta.: $I = \frac{3\pi}{2}$

19. Dado la integral :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\frac{1}{a}r^3\,dr\,d\theta$$

a) Graficar la región de integración, y
b) Hallar el valor de I

Rpta.: $I = 3\pi a^3/4$

20. Calcular:

$$I = \frac{64}{3}\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi$$

Rpta.: $I = \frac{32\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

21. Dado las siguientes integrales, graficar la región de integración y su respectivo valor.

a) $\int_0^1\int_{x^2+1}^2 (y+1)\,dy\,dx$

b) $\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x+y+2)\,dy\,dx$

c) $\iint_R x\,dA\,,\ R=\{(x,y)/\frac{1}{2}x \le x^2, 1\le x\le 2\}$

Rpta.: a) $^{26}/_{15}$ b) $\frac{128}{3}+8\pi$
c) $^{31}/_{12}$

GRUPO 5 CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE (APLICAR TRANSFORMACIONES T)

1. Calcular $\iint_R f(x,y)\,dA$, donde $f(x,y) = x+y+1$ y la región R está limitado por las gráficas de las rectas:

$y-x=1$, $y-x=-1$, $y+x=1$, $y+x=2$

Rpta.: $^5/_2$

2. Calcular $\iint_R x^2y^2\,dA$, donde la región R está limitada por las gráficas de : $xy = 1$, $xy = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 3x$

Rpta.: $\frac{7}{6}\text{Ln}\,6$

3. Calcular $\iint_R x^{-3}\,dA$ sobre la región R limitada por las parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

Rpta.: $\frac{1}{3}\text{Ln}\,2$

4. Calcular $\iint_R (x + y)\,dx\,dy$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x^2 + y^2 \le 4 , x \ge 0 , y \ge 0\}$

Rpta.: $^{14}/_{3}$

5. Calcular $\iint_E x\,dx\,dy$ donde E es la región limitada por las curvas $x = -y^2$, $x = 2y - y^2$, $x = 2 - y^2 - 2y$

Rpta.: $^{1}/_{48}$

6. Usando la transformación $x + y = \mu$, $y = \mu v$, calcular $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{y+x}}\,dy\,dx$

Rpta.: $\frac{1}{2}(e - 1)$

7. Calcular $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dA$, donde R es la región limitada por las líneas con ecuaciones $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Use la transformación T definida por $x = \mu - \mu v$, $y = \mu v$

Rpta.: La región D que mapea en R es un cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).

8. a) Hallar una transformación lineal $\mu = ax + by$, $v = cx + dy$ que aplique el paralelogramo S del plano XY, con vértices (0,0), (2,10), (3,17), (1,7) en un rectángulo D del plano UV con vértices opuestos en (0,0) y (4,2) de manera que el vértice (2,10) de S se aplique en un punto del eje U.

b) Calcular la integral doble $\iint xy\,dx\,dy$ transformándola en una integral equivalente en el rectángulo de la parte a)

Rpta.: a) $T(x,y) = (7x - y , -5x + y)$

b) $^{181}/_{3}$

9. Sean S y R regiones del plano $\mathbb{R}^2$,

$$\overline{T} : S \longrightarrow R$$
$$(\mu, v) \longmapsto (x, y) = \overline{T}(\mu, v)$$

una transformación definida implícitamente por :

$x\mu + y\mu = a^2$, $xv - yu = 0$, $a \neq 0$ y

$F : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

una función continua y acotada en R

a) Pruebe que :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = a^4 \iint_S \frac{F(\mu,v)}{\mu^2+v^2}\,d\mu\,dv$$

donde $F(\mu,v) = f(x(\mu,v)\ ,\ y(\mu,v))$

b) Si :

$R = \{(x,y)\ ;\ 0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le (a^2 - x^2)^{1/2}\}$

determine los límites de integración de la integral transformada.

Rpta.:

b) $S = \{(\mu,v)/0 \le \mu \le a\ ,\ 0 \le v \le \sqrt{a^2-\mu^2}\}$

10. Sea R, la región en el primer cuadrante, acotada por las gráficas de las ecuaciones:

$$x^2+y^2 = 2x\ ,\ x^2+y^2 = 6x \quad y$$
$$x^2+y^2 = 2y\ ,\ x^2+y^2 = 8y.$$

Use la transformación

$\mu = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{2y}{x^2+y^2}$ para evaluar la integral $\iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$

11. $\iint_S x^2y^2\,dx\,dy$, siendo S la región acotada en el primer cuadrante limitada entre las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las rectas $y = x$ e $y = 4x$

Rpta.: $\frac{7}{3}\text{Ln}\,2$

12. Sea R una región en el primer cuadrante por las lemniscatas :

$r^2 = \cos 2\theta$, $r^2 = 4\cos 2\theta$ y
$r^2 = \text{sen}\,2\theta$, $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

Demostrar que el área es :

$$A = \tfrac{1}{4}(2\sqrt{17} - 5\sqrt{2}).$$

Sugerencia:

Definir la transformación T del plano UV al plano $r\theta$ por:

$r^2 = \mu^{1/2}\cos 2\theta$, $r^2 = v^{1/2}\,\text{sen}2\theta$

Demostrar que:

$$r^4 = \frac{\mu v}{\mu+v} \quad , \quad \theta = \tfrac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{\mu^{1/2}}{v^{1/2}}$$

Luego, demostrar que :

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(\mu,v)} = -\frac{1}{16r(\mu+v)^{3/2}}$$

13. Sea la región

$$D = \{(x,y)/0 \le y \le x\ ,\ 0 \le x \le 1\}$$

Evaluar $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ haciendo el cambio de variables:

$$x = \mu + v\ ,\ y = \mu - v.$$

Verificar la respuesta obtenida evaluando directamente la integral, usando una integral iterada.

14. Sea $T(\mu,v) = (x(\mu v, y(\mu v))$ la función definida por $T(\mu,v) = (4\mu, 2\mu+3v)$. Sea D el rectángulo $[0,1] \times [1,2]$.

Hallar $E = T(D)$ y evaluar :

a) $\iint_E xy\,dx\,dy$ b) $\iint_E (x-y)\,dx\,dy$

Rpta.:

$E = \{(x,y)/0 \le x \le 4\ ,\ \frac{1}{3}x + 3 \le y \le \frac{1}{2}x + 6\}$

a) 140 , b) −42

15. Evaluar $\iint_E \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x+2y}}$ donde :

$D = [0,1] \times [0,1]$

haciendo $T(\mu,v) = (\mu , v/2)$ y evaluando una integral sobre D, donde $T(D) = E$

Rpta.: $D = \{(\mu,v)/0 \le \mu \le 1, 0 \le v \le 2\}$

$\frac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

16. Sea $T(\mu,v) = (\mu^2 - v^2 , 2\mu v)$. Haciendo este cambio de variables, evaluar :

$\iint_E \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $E = T(D)$

Rpta.: π

17. Calcular $\iint_R \frac{1}{x+y}\,dy\,dx$, donde R es la región acotada por :

$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, usando la función :

$T(\mu,v) = (\mu - \mu v, \mu v)$.

18. Calcular $\iint_S e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$,

donde S en la región limitada por la recta $x + y = 2$ y los ejes coordenados.

Rpta.: $e - \frac{1}{e}$

19. Utilizar una conveniente transformación lineal para calcular la integral doble :

$$\iint_D (x-y)^2 \operatorname{sen}^2 (x+y)\,dx\,dy$$

donde S es el paralelogramo con vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$

Rpta.: $\pi^4/3$

20. Probar que : $\int_0^{+\infty} e^{-\mu^2}\,d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

21. Considerar la aplicación definida por las ecuaciones : $x = \mu + v$, $y = v - \mu^2$

a) Calcular el jacobiano $J(\mu , v)$

b) Un triángulo T en el plano UV tiene vértices (0,0), (2,0), (0,2). Representar mediante un dibujo, la imagen S en el plano XY.

c) Calcular el área de S mediante una integral doble extendida a S y también mediante otra integral doble extendida a T.

d) Calcular $\iint_S (x - y + 1)^{-2}\,dx\,dy$

Rpta.:

a) $1 + 2\mu$ c) $\frac{14}{3}$

d) $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

22. Considerar la aplicación definida por las dos ecuaciones $x = \mu^2 - v^2$, $y = 2\mu v$.

a) Calcular el Jacobiano $J(\mu,v)$

b) Sea T el rectángulo en el plano UV con vértices (1,1), (2,1), (2,3), (1,3). Representar, mediante un dibujo, la imagen S en el plano XY.

c) Calcular la integral doble $\iint_R xy\,dx\,dy$ haciendo el cambio de variables $x = \mu^2 - v^2$, $y = 2\mu v$, donde :

$$R = \{ (x,y) / x^2 + y^2 \le 1 \}$$

Rpta.: a) $4(\mu^2 + v^2)$, c) 0

23. Calcular la integral doble :

$$I(p,r) = \iint_R \frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}$$

sobre el disco circular :

$$R = \{ (x,y) / x^2 + y^2 \le r^2 \}$$

Determinar los valores de p para los que I(p,r) tiene límite cuando $r \to \infty$

Rpta.: $\frac{\pi}{1-P}[(P^2+r^2)^{1-p} - P^{2(1-p)}$, si : $p \neq 1$; $\pi \text{Ln}(1+r^2)$ si : $p = 1$; I (p,r) tiende a un número finito, cuando $p > 1$.

24. Calcular $\iint_R e^{x+y} dx\,dy$, donde:

$R = \{ (x,y) / |x| + |y| \le 1 \}$

Rpta.: $\frac{e^2-1}{e}$

25. Calcular $\iint_R 3xy\,dA$, donde R es la región limitado por las rectas:

$x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$,
$x + y = 4$, $x + y = 1$

Rpta.: $\frac{164}{9}$

26. Calcular $\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\,dA$

donde R es la región limitada por las rectas :

$x + y = 1$, $x - y = 1$,
$x + y = 3$, $x - y = -1$

Rpta.: $\frac{13}{6}[2 - \operatorname{sen} 2]$.

27. Calcular $I = \iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$

donde :

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0 , y \ge 0 , x+y \le 1\}$

Rpta.: $I = \frac{1}{2}\operatorname{sen} h\, 1$

28. Calcular :

$$I = \iint_R \frac{3xy(x^2+y^2) - x^3 - y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$$

donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$

Rpta.: $I = 0$

29. Calcular $I = \iint_C \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2}}$

donde

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ y

$a^2 = b^2 + c^2$

Sugerencia:

hacer $x = c \cos \mu \operatorname{Cosh} v$,
$y = c \operatorname{sen} \mu \operatorname{Senh} v$.

Rpta.: $I = 4\iint_D d\mu dv$, D es el rectángulo de lados $\mu = 0, \mu = {}^{\pi}/_{2}$, $v = 0$, $v = \text{Arg Ch}\left(\frac{a}{c}\right)$;

$I = \pi\,[\text{Ln}(a+b) - \text{Ln}\,(a-b)]$

30. Calcular $\iint_R y\,dA$, donde R es la región limitada por las curvas :

$x = 5 - \frac{y}{2} + e^{y/2}$, $x + \frac{y}{2} = e^{y/2}$

$x - y = e^{y/2}$, $x + 5 = y + e^{y/2}$

Rpta.: 500/9

31. Hallar :

$$\iint_R 4(x^2+y^2)\cos(x^2-y^2+2xy)\,dx\,dy$$

donde R es la región, en el primer octante, limitado por las gráficas de :

$x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$,

$xy = 1$, $xy = 2$

Rpta.: cos 5 + cos 4 – cos 6 – cos 3

32. Calcular :

$$\iint_R e^{-(2x^2-2xy+5y^2)}\,\text{arctg}\left(\frac{x+y}{x-2y}\right)dx\,dy$$

$$R = \{(x,y)/1 \le 2x^2 - 2xy + 5y^2 \le 9,$$
$$(1-\sqrt{3}x)\,x + (1+2\sqrt{3}x)\,y \le 0,$$
$$\sqrt{3}\,(x+y) \ge x - 2y\}$$

Rpta.: $\frac{\pi^2}{144}(e^{-1} - e^{-9})$

GRUPO 6 INTEGRALES, APLICANDO COORDENADAS POLARES O COORDENADAS POLARES MODIFICADAS.

1. Calcular :

$$\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \text{Ln}\,(1+x^2+y^2)\,dy\,dx$$

Rpta.: $\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\,\text{Ln}\,(1+R^2) - R^2]$

2. Calcular : $\iint_R \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$

donde R es :

$R = \{(x,y)/\, x^2 + y^2 \le 1\,,\, x \ge 0\,,\, y \ge 0\}$

Rpta.: $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$

3. Calcular $\iint_E \text{arctg}\,\frac{y}{x}\,dx\,dy$, donde la región es :

$E = \left\{(x,y)/1 \le x^2 + y^2 \le 9\,,\, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x\right\}$

Rpta.: $\frac{1}{6}\pi^2$

4. Calcular $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$

Rpta.: $\frac{\pi}{4}(1-e^{-4})$

5. Calcular: $\iint_R \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$,

si R es la región limitada por las gráficas de la ecuación $x^2 + y^2 - 4y = 0$

Rpta.: $\frac{64}{3}\pi$

6. Calcular $\iint_E xy\, dx\, dy$, donde E es la región en el primer cuadrante, acotado por la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Rpta.: $\frac{a^2b^2}{8}$

7. Calcular la integral $\iint_E \sqrt{xy}\, dx\, dy$,

donde E es la región en el primer cuadrante limitado por la línea $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$.

Rpta.: $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{6^{1/4}}$

8. Calcular $\iint_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$,

$D = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$

Rpta.: $\pi\,(e - 1)$

9. Calcular $\iint_D (x^2 - y^2)\, dx\, dy$, siendo D una región limitada por : $x^2 + y^2 = 4$ $x^2 + y^2 = 9$, $xy = 1$, $xy = 4$ con $0 \leq x \leq y$.

Rpta : 15/2

10. Halle el área de la región que está dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$ y fuera del cardioide $r = a\,(1 - \cos\theta)$

Rpta.: 4π

11. Sea R la región en el primer cuadrante, acotado por la curva $x^4 + x^2y^2 = y^2$ y la línea $y = x$. Use coordenadas polares para evaluar $\iint_R \frac{1}{(1+x^2+y^2)}\, dx\, dy$

Rpta.: $\frac{1}{16}(\pi - 2)$

12. Halle el área de la región que está dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq 6x$ y fuera del cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Rpta.: $4\pi + 12\sqrt{3}$

13. Calcular $\iint_R \operatorname{sen}\theta\, dA$, donde R es la región del primer cuadrante situado en el interior de la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4x$ y en el exterior de la circunferencia dada por: $x^2 + y^2 = 4$

Rpta.: $^4/_3$

14. Calcular $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, donde

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x\}$

Rpta.: $^{\pi}/_{12}$

15. Calcular : $I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\, dx\, dy$,

donde D :

1° El bucle de la curva $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ (lemniscata)

2° El triángulo de vértices (0,0) , (2,0) y $(1,\sqrt{3})$.

Rpta.: 1° $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$,

2° $I = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

16. Si D es la región, del plano XY, situado en el interior de la curva de ecuación polar $r = 1 + \cos\theta$, hallar :

$$I = \iint_D x\,dx\,dy$$ *Rpta.:* $\frac{5\pi}{4}$

17. Calcular $I = \iint_R x^2y^2\,dx\,dy$, siendo R el conjunto acotado situado entre las rectas $y = x$, $y = 4x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$.

Rpta.: $\frac{7}{3}\operatorname{Ln} 2$

18. Calcular $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde D es el circulo $x^2 + y^2 \le Rx$.

Rpta.: $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$

19. Calcular $I = \iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, donde

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 \le 3/2\}$

Rpta.: $\frac{15}{8}\pi$

20. Sean $f(x,y) = (x+y)^2\, e^{x^2-y^2}$ y R la región del plano XY limitado por $x = 0$, $y = x$, $x + y = 1$, $x + y = 2$.

a) Graficar la imagen de T en el plano U – V

b) Evaluar : $\iint_R f(x,y)\,dy\,dx$

Rpta : b) $\frac{1}{4}(3 + e^{-4} - e^{-1})$

GRUPO 7 ÁREAS, APLICANDO TRANSFORMACIONES

1. Calcular el área de la región limitada por las rectas :

$x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$,

$x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$

2. Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por los arcos de las parábolas :

$x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$,

$y^2 = \beta x$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < b)$

Rpta.: $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$

3. Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por los arcos de las curvas : $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b\ ,\ 0 < \alpha < \beta)$

Rpta.: $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)\operatorname{Ln}\frac{a}{b}$

4. Calcular el área de la región

$R = \{ (x,y) / b^2x^2 + a^2y^2 \le a^2b^2 \}$

Rpta.: πab

Calcular el área de la región :

$R = \{ (x,y)/\ 9x^2 + y^2 - 36x - 2y + 36 \le 0$
$\sqrt{3}\, y \ge 3x - 6 + \sqrt{3}\ \}$ ***Rpta.:*** $\pi/6$

5. Efectuando un cambio de variables adecuado, hallar las áreas de las regiones limitadas por las curvas :

a) $x + y = a\ ,\ x + y = b\ ,\ y = \alpha x\ ,\ y = \beta x$
$(0 < a < b\ ;\ 0 < \alpha < \beta)$

b) $xy = a^2\ ,\ xy = 2a^2\ ,\ y = x\ ,\ y = 2x$
$(x > 0\ ,\ y > 0)$

c) $y^2 = 2px\ ,\ y^2 = 2qx\ ,\ x^2 = 2ry\ ,\ x^2 = 2\,sy$
$(0 < p < q\ ;\ 0 < r < s)$

d) $x^2 = ay\ ,\ x^2 = by\ ,\ x^3 = cy^2\ ,\ x^3 = dy^2$
$(0 < a < b\ ;\ 0 < c < d)$

e) $y = ax^p\ ,\ y = bx^p\ ,\ y = cx^q\ ,\ y = dx^q$
$(0 < p < q\ ;\ 0 < a < b\ ;\ 0 < c < d)$

f) $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1\ \ ;\ \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$
$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}\ ,\ 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (a > 0\ ,\ b > 0)$

Rpta :

a) $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$ b) $\frac{a^2}{2}\text{Ln}2$

c) $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$

d) $\frac{1}{15}(b^5 - a^5)(c^{-3} - d^{-3})$

e) $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{q+1}{q-1}} - d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$

f) $\frac{65}{108}ab$

6. Encontrar el área de la región R acotada por las curvas $xy = 1,\ xy = 3$ y $xy^{1.4} = 1\ ,\ xy^{1.4} = 2.$

Rpta.: 5 Ln2

7. Sea R el paralelogramo acotado por las líneas $x + y = 1\ ,\ x + y = 2$ y $2x - 3y = 2\ ,\ 2x - 3y = 5$

Hallar : $A = \iint_R dx\,dy$ ***Rpta.:*** $3/5$

8. Encontrar el área de la región en el primer cuadrante, acotado por las líneas $y = x\ ,\ y = 2x$ y las hipérbolas $xy = 1\ ,\ xy = 2.$

9. Encontrar el área en el primer cuadrante, de la región, acotada por las curvas $xy = 2\ ,\ xy = 4$ y $xy^3 = 3,$ $xy^3 = 6$

Rpta.: Ln 2

10. Encontrar el área, en el primer cuadrante de la región acotada por las curvas :
$y = x^2\ ,\ y = 2x^2$ y $x = y^2\ ,\ x = 4y^2$

Rpta.:

11. Hallar el área, en el primer cuadrante de la región acotada por las curvas:
$y = x^3\ ,\ y = 2x^3$ y $x = y^3\ ,\ x = 4y^3.$

Rpta.: $\frac{1}{8}(2 - \sqrt{2})$

12. Hallar el área limitada por la elipse $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

Rpta.: 10π , hacer $x - 2y = \mu$, $3x + 4y = v$

13. Hallar el área de la región limitada por las curvas :

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1\ ,$

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4$

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ $(x > 0, y > 0)$

Rpta.: $\frac{189}{16}\left(\text{arctg}\frac{1}{3} + \frac{12}{25}\right)ab$

14. Hallar el área de la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - C^2} = 1$, donde λ toma los siguientes valores :

$\frac{1}{3}c^2, \frac{2}{3}c^2, \frac{4}{3}c^2, \frac{5}{3}c^2$ $(x > 0, y > 0)$

Rpta.: $\frac{c^2}{6}(\sqrt{10} - 2)\,\text{arc sen}\frac{1}{3}$

15. Hallar el área de la región limitada por la elipse :
$(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$,
donde $k = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

Rpta.: $\frac{\pi}{|k|}$

GRUPO 8 ÁREAS DE REGIONES PLANAS Y APLICANDO TRANSFORMACIONES POLARES

1. Hallar el área de la región limitada por la curva $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

Rpta.: $\frac{3}{4}\pi$

2. Hallar el área de la región limitada por la curva: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

Rpta.: $2a^2$

3. Hallar el área de la región limitada por la curva $x^3 + y^3 = 2xy$ situada en el primer cuadrante.

Rpta.: 2/3

4. Hallar el área de la región limitada por la línea $(x + y)^3 = xy$ situada en el primer cuadrante.

Rpta.: 1/60

5. Hallar el área de la región limitada por la línea $(x + y)^5 = x^2 + y^2$ situado en el primer cuadrante :

Rpta.: $\frac{1}{1260}$

6. Hallar el área de la región limitada por la curva $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{e^2}$

Rpta.: $a^2b^2/2c^2$

7. Hallar el área de la región limitada por la curva $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{25}$

Rpta.: $\frac{39\pi}{25}$

8. Calcular el área comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = by$ a y b son números reales positivas.

Rpta.: $\frac{(b^2 - a^2)}{4}\text{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{a^2\pi}{8} - \frac{1}{4}ab$

9. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de : $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

Rpta.: $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$

10. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$.

Rpta.: $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

11. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $r\cos\theta=1$ y $r=2$. (considerar la región que no contiene el polo)

Rpta.: $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

12. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las curvas :

$r=a(1+\cos\theta)$ y $r=a\cos\theta$ $(a>0)$

Rpta.: $\frac{5}{4}\pi a^2$

13. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la línea :

$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$ ***Rpta.:*** 6.

14. Hallar el área A de la región del plano que forman los puntos interiores a la curva $r=a(1+\cos\theta)$ y exteriores al círculo $x^2+y^2\le a^2$

Rpta.: $a^2\,\frac{(\pi+8)}{4}$

15. En los problemas de a) hasta c) hallar el área de la región limitada por las siguientes curvas :

a) $(x^2+y^2)^2=x^2+y^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$

b) $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$, $a>0$

c) $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$,
$(x-a)^2+(y-a)^2\le a^2$, $a>0$

Rpta.:

a) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{Ln}(1+\sqrt{2})$ b) $\frac{\pi a^2}{4}$,

c) $a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\text{arcsen}\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$

16. Introduciendo las coordenadas polares generalizadas r , θ , según las transformaciones:

$x=ar\cos^{\alpha}\theta$, $y=br\,\text{sen}^{\alpha}\theta$ $(r\ge 0)$
donde a , b y α son unas constantes adecuadamente elegidas y
$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\theta\,\text{sen}^{\alpha-1}\theta$,
hallar las áreas de las regiones limitadas por las siguientes curvas (los parámetros son positivas).

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$

b) $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$

c) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0$, $y>0)$

d) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0\,,\,y>0)$

e) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$

f) $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$

Rpta.:

a) $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$

b) $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$

c) $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$ d) $\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$

e) $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^3}$ f) $\frac{ab}{70}$

17. Calcule el área exterior a $r^2=9\cos 2\theta$ e interior a $r=2-\cos\theta$

Rpta.: $\frac{9\pi}{2}-\frac{9}{2}\text{arc}\cos\left(\frac{13}{17}\right)+\frac{21\sqrt{30}}{17}$

8.14 MASA, DENSIDAD, MOMENTOS Y FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

8.14.1 MASA

Definición

Masa es una medida de la resistencia que presenta un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, o se encuentra en reposo.

8.14.2 DENSIDAD

Definición

Dado un cuerpo con masa "m" y volumen V, la densidad (denotado por δ) de un cuerpo es la relación entre la masa y el volumen, esto es $\delta = \frac{m}{v}$ (para cuerpos homogéneos)

En general, $\delta = \frac{dm}{dv}$, dm = diferencial de masa, dv = diferencial de volumen.

MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si $\delta(x,y)$ es una función continua de densidad sobre la lámina $D(D \subset \mathbb{R}^2)$, entonces la masa **m** de la lámina, está dada por : $\boxed{m = \iint_D \delta(x,y)\,dA}$

8.14.3 MOMENTO DE MASA Y MOMENTO DE INERCIA

Definición

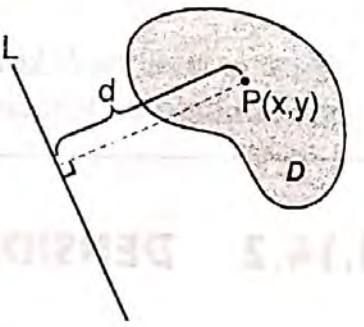
Sea L : $ax + by + c = 0$ una recta en $\mathbb{R}^2$ y P un punto interior de una lámina $D \subset \mathbb{R}^2$. Si $\delta(x,y)$ es una función de densidad continua en una lámina D, definimos:

a) El primer momento de una región plana D (lámina) en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta L, es:

$$M_L = \iint_D d(P,L)\,\underbrace{\delta(x,y)\,dA}_{\text{Diferencial de masa}}$$

- $d(P,L)$: Distancia de un punto interior de la lámina a la recta L
- M_L: Momento respecto a L

b) El momento de inercia (segundo momento) de la región plana D (lámina) respecto a la recta L, es :



$$I_L = \iint_D [d(P,L)]^2\,\delta(x,y)\,dA$$

- $[d(P,L)]^2$: Distancia al cuadrado de P a L
- I_L: Momento de inercia respecto a la recta L

8.14.4 MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si $\delta(x,y)$ es una función de densidad continua en una lámina correspondiente a una región plana D, entonces los momentos con respecto a los ejes X e Y son, respectivamente,

$$M_x = \iint_D y\,\delta(x,y)\,dA \quad , \quad M_y = \iint_D x\,\delta(x,y)\,dA$$

Además, si m es la masa de la lámina, el **centro de masa** es $(\bar{x},\bar{y})$, donde :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Si la densidad $\delta(x,y)$ es constante, al punto $(\bar{x},\bar{y})$ se le llama el **centro de gravedad** de la región D (o centroide).

MOMENTOS DE INERCIA

Los momentos de inercia de una lámina de densidad variable $\delta(x,y)$ alrededor de los ejes X e Y son, respectivamente:

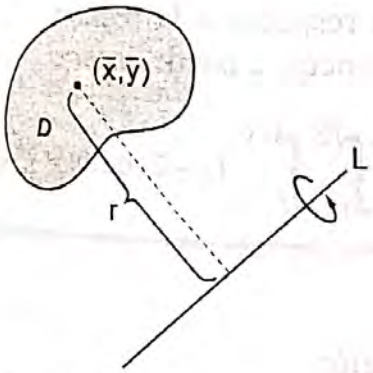
$$I_x = \iint_D y^2\,\delta(x,y)\,dA \quad , \qquad I_y = \iint_D x^2\,\delta(x,y)\,dA$$

I_x: Momento de inercia respecto al eje x

I_y: Momento de inercia respecto al eje y

8.14.5 TEOREMA DE PAPPUS

Sea D una región plana en $\mathbb{R}^2$ cuyo centroide es $(\bar{x},\bar{y})$ y sea $L : ax + by + c = 0$ una recta en el plano que no tenga puntos en común con el interior de la región D. Entonces el volumen del sólido de revolución generado al girar la región D alrededor de L, es igual al producto del área de la región D por la longitud de la circunferencia cuyo radio es la distancia de L al centroide de la región D.



Esto es, $\boxed{V = 2\pi\, r\ A(D)}$

donde : $A(D) = \iint_D dA$ = área de la región D

$$r = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

r: Distancia de $(\bar{x},\bar{y})$ a L.

EJEMPLO 1 Una lámina tiene la forma de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones : $y^2 = x$, $y^2 = 4 - x$. La densidad en cada punto de la lámina es $\delta(x,y) = |x - 2|$. Determine la masa de la lámina.

Solución :

Paso 1

Escribir la fórmula, que nos permita hallar la densidad de la lámina :

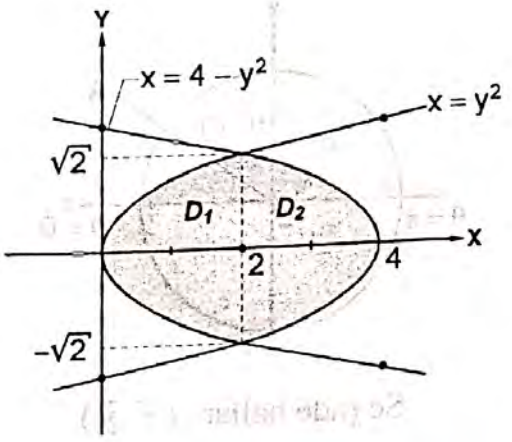
$$m = \iint_D \delta(x,y)\,dA$$

y luego sustituir la función densidad:

$$m = \iint_D |x-2|\,dA$$

Paso 2

Graficar la región D



Paso 3

Definir el valor absoluto en la función densidad:

$$\delta(x,y) = |x-2| = \begin{cases} x-2 \ , \text{si } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \ , \text{si } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\delta(x,y) = \begin{cases} x-2 \ , \text{ si } x \geq 2 \\ -(x-2) \ , \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

Para $x \geq 2$ se obtiene la región D_2.
Para $x < 2$ se obtiene la región D_1.

Entonces la integral doble sobre la región D, se desdobla en dos integrales dobles sobre las regiones D_1 y D_2, respectivamente.

Así:

$$m = \iint_D |x-2| \, dA$$

$$= \underset{\substack{D_1 \\ x<2}}{\iint} -(x-2)\, dA + \underset{\substack{D_2 \\ x \geq 2}}{\iint} (x-2) dA$$

$$= \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{32}{15}\sqrt{2}$$

$$= \frac{64}{15}\sqrt{2}$$

Nota:
Cuando la función integrando $\delta(x,y) = |x-2|$ es par y la región D es simétrica respecto a la recta $x = 2$ y el eje x, entonces se puede hacer :

$$m = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_2^{4-y^2} (x-2)\, dx\, dy = \frac{64}{15}\sqrt{2}$$

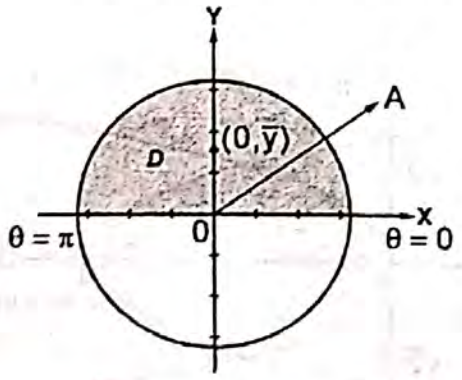
EJEMPLO 2 Una lámina tiene la forma de la región

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9 \ , y \geq 0 \}$$

y su densidad en cada punto de la lámina es $\delta(x,y) = x^2 + y^2$. Hallar el centro de masa de la lámina.

Solución :

Paso 1 Graficar la región D



Se pide hallar $(\bar{x}, \bar{y})$

Paso 2

Como la región D es simétrica respecto al eje Y, se tiene que $\bar{x} = 0$. Sólo debemos hallar $\bar{y}$.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Donde :

$$m = \iint_D \delta(x,y)\, dA \quad \text{y}$$

$$M_x = \iint_D y\, \delta(x,y)\, dA$$

Paso 3

Cálculo de las integrales dobles. Cuando se tiene a suma $x^2 + y^2$, es conveniente aplicar coordenadas polares.

a) Cálculo de la masa :

$$m = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA$$

Aplicar coordenadas polares :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

JACOBIANO $J(r,\theta) = r$

Con las coordenadas polares, la frontera:

$$x^2 + y^2 = 9$$

se convierte en : $r^2 = 9$

$r = 3$

- El radio vector $\overrightarrow{OA}$ barre la región D desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.
- Entonces la nueva región sobre la cual se integra es :

$$E = \{ (r,\theta)/0 \le r \le 3\ ,\ 0 \le \theta \le \pi \}$$

- La integral doble, es :

$$m = \iint_E r^2\, \underbrace{r}_{\text{Jacobiano}}\, dr\, d\theta$$

$$m = \int_0^{\pi}\int_0^3 r^3\, dr\, d\theta = \frac{3^4}{4}\pi$$

b) Cálculo del momento respecto a x :

$$Mx = \iint_D y\,(x^2 + y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^3 (r\,\text{sen}\,\theta)(r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^3 (\text{sen}\,\theta)\, r^4\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{3^5}{5}\text{sen}\,\theta\, d\theta = \frac{3^5}{5}\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= 2\left(\frac{3^5}{5}\right)$$

c) Luego :

$$\overline{y} = \frac{2\left(\frac{3^5}{5}\right)}{\frac{3^4}{4}\pi} = \frac{24}{5\pi}$$

Conclusión :

El centro de masa es $\left(0, \frac{24}{5\pi}\right)$

EJEMPLO 3 Un sólido de revolución K se genera al rotar la región R, limitada por $x = 0$, $x = \sqrt{4 - y}$, $y = 3x$, alrededor de la recta $y = \frac{1}{2}x$. Hallar el volumen de K.

Solución :

Paso 1 Graficar la región R.

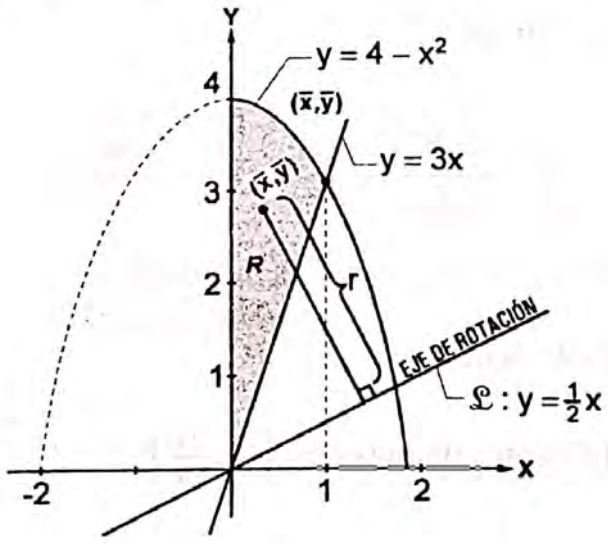
a) $x = 0$ (es el eje y)

b) $x = \sqrt{4 - y}$ es parte derecha de la parábola $x^2 = 4 - y$

$x^2 = -(y - 4)$

de vértice en V(0,4) y el eje focal coincide con el eje y.

c) $y = 3x$ (recta que pasa por el origen)



cuando la región R rota alrededor de la recta $\mathcal{L} : y = \frac{1}{2}x \iff x - 2y = 0$, se genera el sólido K, cuyo volumen es:

$$V(K) = 2\pi\, r\, A(R)$$

donde : r = distancia de $(\bar{x}, \bar{y})$ a la recta $\mathcal{L}$

A(R) = área de la región R

Paso 2 Cálculos auxiliares :

a) En primer lugar, hallar el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$. Para regiones cerradas en el plano, tales como : triángulos, paralelogramos o regiones como la que tenemos en este problema, se considera que la densidad es una constante ($\delta(x,y) = k$) o $\delta(x,y) = 1$

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ se halla con las fórmulas : $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$

i) $$m = \iint_R k\, dA$$

$$m = k \int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} dy dx = \frac{13}{6}k$$

ii) $$My = \iint_R x\, \delta(x,y)\, dA$$

$$= \iint_R x\, k dA =$$

$$= k \int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} dy\, dx = \frac{3}{4}k$$

iii) $$Mx = \iint_R y\, \delta(x,y)\, dA$$

$$= \iint_D y\, k\, dA =$$

$$= k \iint_D y\, dA = K \int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} y \, dy\, dx$$

$$= k \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=3x}^{y=4-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} k \int_0^1 (x^4 - 17x^2 + 16)\, dx = \frac{79}{15} k$$

iv) Luego, $\overline{x} = \dfrac{\frac{3}{4}k}{\frac{13}{6}k} = \dfrac{9}{26}$

$$\overline{y} = \frac{\frac{79}{15}k}{\frac{13}{6}k} = \frac{158}{65}$$

b) En segundo lugar, hallar el área de la región R :

$$A(R) = \iint_R dA = \int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} dy\, dx = \frac{13}{6}$$

c) En tercer lugar, hallar r.

$$r = d(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\left| \frac{9}{26} - 2\left[\frac{158}{62} \right] \right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{587\sqrt{5}}{650}$$

Paso 3 *Conclusión*

El volumen del sólido K , es :

$$V(K) = 2\pi \left[\frac{587\sqrt{5}}{650} \right] \left[\frac{13}{6} \right]$$

$$= \frac{7631\sqrt{5}}{1950} \pi\, \mu^3$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

TEOREMA DE PAPPUS:

01. Un sólido de revolución K se genera al rotar la región plana R, limitada por $x = 0$, $x = \sqrt{4-y}$, $y = 3x$, alrededor de la recta $y = \frac{1}{2}x$. Hallar el volumen de K.

Rpta. : $\dfrac{7631\sqrt{5}}{1950}\pi$

02. Sea R la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$. Determine el volumen del sólido generado por la rotación de la región R alrededor de la recta $x = 0$

Rpta. : $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}\pi$

03. Halle el volumen del sólido que se genera por la rotación de la región poligonal cuyos vértices son : A(1;1) , B(2,4) , C(3,4) , D(6,6) alrededor de la recta $y = x$.

04. La región limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x^{1/2}$, gira alrededor de la recta $y + 1 = 0$. Calcular el volumen del sólido generado.

Rpta. : $\dfrac{265}{168}\pi$

05. La región limitada por $y = x^2 - 4$, $y = 2x - x^2$, gira alrededor del eje $y = x + 2$. Hallar el volumen del sólido engendrado.

Rpta. : $16/315\,\mu^3$

06. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $2x - y = 0$; $x^2 - y = 0$ alrededor de la recta $2x - y = 0$.

Rpta. : $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 8/5$,
$V = \frac{8}{15\sqrt{5}}\,\mu^3$

07. La región limitada por las rectas $x + \frac{y}{2} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, $y = 0$ gira alrededor de la recta $x + y = 3$. Determine el volumen del sólido que se genera.

Rpta. : $M_x = {}^4/_3$, $M_y = {}^8/_3$
$\bar{x} = 2/3$, $\bar{y} = \frac{2}{3}$
$V = 2\sqrt{2}\pi\,\mu^3$

MASA, DENSIDAD, MOMENTOS Y CENTROS DE GRAVEDAD

01. Determinar la masa de la lámina que tiene forma de la región limitada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = \pi$ sabiendo que su densidad en cada punto P(x,y) es $\delta(x,y) = e^{x-y}\,\text{sen}(x + y)$

Rpta. : $\frac{1}{4}(e^{\pi} - e^{-\pi})$

02. La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular de radio R es proporcional de su distancia al origen. Encontrar el centro de masa de la lámina.

Rpta. : $m = \frac{1}{3}k\,R^3\pi$, $M_x = \frac{kR^4}{2}$,
$\left(0, \frac{3}{2}\frac{R}{\pi}\right)$

03. Hallar la masa de la lámina correspondiente a la región del primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = R$, siendo la densidad en cualquier punto interior proporcional a la distancia entre el punto y el centro.

Rpta. : $KR^3\,\pi/6$

04. Calcular el momento de inercia respecto del eje X, I_x, de una lámina delgada limitada en el plano XY, por las curvas $y = \sqrt{2x}$, $y = 0$, $x = 2$. La densidad en un punto cualquiera de la lámina es $\delta(x,y) = |x - y|$.

Rpta. : 24/35

05. Sea R la región contenida en el interior de la circunferencia :

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

y en el exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Hallar el centro de gravedad de R.

Rpta. : $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{6(2a^3\sqrt{3} - 2\pi)}{4a^2\pi + 3a^2\sqrt{3} - 2\pi}$

06. Una lámina delgada tiene la forma del triángulo de vértices A(0,0), B(π,π) y C(2π,0). Halle la masa de la lámina sabiendo que su densidad en cada punto es :

$$\delta(x,y) = (x+y)^2 \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$$

Rpta. : $m = \pi^2 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\pi^2)$

07. Supongamos que R es la región plana de densidad unitaria que está acotado por las hipérbolas : $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$. Encontrar el momento polar de inercia $I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ de esta región. ***Rpta.*** : 3.

08. Determine la masa de la lámina delgada que tiene la forma de la región limitada por la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = x + y$ si su densidad en cada punto es $\delta(x,y) = \left| x - \frac{a^2}{2} \right|$

09. Calcular el centro de masa de la lámina delgada representada por la región R que se encuentra por encima del eje X y entre las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 6y$, $y > 0$. Siendo la densidad en cada punto P(x,y) de la lámina

$$\delta(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

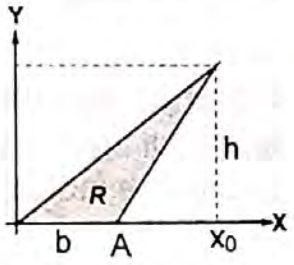
Rpta. : $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{1677}{380}$

10. Una lámina delgada tiene la forma de intersección de las regiones limitadas por las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$ con $a > b > 0$. Determine la masa de la lámina si la densidad en cada punto es $\delta(x,y) = |x|$.

Rpta. : $m = 8ab^2 \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \cos\theta \, dr\, d\theta$

11. Hallar el momento de Inercia de la región triangular mostrada en la figura respecto a su base de longitud b. Considere la densidad constante.

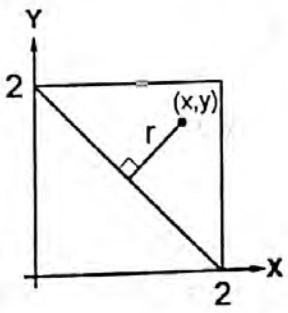
Rpta. :
$I_x = \frac{1}{2} k\, bh^3$



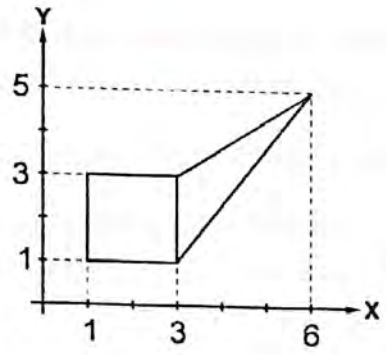
12. Calcular la masa de la lámina que tiene la forma de la región limitada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2\pi$ sabiendo que su densidad es :

$$\delta(x,y) = |\operatorname{sen}(x+y)| .$$

13. Determinar el momento de inercia del cuadrado, mostrado en la figura respecto a la diagonal $\overline{AC}$, sabiendo que su densidad es $\delta(x,y) = x + y$.



14. Determinar el centroide de la región mostrada en el siguiente gráfico.

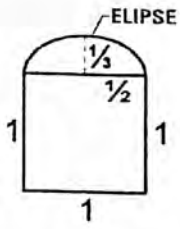


Sugerencia :

Si $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ es el centroide del cuadrado y $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ es el centroide del triángulo, entonces el centroide de la región es :

$$\overline{x} = \frac{m_1 \overline{x}_1 + m_2 \overline{x}_2}{m_1 + m_2} \; ; \; \overline{y} = \frac{m_1 \overline{y}_1 + m_2 \overline{y}_2}{m_1 + m_2}$$

15. Hallar el centroide de la figura que a continuación se indica:



16. Una lámina delgada tiene la forma de la región R y con densidad $\delta(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$. Hallar la masa de la lámina si R es la región que es interior a la circunferencia:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

y exterior a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Rpta. : $m = \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

17. Calcular la masa de la lámina que tiene la forma de la región R en el primer cuadrante limitado por :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad y \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1 \; ,$$

si se sabe además que la densidad en cada punto es $\text{Ln}\sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$

18. Encuentre el centroide de la región en el plano XY que es la gráfica de $\{(x,y)/0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2} \; , x \in [0,a]\}$

Rpta. : $\overline{x} = \overline{y} = 4a/3\pi$

19. En cada uno de los siguientes ejercicios encuentre el centroide de la región en el plano xy que es gráfica de la relación dada.

a) $\{(x,y)/-2\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \; , 0 \le x \le 4\}$

b) $\{(x,y)/0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \; , 0 \le x \le a\}$

c) $\{(x,y)/x^3 \le y \le \sqrt{x} \; , 0 \le x \le 1\}$

Rpta. : a) $\left(\frac{12}{5}, 0\right)$

b) $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{4\pi}\right)$ c) $\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)$

20. Encuentre el centroide de la región limitada por un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas :

$$x = a\,(t - \text{sen}t) \; , \; y = a\,(1 - \cos t)$$

y el eje x.

Rpta. : $\left(\pi a \; , \frac{5}{6}a\right)$

21. Encuentre el centroide de la región limitada por las gráficas de $x^2 = 16y$, $x = y^2 - 2y$.

Rpta. : $(^{44}/_{15} \; , \; ^{28}/_{15})$

22. Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante limitada por

la parábola con ecuación $y^2 = 4ax$, el eje X y el lado recto de esta parábola.

Rpta. : $\left(\frac{3}{5}a , \frac{3}{4}a\right)$

23. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de las láminas homogéneas, limitadas por las siguientes curvas :

a) $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $\quad (a > 0)$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$

c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $\quad (x > 0 , y > 0)$

d) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$

e) $(x^2 + y2)^2 = 2a^2\, xy$ $\quad (x>0 , y>0)$

f) $r = a(1 + \cos\theta)$, $\theta = 0$

Rptas. :

a) $\left(-\frac{a}{2}, \frac{8}{5}a\right)$ $\qquad$ b) $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$

c) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{256}{315\pi}a$

d) $\bar{x} = \frac{a^2 b}{14c^2}$, $\bar{y} = \frac{ab^2}{14c^2}$

e) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{\pi a}{8}$

f) $\bar{x} = \frac{5}{6}a$, $\bar{y} = \frac{16}{9\pi}a$

24. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la lámina circular $x^2 + y^2 \le a^2$, si su densidad en el punto M(x,y) es proporcional a la distancia del punto M al punto A(a,0)

Rpta. : $\bar{x} = -\frac{a}{5}$, $\bar{y} = 0$

25. Hallar los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los ejes de coordenadas OX y OY de las regiones (densidad = 1), limitadas por las siguientes curvas :

a) $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$
$(b_1 > 0 , b_2 > 0 , h > 0)$

b) $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $x = 0$,
$y = 0$, $(0 \le x \le a)$

c) $r = a(1 + \cos\theta)$

d) $x^4 + y^4 = a^2 (x^2 + y^2)$

e) $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$
$2x = y$, $(x > 0 , y > 0)$

Rpta. :

a) $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{h\left|b_1^2 - b_2^2\right|}{12}$

b) $I_x = I_y = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi)$

c) $I_x = \frac{21\pi a^4}{32}$, $I_y = \frac{49\pi a^4}{32}$

d) $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$

e) $I_x = I_y = \frac{9}{8}a^4$

26. Hallar el momento polar :

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

de la región R limitado por la curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Rpta. : $I_0 = \frac{\pi a^4}{8}$

27. Una lámina tiene la forma de la región limitada por $y = (tg\alpha)x$, $y = 0$, $x = \sqrt{a^2 - y^2}$. Hallar la masa de la lámina si su densidad es :

$$\delta(x,y) = \text{Ln}\,(x^2 + y^2).$$

Considerar $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $a > 0$.

Rpta. :

$$m = \alpha\left[\frac{1}{2}(a^2+1)\,\text{Ln}\,(1+a^2) - \frac{a^2}{2}\right]$$

28. Una lámina tiene la forma del triángulo cuyos vértices son :

$A = (0,0)$, $B = (2,0)$ y $C = (2,2)$

Calcular la masa de la lámina si su densidad es :

$$\delta(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + 2x + 2y + 1}}$$

Rpta. :

Sustituir : $\mu = x - y$, $x + y = 1$,

$$m = \frac{3}{2} + 2\,\text{Ln}2$$

29. Calcular la masa de una lámina que tiene la forma de la región limitada por la gráfica de la ecuación :

$$|x| + |y| = 2$$

si su densidad en cada punto es $\delta(x,y) = |y - x^2|$

Rpta. : $33/5$

30. Determine el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones :

$x - y = 0$, $y = 0$; $(x-y)^2 + 4(x+y) = 12$; $x \geq 0$, siendo su densidad en cada punto $\delta(x,y) = x + y$.

Rpta. : Hacer $x - y = \mu$

$x + y = v$

31. Calcule la masa de una lámina que tiene la forma de la región limitada por $y \geq |x|$, $x^2 + y^2 \leq 6y$, $y \geq 2$. La densidad de la lámina es :

$$\delta(x,y) = x^2 + y^2$$

Rpta. :

Calcular $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{2/\text{sen}\,\theta}^{6\,\text{sen}\,\theta} r^3 dr\, d\theta$

32. Una lámina plana tiene la forma de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones :

$$2x - y^2 - y = 0 \;\; ; \;\; 2x - y - 4 = 0.$$

Determine el momento de inercia de R respecto a la recta $2x - y = 0$ si su densidad es : $\delta(x,y) = |y|$.

Rpta. :

$$M_L = \iint_R d^2((x,y),L)\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \frac{32}{5}$$

33. Sea R la región en el primer cuadrante limitada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$; $x = 0$; $y = 0$.

Calcule el momento de inercia de R (densidad = 1) respecto al eje X.

Rpta.: $I_x = \displaystyle\iint_R y^2\,\delta(x,y)\,dA = \frac{63}{16}\,ab^3\pi$

34. Calcular el momento de inercia de la lámina con densidad constante y limitada por la curva $x^2 + y^2 = b^2$, respecto a la recta $x + y = a$.

$(a > b > 0)$.

Rpta. :

$$I_L = \iint_R [d_{(P,L)}]^2 \, \delta(x,y)\, dA = \frac{1}{2} k \pi a^2 b^2$$

35. Una lámina delgada está limitada por: la curva $y^2 + 2y = x$; y por la recta $x - y = 2$. Determine su masa si la densidad en cada punto P(x,y) es $\delta(x,y) = (1 - y)(1 + x)$.

36. Halle la masa de una lámina que tiene la forma de una región limitada por $|x| + |y| = 4$ si su densidad es $\delta(x,y) = x^2 + y + 4$.

Rpta. : $m = \frac{640}{3}$

37. Halle la masa de la lámina que tiene la forma de la región plana R situada en el primer cuadrante y limitado por la curva con ecuación $\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)^4 = \frac{xy}{4}$ sabiendo que la densidad en cada punto P(x,y) es igual $\sqrt{xy}$

Rpta. : $m = \sqrt[4]{2}$

38. Determine la masa de la lámina delgada que tiene la forma de la región limitada por la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = x + y$ si su densidad en cada punto es $\delta(x,y) = \left| x - \frac{a^2}{2} \right|$

Rpta. : $m = \frac{a^2 b}{6}(a^2 + b^2)^{3/2}$

39. Calcular el centro de masa de la lámina delgada representada por la región R_{XY} que se encuentra por encima del eje X y entre las gráficas de las ecuaciones $y = x$; $y = -x$; $x^2 + y^2 = 4y$; $x^2 + y^2 = 6y$; $y > 0$ siendo la densidad en cada punto P(x,y) de la lámina:

$$\delta(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2} .$$

Rpta. : $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \frac{1677}{380}$

40. Calcule el momento de inercia, respecto del eje X, de la lámina que tiene la forma de la región limitada por la curva $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 2xy$, $x > 0$, $y > 0$ si la densidad en cada punto es :

$$\delta(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ , \ a > 0 \ , \ b > 0$$

41. Una lámina tiene la forma de la región ubicada en el primer cuadrante y limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^{1/2}$, $x = 2$, $y = 0$. Hallar la masa de la lámina si su densidad $\delta(x,y) = |x^2 - 4y^2|$.

Rpta. : $m = \frac{8}{3} - \frac{16}{105}\sqrt{2}$

42. Calcule el momento de inercia de la región limitada por la hipérbola $xy = 4$; y la recta $x + y = 5$, con respecto a la recta $y - x = 0$.

Rpta. :

$$I_L = \iint_R d^2(P,L)\, \rho(x,y)\, dA = \frac{725}{2} + 16 \operatorname{Ln} 2$$

8.15 INTEGRALES IMPROPIAS

Las integrales impropias surgen cuando la región de integración D, de la función f(x,y), es un conjunto abierto y acotado y f(x,y) no es continua en algún punto frontera de la región D, o cuando la región D no es acotada.

Consideremos dos casos :

CASO 1

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada en D.

Si f(x,y) no es continua en algún punto P de la frontera de la región D y B_ε es un disco abierto de radio ε que contiene el punto P, además si definimos una nueva región $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon$; entonces la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dA$ es convergente, cuando $\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dA$ existe y es finito. Si esto ocurre, escribimos :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dA$$

CASO 2

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en la región no acotada en D.

Si D_N es un conjunto cerrado y acotado en D, entonces la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dA$ es convergente, cuando $\lim_{N \to \infty} \iint_{D_N} f(x,y)\,dA$ existe y es finito. Si esto ocurre, escribimos :

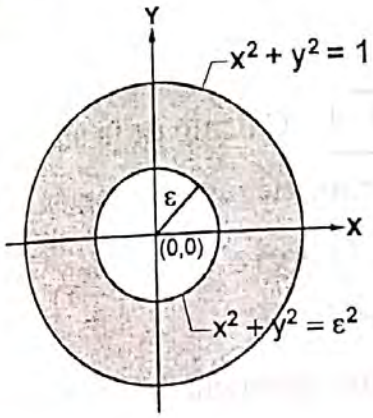
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{N \to \infty} \iint_{D_N} f(x,y)\,dA$$

EJEMPLO 1

Calcular $\iint_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{7/4}}\,dx\,dy$, donde $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \}$

Solución :

Paso 1 Graficar la región D



Paso 2

Se analiza la función integrando $f(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{7/4}}$, esta función no es continua en el punto $(0,0) \in D$.

¿Qué hacer en este caso?

En este caso, se abre un círculo de centro en (0,0) y radio $\varepsilon(\varepsilon \to 0)$, la frontera de este círculo es la circunferencia :

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2.$$

Ahora, tenemos la nueva región

$$D_\varepsilon = \{ (x,y) \in IR^2 / \varepsilon \le x^2 + y^2 \le 1 \}$$

sobre la cual integraremos, puesto que ahora f(x,y) es continua sobre la región D_ε.

Paso 3

Cálculo de la integral sobre la región D_ε

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{7/4}}\,dx\,dy$$

Aplicar coordenados polares :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Jacobiano = r

La región D_ε se transforma en otra región E, en coordenadas polares que tiene la siguiente forma :

$$E = \{ (r,\theta) / \varepsilon \le r \le 1 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

La doble integral en coordenadas polares es:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{r^2 \cos^2\theta}{(r^2)^{7/4}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{-1/2}\,dr \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 r^{-1/2}\,dr \right] \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\lim_{\varepsilon \to 0} 2\,r^{1/2} \right]_{r=\varepsilon}^{r=1} \right\} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2(1)^{1/2} - 2(\varepsilon)^{1/2} \right] \right\} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=2n}$$

$$= 2\left\{ \left[\frac{2\pi}{2} + \frac{\text{sen}\,4\pi}{4} \right] - \left[\frac{0}{2} + \frac{\text{sen}\,0}{4} \right] \right\}$$

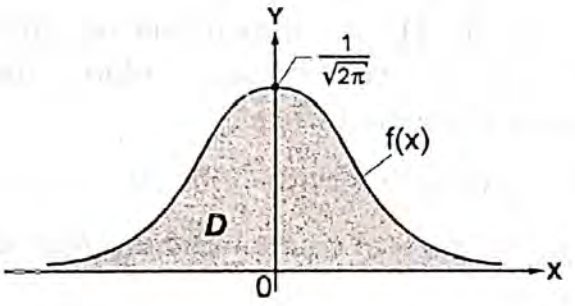
$$= 2\pi$$

EJEMPLO 2 Dado la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<\infty$

Probar que el área de la región bajo el gráfico de f(x) y encima del eje x, es igual a la unidad.

Solución:

Paso 1 El gráfico de f(x) es :



Paso 2 $A(D)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Área de la región

Esta integral impropia, no se puede hallar, porque la función $e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ no tiene primitiva (antiderivada).

En este caso, hacemos:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

Multiplicar :

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty}\int_{-\infty}^{-\infty}e^{\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy$$

Es una integral impropia

La región de integración es :

$D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2/-\infty<x<+\infty\,,\,-\infty<y<+\infty\}$

Paso 3 Cálculo de la integral I^2 :

En este caso, elegimos la región cerrada

$$D_r=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2/x^2+y^2\le r\right\}$$

$r\to+\infty$

y aplicamos coordenadas polares

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\,\text{sen}\,\theta\end{cases}$$

Jacobiano = r

La nueva región, en coordenadas polares sobre la cual integraremos es :

$$E=\{(r,\theta)/0\le r<+\infty\,,\,0\le\theta\le 2\pi\}$$

Luego la integral I^2 , es :

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\lim_{r\to+\infty}\int_0^{r}r\,e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\left\{\lim_{r\to+\infty}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{r}\right\}}_{1}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1$$

Conclusión : $I^2=1\Rightarrow I=1$

Nota : $e^{-\infty}=0$, en el límite.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Calcular las siguientes integrales impropias:

01. $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\, dy$

02. $\int_0^{1} dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx$

03. $\iint_R \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$, donde R es un recinto que se determina por las desigualdades $x \geq 1$, $y \geq x^2$.

04. $\int_{\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2} \quad (a>0)$

05. $\iint_{\substack{xy\geq 1 \\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^p}$

06. $\iint_{\substack{x+y\geq 1 \\ 0\leq x\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$

07. $\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

08. $\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$

09. $\iint_{y\geq x^2+1} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$

10. $\iint_{0\leq x\leq y} e^{-(x+y)}\, dx\,dy$

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\,dy$

12. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dx\,dy$

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dx\,dy$

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-|y|}\, dx\,dy$

15. $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x+y)\, e^{-(x+y)}\, dx\,dy$

16. $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy\, e^{-x^2-y^2}\, dx\,dy$

17. $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)} dx\,dy$

18. $\int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} e^{-y^2}\, dy$

19. $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} x e^{-y} \frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\, dx$

20. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4\, e^{-x^2-y^2}\, dx\,dy$

SOLUCIONES

01. 1 **02.** $\frac{1}{2}$ **03.** $\frac{\pi}{4}$ **04.** $\frac{\pi}{4a^2}$

05. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}\ (p>q>1)$ **06.** $\frac{1}{p-1}\ (p>1)$ **07.** 2π

08. $\frac{\pi}{p-1}(p>1)$ **09.** $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** π

12. $\frac{\pi}{2}$ **13.** $\frac{\pi}{2}$ **14.** 4 **15.** 2

16. $\frac{1}{4}$ **17.** $\frac{\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}$ **18.** $\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{16}$

20. $\frac{3\pi}{4}$

CAPÍTULO 9

INTEGRALES TRIPLES

De manera similar a la integral doble, necesitamos definir una partición y una norma de un conjunto en IR^3, para luego hacer la suma de Riemann y definir la integral triple de una función de tres variables $f(x,y,z)$.

9.1 CONJUNTO ACOTADO EN IR^3

Definición

Se dice que un conjunto $D \subset IR^3$ es acotado, cuando existe un paralelepípedo rectangular $R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ tal que $D \subset R$, donde:

$$R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] = \{ (x,y,z) \in IR^3 / a \le x \le b , c \le y \le d , e \le z \le f \}$$

9.2 PARTICIÓN DEL PARALELEPÍPEDO R

Definición

Una partición del paralelepípedo R es el conjunto

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 = \{[x_{i-1} , x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1} , z_k] / 1 \le i \le m , 1 \le j \le n , 1 \le k \le q \}$$

donde $P_1 = (x_0 , x_1 , \ldots x_m)$ es una partición de $[a,b]$

$P_2 = (y_0 , y_1 , \ldots y_n)$ es una partición de $[c,d]$

$P_3 = (z_0 , z_1 , \ldots z_q)$ es una partición de $[e,f]$

$R_{ijk} = [x_{i-1} , x_i] \times [y_{j-1} , y_j] \times [z_{k-1} , z_k]$ es un subparalelepípedo

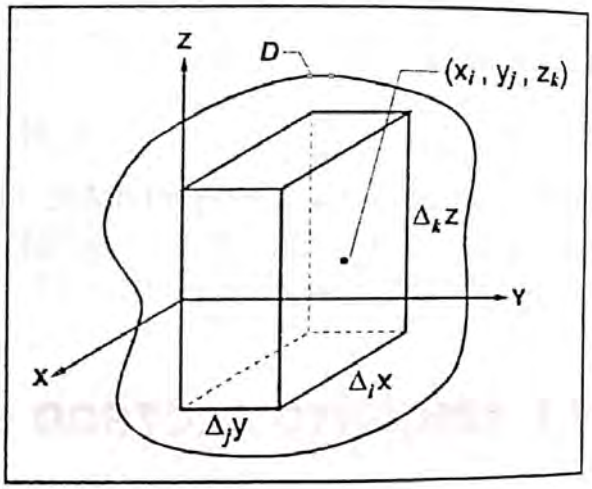
9.3 NORMA DE LA PARTICIÓN P

Se denomina norma de la partición P al número:

$$\| P \| = \text{máx } \{\text{diag } (R_{ijk}) / \ 1 \le i \le m \ , \ 1 \le j \le n \ , \ 1 \le k \le q\}$$

↑ Norma de P es la máxima longitud de las diagonales de los sub-paralelepipedos R_{ijk}

9.4 SUMA DE RIEMANN



Sea $f : D \subset IR^3 \longrightarrow IR$ una función acotada en la región cerrada D.

Sea P_D una partición de la región D y sea $P_{ijk} = (x_i , y_j , z_k)$ un punto arbitrario en $R_{ijk} \in P_D$, de modo que $f(P_{ijk})$ está bien definido.

La suma de Riemann de la función f asociada a la partición P es:

$$\sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \Delta_{ijk} V = \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \Delta_i x \, \Delta_j y \, \Delta_k z$$

donde $\Delta_{ijk} V = \Delta_i x \, \Delta_j \, y \, \Delta_k Z$ es el volumen del sub-paralelepípedo R_{ijk} .

9.5 INTEGRAL TRIPLE

Al límite $L = \lim_{\|P_D\| \to 0} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \, \Delta_i x \, \Delta_j y \, \Delta_k z$ se le llama integral triple de la función f sobre la región cerrada D y se denota por $L = \iiint_D f(x, y, z) \, dv$.

Definición

Una función acotada $f : D \subset IR^3 \longrightarrow IR$ es integrable - Riemann sobre la región acotada $D \subset IR^3$, si existe un número L con la propiedad de que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \, \Delta_i x \, \Delta_j y \, \Delta_k z - L \right| < \varepsilon$$

para toda partición P_D con $\|P_D\| < \delta$ y toda elección del punto $P_{ijk} \in R_{ijk}$. Este número L es llamado integral triple de f sobre D y se denota por el símbolo:

$$L = \iiint_D f(x,y,z)\,dv = \lim_{\|P_D\| \to 0} \Sigma\, f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta_i x\,\Delta_j y\,\Delta_k z$$

9.6 *Proposición 1*

Si una función $f : D \subset IR^3 \longrightarrow IR$ es continua en la región cerrada y acotada D, entonces existe la integral triple de f sobre D .

9.7 CÁLCULO DE INTEGRALES TRIPLES MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Como la integral triple se halla sobre una región tridimensional D entonces tenemos que elegir adecuadamente el PLANO COORDENADO sobre el cual vamos a proyectar el sólido D (región D).

La proyección del sólido D puede ser sobre el plano XY, sobre el plano XZ o sobre el plano YZ.

- Si el sólido D se proyecta sobre el plano XY, tendremos un gráfico similar a la fig. 1, donde se puede apreciar que la proyección del sólido D sobre el plano XY es la región plana R.

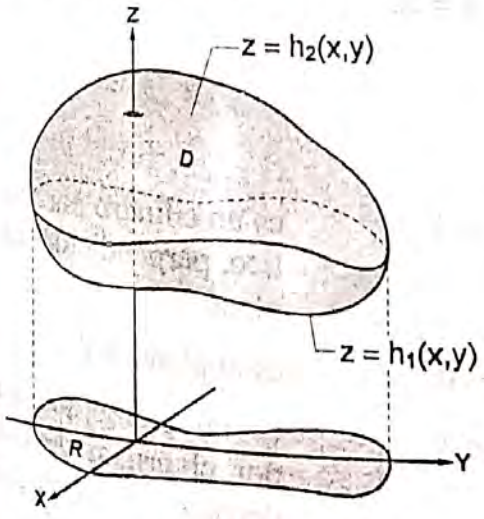


Fig. 1

En este caso:

1° Despejamos la variable Z en función de las variables (x,y) obteniéndose dos funciones $h_1(x,y)$ y $h_2(x,y)$.

2° El desarrollo iterativo de la integral, es:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \underbrace{\iint_R}_{\text{Doble integral sobre la región plana R}} \Bigg[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \Bigg] \underbrace{dA}_{\text{Diferencial de área}}$$

Al reducirse la triple integral a una doble integral sobre la región plana R, entonces queda al criterio del estudioso si empieza a integrar primero, respecto a "x" y después respecto a "y" o viceversa.

- Si el sólido D se proyecta sobre el plano XZ, se obtiene otra región plana E contenido en el plano XZ. En este caso:

  1° Despejamos "y" en función de (x,z), obteniéndose dos funciones $h_1(x,z)$ y $h_2(x,z)$.
  2° La triple integral iterada es:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \underbrace{\iint_E}_{\text{Integral doble sobre la región plana E}} \left[\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dA$$

- Si el sólido D se proyecta sobre el plano YZ, se obtiene otra región F contenido en plano YZ. En este caso:

  1° Despejar "x" en función de (y,z), obteniéndose dos funciones $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$
  2° La triple integral iterada es:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \underbrace{\iint_F}_{\text{Integral doble sobre la región F}} \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dA$$

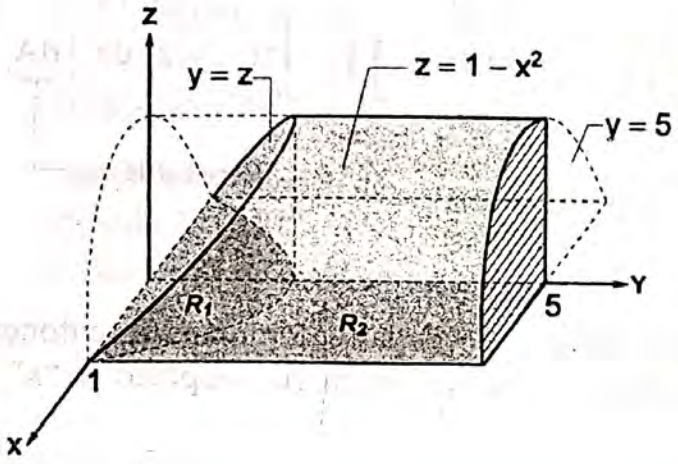
EJEMPLO 1 Calcular $\iiint_D x\,dv$, si D es el sólido limitado por las superficies:

$z = 1 - x^2$, $y = z$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 5$.

Solución:

Método 1

Proyectando el sólido D sobre el plano XY.



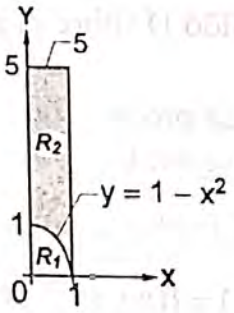
a) $z = 1 - x^2$ es un cilindro parabólico, perpendicular al plano XZ.

b) $z = 0$ es el plano XY.

c) $y = z$ es un plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano YZ.

d) $y = 5$ es un plano paralelo al plano XZ.

La proyección del sólido D sobre el plano XY, es la región R, cuyo gráfico es:



El sólido D es una región en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le z \le y\,,\ \underbrace{0 \le y \le 1 - x^2\,,\ 0 \le x \le 1}_{R_1}\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le z \le 1 - x^2\,,\ \underbrace{1 - x^2 \le y \le 5\,,\ 0 \le x \le 1}_{R_2}\}$$

La triple integral iterada es: $\iiint_D x\,dv = \iint_{R_1}\left[\int_0^y x\,dz\right]dA + \iint_{R_2}\left[\int_0^{1-x^2} x\,dz\right]dA$

Cada uno de estas integrales dobles, se puede desarrollar de dos formas .
Forma 1: primero respecto a "y" y segundo respecto a "x".
Forma 2: primero respecto a "x" y segundo respecto a "y".

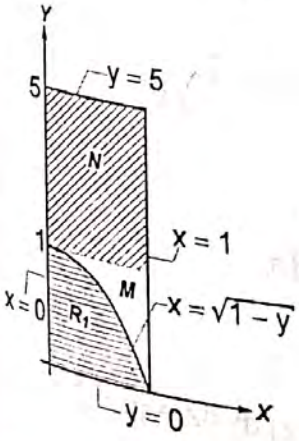
Forma 1

$$\iiint_D x\,dv = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xy\,dy\,dx + \int_0^1 \int_{1-x^2}^5 x(1-x^2)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{13}{12} = \frac{14}{12}$$

Forma 2

$$\iiint_D x\,dv = \iint_{R_1} xy\,dA + \iint_{R_2 = MUN} x(1-x^2)\,dA$$



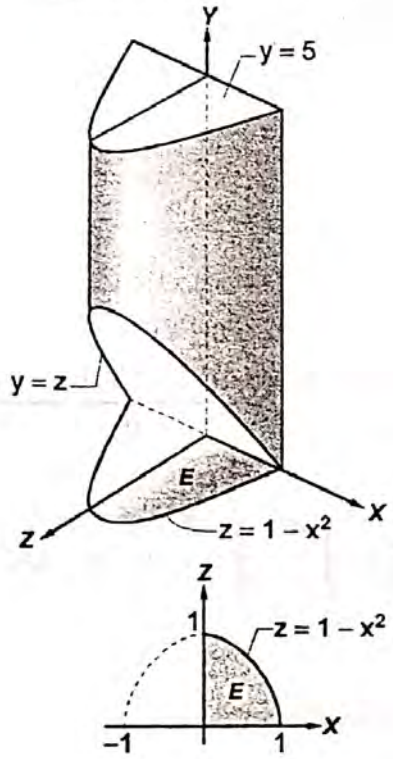
$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} xy\,dx\,dy + \iint_M x(1-x^2)\,dA + \iint_N x(1-x^2)\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} xy\,dx\,dy + \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y}}^1 x(1-x^2)\,dx\,dy + \int_1^5 \int_0^1 x(1-x^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 1$$

$$= \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Método 2 Proyectando el sólido D sobre el plano XZ



- La proyección del sólido D sobre el plano XZ, es la región E.
- El sólido D es una región en $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{z \le y \le 5 \,,\, 0 \le z \le 1 - x^2 \,,\, 0 \le x \le 1}_{E}\}$$

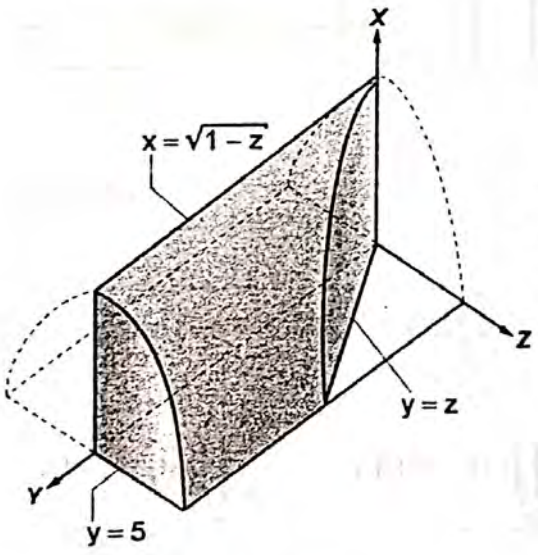
- La triple integral iterada es:

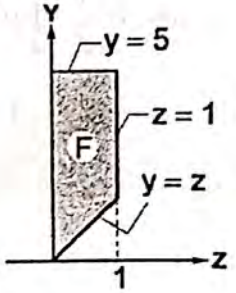
$$\iiint_D x\,dv = \iint_E \left[\int_z^5 x\,dy \right] dA$$

$$= \iint_E x\,(5-z)\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x(5-z)\,dz\,dx = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Método 3 Proyectando el sólido D sobre el plano YZ.





- La proyección del sólido D sobre el plano YZ, es la región F.
- El sólido D es una región en $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{0 \le x \le \sqrt{1-z} \,,\, z \le y \le 5 \,,\, 0 \le z \le 1}_{F}\right\}$$

- La triple integral iterada es:

$$\iiint_D x\,dv = \iint_F \left[\int_0^{\sqrt{1-z}} x\,dx \right] dA$$

$$= \iint_F \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-z}} dA$$

$$= \iint_F \frac{1}{2}(1-z)\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_z^5 \frac{1}{2}(1-z)\,dy\,dz = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Recomendaciones:

1° Para calcular integrales triples, buscar la mejor manera de proyectar el sólido sobre uno de los planos coordenados.

2° Graficar la región proyectada sobre uno de los planos. Sobre esta región plana se halla la doble integral.

3° Si las integrales triples son "muy laboriosas", pensar en aplicar las transformaciones en coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas.

9.8 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL TRIPLE

Si $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables sobre el conjunto acotado D, se cumplen las siguientes propiedades:

P_1. a) $\iiint_D k\, f(x,y,z)\, dv = k \iiint_D f(x,y,z)\, dv$; k = constante

b) $\iiint_D [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\, dv = \iiint_D f(x,y,z)\, dv \pm \iiint_D g(x,y,z)\, dv$

P_2. Si f y g son funciones integrables en el conjunto acotado D, tal que, $g(x,y,z) \le f(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in D$, entonces:

$$\iiint_D g(x,y,z)\, dv \le \iiint_D f(x,y,z)\, dv$$

P_3. Si f es una función integrable sobre los conjuntos acotados D_1 y D_2 con $D_1 \cap D_2 = \phi$, $D_1 \subset \mathbb{R}^3$, $D_2 \subset \mathbb{R}^3$, entonces f es integrable sobre $D_1 \cup D_2$ y

$$\iiint_{D_1 \cup D_2} f(x,y,z)\, dv = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\, dv + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\, dv$$

EJEMPLO 2 Calcular la siguiente integral iterada:

$$I = \int_1^2 \int_x^{2x} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{2xy}} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$$

Solución:

- La primera integral es respecto a z:

$$I = \int_1^2 \int_x^{2x} \left[\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{2xy}} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dz \right] dy\, dx$$

Porque la derivada del denominador respecto a z existe en el numerador, esto es $\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) = 2z$

Existe en el numerador

FALTA

la integral es el logaritmo natural del denominador

$$I = \int_1^2 \int_x^{2x} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(x^2+y^2+z^2) \right]_{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{2xy}} dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_x^{2x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\operatorname{Ln}\underbrace{(x^2+y^2+2xy)}_{(x+y)^2} - \operatorname{Ln}\underbrace{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)}_{1} \right] \right\} dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_x^{2x} \operatorname{Ln}(x+y)\, dy\, dx = \int_1^2 \left[\int_x^{2x} \operatorname{Ln}(x+y)\, dy \right] dx$$

Se integra por partes :

$$\mu = \operatorname{Ln}(x+y) \qquad dv = dy$$

$$d\mu = \frac{1}{x+y}\, dy \qquad v = y$$

$$= \int_1^2 \left[y \operatorname{Ln}(x+y) - \int \frac{y}{x+y}\, dy \right]_{y=x}^{y=2x} dx$$

Dividir respecto a y

$$= \int_1^2 \left[y \operatorname{Ln}(x+y) - \int \left(1 - \frac{x}{x+y}\right) dy \right] dx$$

$$= \int_1^2 \left[y \operatorname{Ln}(x+y) - y + x \operatorname{Ln}(x+y) \right]_{y=x}^{y=2x} dx$$

$$= \int_1^2 [2x\,\mathrm{Ln}\,(3x) - 2x + x\,\mathrm{Ln}\,(3x) - x\,\mathrm{Ln}\,(2x) + x - x\,\mathrm{Ln}\,(2x)\,]\,dx$$

$$= \int_1^2 [-x + 3x\,\underbrace{\mathrm{Ln}\,(3x)}_{\text{Por partes}} - 2x\,\underbrace{\mathrm{Ln}\,(2x)}_{\text{Por partes}}\,]\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^2}{2}\mathrm{Ln}\,3x - \frac{x^2}{4} \right) - 2\left(\frac{x^2}{2}\mathrm{Ln}\,2x - \frac{x^2}{4} \right) \right]$$

$$= \left[-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x^2\,\mathrm{Ln}3x - x^2\,\mathrm{Ln}2x \right]_{x=1}^{x=2} = -\frac{9}{4} + \mathrm{Ln}\left(\frac{81\sqrt{3}}{2} \right)$$

EJEMPLO 3 Calcular la siguiente integral iterada:

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

Solución:

La primera integral es respecto a "z", la segunda integral es respecto a "r" y la tercera integral es respecto a "θ".

Entonces hacemos:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r\,dr \left[\int_0^{r} dz \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r\,dr\,[r] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^2\,dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=2\,\mathrm{sen}\,\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{1}{3}(8\,\mathrm{sen}^3\,\theta - 0) \right]$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^3\,\theta\,d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\,(1 - \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta]\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \left[-\cos\theta + \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}$$

EJEMPLO 4 Calcular la siguiente integral iterada:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Solución:

En este caso, la primera integral es respecto a "ρ", la segunda integral es respecto a "ϕ" y la tercera integral es respecto a "θ" .

Entonces, hacemos:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\phi}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \left[\frac{1}{3} \cdot 8a^3 \cos^3\phi \right]$$

$$= \frac{8}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi \, d\phi$$

$$= \frac{8}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{\cos^4\phi}{4} \right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{1}{4}\left(\cos^4\frac{\pi}{4} - \cos^4 0 \right) \right]$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{4} \quad - \quad 1$$

$$= \frac{8}{3}a^3 \cdot \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8}{3}a^3 \cdot \frac{3}{16} \cdot 2\pi = a^3\pi$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

♦ *Calcular las siguientes integrales triples:*

01. $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

02. $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ donde el recinto V está limitado por las superficies $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

03. $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

04. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$,

donde el recinto V está limitado por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

05. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$

06. Pasar a coordenadas esféricas en la integral

$$\iiint_V f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) dx\,dy\,dz$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

07. Efectuando el cambio de variables correspondiente, calcular la integral triple

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la parte interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

08. Pasando a coordenadas cilíndricas, calcular la integral

$\iiint_V (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$ donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$

09. Calcular la integral $\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$, $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$

10. Hallar la integral $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$,

donde el recinto V está situado en el

octante $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ y está limitado por las superficies:

$z = \frac{x^2+y^2}{m}$, $z = \frac{x^2+y^2}{n}$, $xy = a^2$,

$xy = b^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$

$(0 < a < b)$, $(0 < \alpha < \beta)$, $(0 < m < n)$

11. Hallar

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+2y+3z)^2 \, dz\,dy\,dx$$

◆ ***Calcular las siguientes integrales:***

12. $\iiint_R xyz \, dz\,dy\,dx$, donde

$R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

13. $\iiint_R (x+y+z) \, dx\,dy\,dz$, donde

$R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

14. $\iiint_R (1-x-y-z) \, dx\,dy\,dz$, donde

R es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$

15. $\iiint_R z(x-1)(y-2) \, dx\,dy\,dz$,

donde R es la región en el primer octante y el plano $x + y + z = 1$

16. $\iiint_R \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \, dx\,dy\,dz$, donde R es la parte de la región del primer octante y por la gráfica de $|x|+|y|+|z| = 1$

17. $\iiint_R e^{x+y+z} \, dx\,dy\,dz$, donde

$R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

18. $\iiint_R (xe^y + ye^z) \, dx\,dy\,dz$, donde

R es la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 1 - x$, $z = 1$

19. Calcular $\int_0^3 \int_{x^2}^{3x} \int_{x^2+y^2}^{4x^2+4y^2} dz\,dy\,dx$

(aplicar coordenadas cilíndricas)

20. Calcular $\iiint_R f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$,

donde $f(x,y,z) = K\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + 1$

sobre la región $R \subset IR^2$ encerrada por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(aplicar coordenadas cilíndricas generalizadas):

$x = \arccos\theta$, $y = br\,\text{sen}\theta$, $z = c\tilde{z}$

21. Calcular $\iiint_R dx\,dy\,dz$ sobre la región R en el primer octante limitada por la superficie $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^4 = \frac{xyz}{abc}$

(Aplicar coordenada esférica, generalizadas, (r, θ, ϕ) definida por: $x = \arccos^{\alpha}\theta \text{sen}^{\beta}\phi$, $y = br\,\text{sen}^{\alpha}\theta\,\text{sen}^{\beta}\phi$, $z = cr\cos^{\beta}\phi$.

$$\text{Jacobiano} = -abc\,\alpha\beta r^2 \cos^{\alpha-1}\theta \operatorname{sen}^{\alpha-1}\theta \cos^{\beta-1}\phi \operatorname{sen}^{2\beta-1}\phi$$

22. Calcular:

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

23. Calcular:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

24. Pruebe que:

$$\int_0^a \int_0^z \int_0^y g(x)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 g(x)\,dx$$

25. Calcular $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde

Ω es el cilindro $x^2 + y^2 \le 1, -1 \le z \le 1$

26. Calcular $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde

Ω es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

27. Hallar $\iiint_S \left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^{1/2} dv$,

donde S es el material de esfera de radio 4 y centro (1,2,3) que tiene un ángulo diametral de radio 2 (agujero diametral es un cilindro circular recto cuyo eje es un diámetro de la esfera).

28. Evaluar $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dz\,dx\,dy$, directamente, y utilizando coordenada, cilíndricas.

29. Hallar $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} k\,zr\,dz\,dr\,d\theta$,

K = constante

30. Hallar:

$$I = K\int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (\rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho$$

◆ En los ejercicios 31- 36 ;

a) Dibújese el sólido S, que es la región de integración,

b) Calcular la integral correspondiente.

31. $\int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r\cos\theta\,dr\,d\theta\,dz$

32. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos^2\theta} \int_0^{4-r^2} r\operatorname{sen}\theta\,dz\,dr\,d\theta$

33. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 e^{-\rho^3}\rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

34. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

35. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{e-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

◆ En los ejercicios 37 - 40, pasar a coordenadas cilíndricas y esféricas:

37. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx$

38. $\int_{a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx$

39. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

40. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

SOLUCIONES

01. $\frac{1}{364}$ **02.** $\frac{1}{2}\text{Ln}\,2-\frac{5}{16}$ **03.** $\frac{1}{48}$ **04.** $\frac{4}{5}\pi abc$

05. $\frac{\pi}{6}$ **06.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_{0}^{\text{arctg}\frac{1}{\cos\phi}}\cos\theta\,d\theta\int_{\frac{\text{scn}\,0}{\cos^2 0}}^{\frac{1}{\cos\phi\cos 0}} r^2 f(r)\,dr$ **07.** $\pi^2\,\frac{abc}{4}$

08. $\frac{16\pi}{3}$ **09.** $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$

10. $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\text{Ln}\frac{\beta}{\alpha}\right]$

11. $\frac{5}{12}$ **12.** $^1/_8$

13. $^3/_2$ **14.** $^1/_{24}$

15. $^{43}/_{720}$ **16.** $\frac{\text{Ln}2}{2}-\frac{5}{16}$

17. $e^3-3e+3e^{-1}-e^{-3}$

18. $\frac{7e}{6}-\frac{8}{3}$ **19.** $\frac{9477}{35}$

20. $4\pi abc\left(\frac{8k+18}{45}\right)$ **21.** $\frac{abc}{554400}$

22. $\frac{8}{9}a^2$ **23.** $\frac{\pi}{8}$

25. $\pi\left[3\sqrt{10}+\text{Ln}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}+8\right]$

26.

27. $\left(\frac{64}{3}\pi+8\sqrt{3}\right)2\pi$

28. $\frac{(4-\pi)}{8\sqrt{3}}$ **29.** $16\pi k$

30. $\frac{81k\pi}{8}$

31. 8

32. $^{52}/_{45}$

33. $\frac{\pi^2}{6}(1-e^{-8})$

34. 0

35. $\frac{\pi}{4}(1-e^{-9})$

36. $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$

37. Cilíndricas :
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

esféricas :
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\sec\phi} \rho^3\,\text{sen}^2\,\phi\cos\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta\;;\;0$$

38. Cilíndricas :
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

esféricas :
$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi} \rho^3\,\text{sen}^2\,\phi\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi\;;\;0$$

9.9 VOLUMEN MEDIANTE INTEGRALES TRIPLES

Definición

Sea D una región cerrada y acotada en $\mathbb{R}^3$.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x,y,z) = 1$, $\forall\ (x,y,z) \in D$.

El volumen de la región D es: $\boxed{V(D) = \iiint_D dV}$

EJEMPLO 1

Hallar el volumen del sólido D limitado por las gráficas de las siguientes superficies: $z = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x - x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$, $z = 0$; en el primer octante.

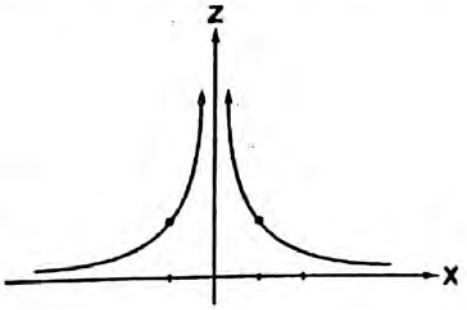
Solución:

Paso 1 Esbozar un gráfico del sólido D.

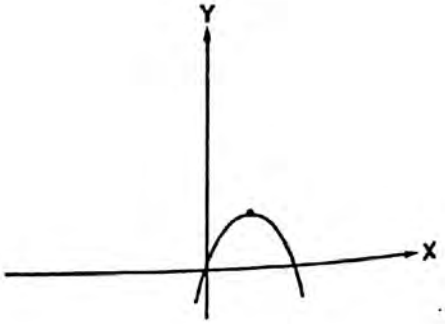
- Las gráficas de: $z = \frac{2}{x^2}$ y de $y = 2x - x^2$ en $\mathbb{R}^3$ son cilindros rectos.

$$y = -(x^2 - 2x + \ldots)$$
$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 1$$
$$y = -(x - 1)^2 + 1$$

a) La proyección del cilindro: $z = \frac{2}{x^2}$ sobre plano xz es la siguiente curva:



b) La proyección del cilindro $y = -(x - 1)^2 + 1$ sobre el plano XY, es una parábola.

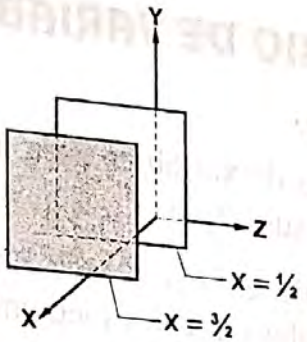


c) La gráfica de $x = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{R}^3$, es un plano paralelo al plano YZ.

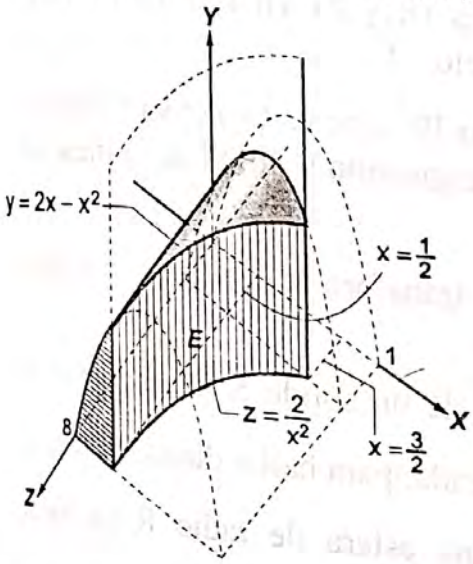
d) $x = \frac{3}{2}$, es un plano paralelo al plano YZ.

e) $y = 0$, es el plano XZ.

f) $z = 0$, es el plano XY.

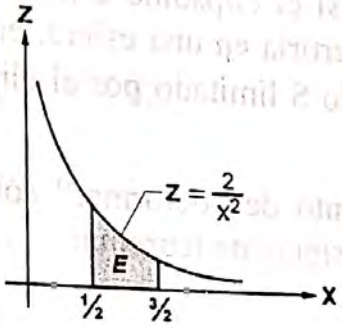


Entonces el gráfico del sólido D es:



Paso 2 Conviene proyectar el sólido D sobre el plano XZ.

- El techo es $y = 2x - x^2$
- El piso es $y = 0$
- La proyección del sólido D sobre el plano XZ es la región plana E, cuyo gráfico es:



Paso 3 El volumen del sólido D es:

$$V(D) = \int_{1/2}^{3/2} \int_{0}^{\frac{2}{x^2}} \int_{0}^{2x-x^2} dy\, dz\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} \int_{0}^{2/x^2} [2x - x^2]\, dz\, dx = \int_{1/2}^{3/2} (2x - x^2)\left(\frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{4}{x} - 2\right) dx = 4\,Lnx - 2x \Big|_{x=1/2}^{x=3/2} = 4Ln3 - 2$$

9.10 CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES TRIPLES

Introducción:

El cambio de variables para integrales triples tiene un sentido geométrico muy interesante y sugestivo.

Se trata de expresar cada una de las variables (x,y,z) en función de otras nuevas variables (u,v,w) mediante una transformación T.

Esta transformación T es una función de IR^3 en IR^3 que es biyectiva y tiene la propiedad geométrica de "deformar" un sólido S complicado y difícil de graficar en otro sólido S^* sencillo y fácil de graficar.

Este procedimiento, también nos permite transformar integrales triples complicados en integrales triples fáciles de calcular.

Por ejemplo, si quisiéramos hallar el volumen de un sólido S limitado por el elipsoide $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, no hay fórmula conocida, para hallar directamente, el volumen de este sólido. Pero, el volumen de una esfera de radio R se halla mediante la fórmula conocida, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

En este caso, si el elipsoide ε lo deformamos "inflándola" como si fuera una pelota hasta convertirla en una esfera, entonces ya podríamos hallar, fácilmente, el volumen del sólido S limitado por el elipsoide ε en base al volumen de una esfera de radio R.

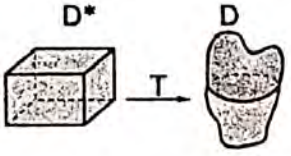
El procedimiento de "deformar" sólidos complicados en sólidos sencillos es posible gracias al siguiente teorema:

TEOREMA

Sea D^* y D regiones cerradas en IR^3 y

$T: D^* \longrightarrow D$ una transformación biyectiva, continua y diferenciable

$(\mu,v,w) \longrightarrow T(\mu,v,w) = (x(\mu,v,w)\ ,\ y(\mu,v,w)\ ,\ z(\mu,v,w))$



tal que $J(\mu,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\mu,v,w)} \neq 0$

↑ Jacobiano de la transformación T

Sea $f: D \subset IR^3 \longrightarrow IR$ una función integrable en D. Entonces la función compuesta $f \circ T : D^* \subset IR^3 \longmapsto IR$ es integrable y

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \iiint_{D^*} f\big(x(\mu,v,w)\ ,\ y(\mu,v,w)\ ,\ z(\mu,v,w)\big)\,|J(\mu,v,w)|\,d\mu\,dv\,dw$$

↑ Valor absoluto del Jacobiano

EJEMPLO 1 Calcular el volumen del sólido D encerrado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Solución:

Paso 1 Se pide hallar $V(D)=\iiint_D dv$

Paso 2 Hagamos el siguiente cambio de variables: $\begin{cases}\frac{x}{a}=\mu \Rightarrow x=a\mu\\ \frac{y}{b}=v \Rightarrow y=bv\\ \frac{z}{c}=w \Rightarrow z=cw\end{cases}$

Con este cambio de variables hemos conseguido tres cosas:

1° Haber convertido el elipsoide de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

en la esfera $\mu^2+v^2+w^2=1$

2° Haber definido la *TRANSFORMACIÓN T*, del siguiente modo:

$$T: D^* \longrightarrow D$$
$$(\mu,v,w) \longmapsto T(\mu,v,w)=(a\mu,\ bv,\ cw)$$

3° El Jacobiano de la *TRANFORMACIÓN T* es:

$$J(\mu,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\mu,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial\mu} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc$$

Paso 3 Ahora, el volumen del sólido D es:

$$V(D)=\iiint_D dv=\iiint_{D^*}\underbrace{abc}_{\text{Jacobiano}}\,d\mu\,dv\,dw$$
$$=abc\underbrace{\iiint_{D^*}d\mu\,dv\,dw}_{\text{Volumen del sólido } D^* \text{ encerrado por la superficie esférica de radio 1}}=abc\,\frac{4}{3}\pi(1)^3=\frac{4}{3}abc\,\pi$$

Observaciones: En el ejemplo 1, tenemos

1. El sólido D está limitado (encerrado) por el elipsoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2. El sólido D^* está limitado (encerrado) por la esfera : $\mu^2+v^2+w^2=1$

3. La transformación T es la función $T: D^* \longrightarrow D$

4. El valor absoluto del Jacobiano $|J(\mu,v,w)| = abc$ "corrige" el volumen del sólido D, en el momento de la "deformación". El Jacobiano es un factor de corrección.

- Las transformaciones más importantes y usuales son: la transformación de coordenadas cilíndricas a rectangulares y la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares.

9.11 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Sean D^* y D regiones cerradas en IR^3 si hacemos el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

queda definido la ***TRANSFORMACIÓN*** .

$$T: D^* \longrightarrow D$$
$$(r,\theta,z) \longmapsto T(r,\theta,z) = (r\cos\theta\,,\, r\,\text{sen}\theta\,,\, z)$$

cuyo ***JACOBIANO*** es: $$J(r,\theta,z)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r$$

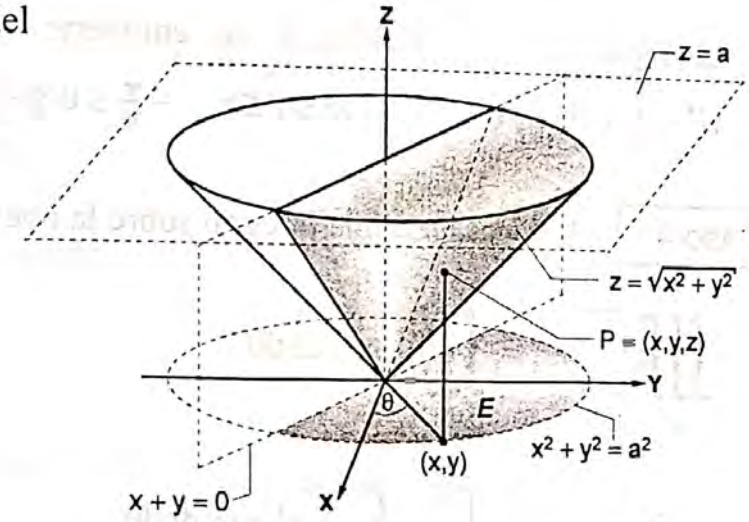
Sea la función $f: D \subset IR^3 \longrightarrow IR$ una función integrable en D. Entonces la función compuesta $f \circ T: D^* \longrightarrow IR$ es integrable y:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \iiint_{D^*} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,\underbrace{r}_{\text{Jacobiano}}\,dz\,dr\,d\theta$$

EJEMPLO 1 Calcular $\iiint_U e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dv$, donde U es el sólido interior a la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y limitado por los planos, $x+y=0$, $z=a$, $a>0$

Solución:

Paso 1 Hacer un esbozo del gráfico del sólido U.

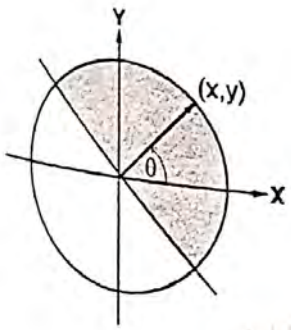


a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ es un cono.

b) $x+y=0$, es un plano que pasa por el origen y es perpendicular al plano XY.

c) $z=a$ es un plano paralelo al plano XY.

Paso 2 Conviene proyectar el sólido sobre el plano XY.



E = es la proyección del sólido sobre el plano XY.

Al sustituir $z=a$ en el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ se obtiene:

$$a=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$a^2=x^2+y^2$$

Paso 3 Hacer uso de las coordenadas cilíndricas.

La transformación es $T:\begin{cases} x=r\cos\theta\ ,\ x^2+y^2=r^2 \\ y=r\operatorname{sen}\theta \\ z=z \end{cases}$

El *JACOBIANO* de T es $\boxed{J=r}$

a) La ecuación $x^2+y^2=a^2$ se convierte en: $r^2=a^2 \Rightarrow \boxed{r=a}$

b) El plano $z = a$ se convierte en $\boxed{z = a}$

c) El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se convierte en $\boxed{z = r}$

d) El plano: $x + y = 0$ se convierte en: $r\cos\theta + r\,\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \text{tg}\theta = -1 \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{4} \\ \theta = 3\pi/4 \end{cases}$

e) La región U se deforma y se convierte en la nueva región U^* que es

$$U^* = \left\{(r,\theta,z) \Big/ r \le z \le a \ , \ 0 \le r \le a \ , \ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Paso 4 Entonces la triple integral sobre la nueva región U^*, es:

$$\iiint_U e^{\sqrt{x^2+y^2}} = \iiint_{U^*} e^r \, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^a \int_r^a e^r \, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^a re^r dr \int_r^a dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^a re^r dr\,(a - r)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^a (a\,re^r - r^2 e^r)\,dr = [e^a(a-1) + a + 1]\,\pi$$

Por partes Por partes

EJEMPLO 2 Calcular $\iiint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde D es el sólido exterior al cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 = z + 12$, $x + y \ge 0$.

Solución:

Paso 1 Hacer un esbozo de la gráfica del sólido D:

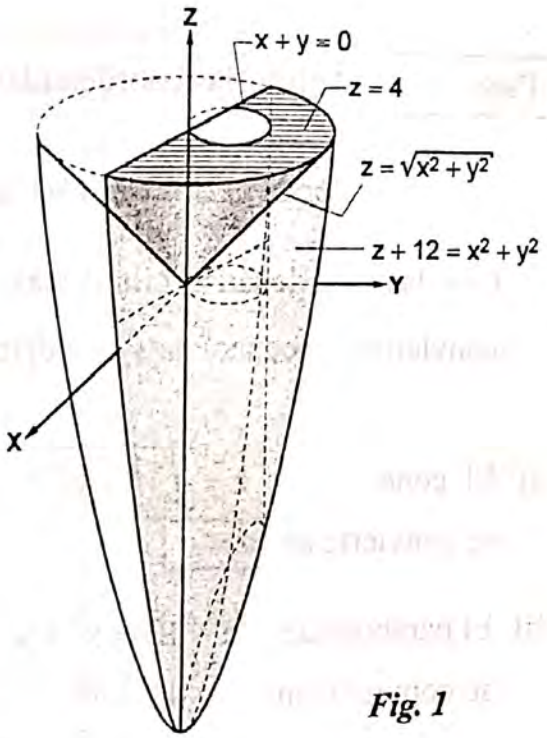


Fig. 1

a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (es un cilindro circular)

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (es un cono)

c) $x^2 + y^2 = z + 12$ (es un paraboloide)

donde $z + 12 \geq 0$

$z \geq -12$

e) $x + y = 0$ (es un plano que pasa por el origen y es perpendicular al plano XY)

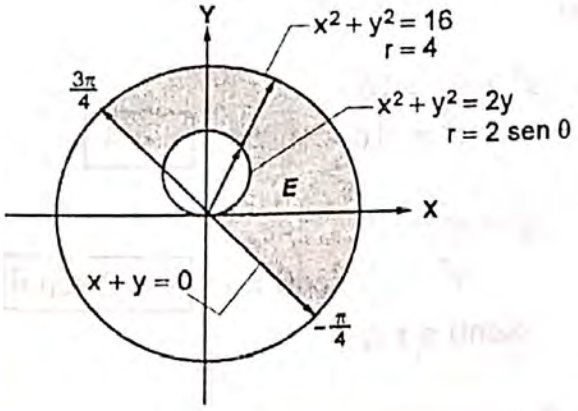


Fig. 2

f) Al intersectar el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ con el paraboloide $x^2 + y^2 = z + 12$ se obtiene: $z^2 = z + 12 \iff z^2 - z - 12 = 0$

$\iff (z-4)(z+3) = 0$ $\begin{cases} \boxed{z = 4} \\ z = -3 \end{cases}$

Al sustituir $z = 4$ en el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (o en el paraboloide) se obtiene $x^2 + y^2 = 16$ (que es un plano circular contenido en el plano $z = 4$)

g) La proyección del sólido D sobre el plano XY, se obtiene la región E. (*ver fig. 2*)

Paso 2 Aplicar las coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$

donde el *JACOBIANO* es $J = r$.

Con las coordenadas cilíndricas, las ecuaciones cartesianas de las superficies se convierten en ecuaciones cilíndricas:

a) El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Techo)
se convierte en $\boxed{z = r}$

b) El paraboloide $z + 12 = x^2 + y^2$ (Piso)
se convierte en: $z + 12 = r^2$
$z = r^2 - 12$
Así tenemos que: $\boxed{r^2 - 12 \le z \le r}$

c) En la región E, se tiene:

- El círculo : $x^2 + y^2 = 16$
  se convierte en : $r^2 = 16 \Rightarrow \boxed{r = 4}$

- El círculo : $x^2 + y^2 = 2y$
  Se convierte en : $r^2 = 2r\,\text{sen}\theta \Rightarrow \boxed{r = 2\,\text{sen}\,\theta}$
  Así tenemos : $2\text{sen}\theta \le r \le 4$

- La recta $x + y = 0$ se convierte en:

$$r\cos\theta + r\,\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \text{tg}\theta = -1 \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Así tenemos: $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$

d) La nueva región sobre la cual vamos a integrar es:

$$D^* = \left\{(r,\theta,z) \,/\, r^2 - 12 \le z \le r \;,\; 2\,\text{sen}\,\theta \le r \le 4 \;,\; -\tfrac{\pi}{4} \le \theta \le \tfrac{3\pi}{4}\right\}$$

Paso 3 La triple integral en coordenadas cilíndricas es:

$$\iiint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} (r\cos\theta\, r)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} \int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4} \int_{r^2-12}^{r} r^3\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

La integral iterada está dado en el siguiente orden: La primera integral es respecto a z, la segunda integral es respecto a r y la tercera integral es respecto a θ

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} \cos\theta\,d\theta \int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4} r^3 dr \int_{r^2-12}^{r} dz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} \cos\theta\,d\theta \int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4} r^3\,dr\,[r-r^2+12]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta \int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4} [r^4 - r^5 + 12r^3]\,dr = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6} + 3r^4\right]_{r=2\operatorname{sen}\theta}^{r=4}$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left\{\left[\tfrac{1}{5}\cdot 4^5 - \tfrac{1}{6}\cdot 4^6 + 3\cdot 4^4\right] - \left[\tfrac{1}{5}\cdot 2^5\operatorname{sen}^5\theta - \tfrac{1}{6}\cdot 2^6\operatorname{sen}^6\theta + 3\cdot 2^4\operatorname{sen}^4\theta\right]\right\} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} \left\{\tfrac{167}{5}\cdot 4^4 - \tfrac{35}{5}\operatorname{sen}^5\theta + \tfrac{32}{3}\operatorname{sen}^6\theta - 48\operatorname{sen}^4\theta\right\} d\theta$$

$$= \tfrac{167}{5}\cdot 4^4\theta - \tfrac{35}{5}\int \operatorname{sen}^5\theta\,d\theta + \tfrac{32}{3}\int \operatorname{sen}^6\theta - 48\int \operatorname{sen}^4\theta\,d\theta$$

$$= \tfrac{167}{5}\cdot 4^4\pi - \tfrac{35}{3}\left[-\cos\theta + \tfrac{2}{3}\cos^3\theta - \tfrac{1}{5}\cos^5\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=3\pi/4}$$

$$+ \tfrac{32}{3}\cdot\tfrac{1}{8}\left[\theta - \tfrac{3}{2}\operatorname{sen}2\theta + \tfrac{3}{2}\theta + \tfrac{3}{8}\operatorname{sen}4\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}}$$

$$- 48\left[\tfrac{3}{8}\theta - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen}4\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 410.31$$

9.12 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Sean D y D^* regiones cerradas en $\mathbb{R}^3$ si hacemos el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

queda definida la transformación:

$T: D^* \longrightarrow D$

$(\rho,\theta,\phi) \longmapsto T(\rho,\theta,\phi) = (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta\ ,\ \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\ ,\ \rho\cos\phi)$; cuyo *JACOBIANO* es

$$J(\rho,\theta,\phi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Sea la función $f: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en D. Entonces la función compuesta $f \circ T: D^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \iiint_{D^*} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta\ ,\ \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\ ,\ \rho\cos\phi)\,\underbrace{\rho^2\operatorname{sen}\phi}_{\text{Jacobiano en valor absoluto}}\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

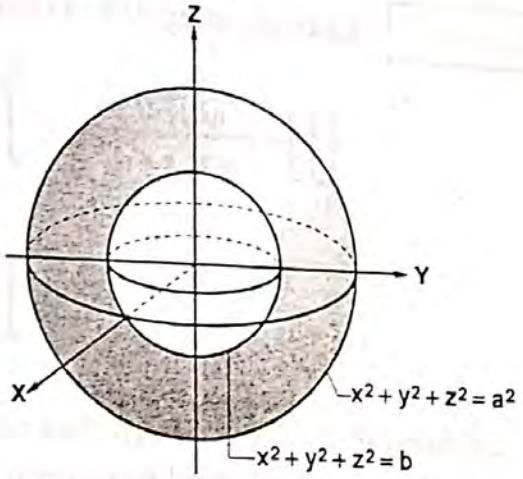
EJEMPLO 1 Calcular $\iiint_U \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, siendo U la región entre $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

Solución:

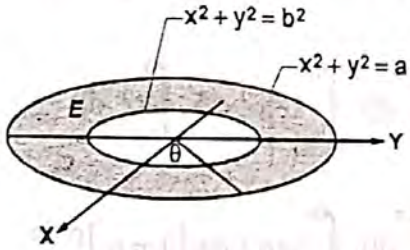
Paso 1 Hacer un esbozo del sólido U.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (esfera)

b) $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ (esfera)



Paso 2 La proyección del sólido U sobre el plano XY es la región plana E.



Paso 3 Porque en el integrando se tiene una función que tiene los términos $x^2 + y^2 + z^2$ y el sólido U está limitado por dos esferas, conviene usar las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \text{donde:} \quad \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2}$$

El *JACOBIANO* en valor absoluto es $J = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$

Con las coordenadas esféricas, las ecuaciones cartesianas de las superficies se convierten en ecuaciones esféricas:

a) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ se convierte en $\rho^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{\rho = a}$

b) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ se convierte en $\rho^2 = b^2 \Rightarrow \boxed{\rho = b}$
Así tenemos: $b \le \rho \le a$

c) La variación de ϕ es: $0 \le \phi \le \pi$

d) La variación de θ es: $0 \le \theta \le 2\pi$

e) La región U se deforma y se convierte en la nueva región
$U^* = \{ (\rho, \theta, \phi) / b \le \rho \le a , 0 \le \phi \le \pi , 0 \le \theta \le 2\pi \}$

Paso 4 La triple integral en coordenadas esféricas es:

$$\iiint_U \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{U^*} \frac{1}{\rho^3}\cdot \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}_{\text{Jacobiano}} \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

La integral iterada se desarrolla en el siguiente orden: la primera integral es respecto a ρ, la segunda integral es respecto a ϕ y la tercera integral es respecto a θ.

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_b^{a} \frac{1}{\rho}\, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \left[\operatorname{Ln}\rho\right]_{\rho=b}^{\rho=a}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \left[\operatorname{Ln}a - \operatorname{Ln}b\right] = \left(\operatorname{Ln}\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= \left(\operatorname{Ln}\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \left(\operatorname{Ln}\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \left[\underbrace{-\cos\pi}_{1} + \underbrace{\cos 0}_{1}\right]$$

$$= 2\operatorname{Ln}\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \left[2\operatorname{Ln}\left(\frac{a}{b}\right)\right]\left[2\pi - 0\right] = 4\pi \operatorname{Ln}\left(\frac{a}{b}\right)$$

EJEMPLO 2 Hallar el volumen del sólido encerrado por $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right)^2 = \frac{x}{2}$

Solución:

Paso 1 La discusión de la gráfica queda como ejercicio

Paso 2 En general, cuando se tiene los términos de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{c^2}{c^2}$

Se aplica las transformaciones esféricas modificadas, que son:

$$\begin{cases} x = a\ \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = b\ \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = c\ \rho \cos\phi \end{cases}, \quad \text{donde } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\rho^2$$

El *JACOBIANO* es $J = abc\ \rho^2 \operatorname{sen}\phi$

Para el problema que tenemos, se hace la transformación

$$T: \begin{cases} x = 2\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = 3\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}, \quad \text{donde } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=\rho^2$$

El *JACOBIANO* es $J = 6\ \rho^2 \operatorname{sen}\phi$

- Con la transformación T, la ecuación $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right)^2 = \frac{x}{2}$ se convierte en:

$$(\rho^2)^2 = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$

$$\rho^3 = \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$

$$\rho = \sqrt[3]{\operatorname{sen}\phi \cos\theta}$$

- Así obtenemos que el recorrido de ρ es: $0 \le \rho \le \sqrt[3]{\operatorname{sen}\phi \cos\theta}$

- De la ecuación $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right)^2 = \frac{x}{2}$

deducimos que $\frac{x}{2} \ge 0$, porque la expresión al cuadrado es ≥ 0

$$x \ge 0$$

$$2\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \ge 0$$

$$\operatorname{sen}\phi \cos\theta \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\ \operatorname{sen}\phi \ge 0 \ \wedge\ \cos\theta \ge 0\ \right] \ \vee\ \left[\ \operatorname{sen}\phi \le 0 \ \wedge\ \cos\theta \le 0\ \right]$$

$$\left[0 \le \phi \le \pi \wedge \left(0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\right)\right] \ \vee\ \left[\theta = \{0, \pi\} \ \wedge\ \cos\theta \le 0\right]$$

Hay unión de dos intervalos simétricos. Esto implica que se duplique la integral

Aquí no se obtienen intervalos.

Paso 3 El volumen del sólido es: $\iiint_S dv = \iiint_{S^*} 6\rho^2 \operatorname{sen}\phi \cdot d\rho\, d\phi\, d\theta$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt[3]{\operatorname{sen}\phi \cos\theta}} 6\rho^2 \operatorname{sen}\phi \cdot d\rho \cdot d\phi\, d\theta$$

La integral iterada es en el siguiente orden:
La primera integral es respecto a ρ, la segunda integral es respecto a ϕ y la tercera integral es respecto a θ.

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_0^{\sqrt[3]{\operatorname{sen}\phi\cos\theta}} \rho^2 d\rho = 2\pi$$

EJEMPLO 3 Hallar el volumen de la región limitada inferiormente por la superficie $4(x^2 + y^2) = z^4$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Solución:

Paso 1 Hacer un esbozo de la gráfica de: $4(x^2 + y^2) = z^4$
Discutir la ecuación:

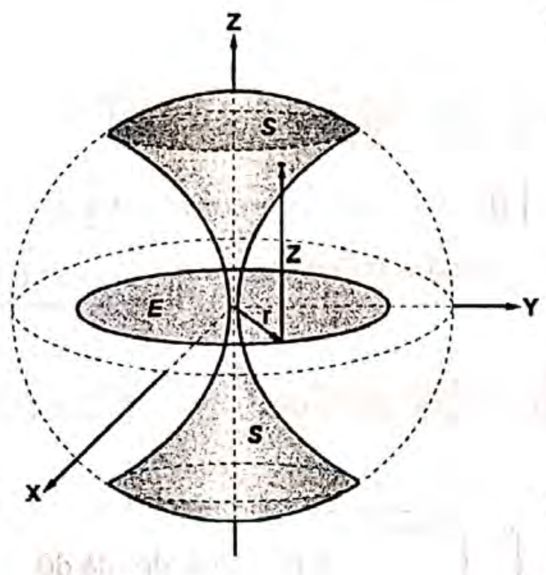
a) Se cumple que: $4(x^2 + y^2) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
También se cumple que $z^4 \geq 0$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$.

b) Si $z = 0$, se tiene: $4(x^2 + y^2) = 0$, entonces $x = 0$, $y = 0$. Lo cual indica que el sólido pasa por el origen (0,0,0)

c) Algunas curvas de nivel se obtienen del siguiente modo:

i) para $z = 1$ se tiene $4(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1/4$
ii) para $z = 2$ se tiene $4(x^2 + y^2) = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
iii) para $z = -1$ se tiene $4(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1/4$
iv) para $z = -2$ se tiene $4(x^2 + y^2) = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

d) Si $y = 0$, se obtiene : $4x^2 = z^4 \iff 2x = z^2 \vee 2x = -z^2$
Si $x = 0$, se tiene : $4y^2 = z^4 \iff 2y = z^2 \vee 2y = -z^2$



e) La intersección de las superficies

$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) = z^4 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 - z^2 & \ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

(2) en (1):
$$4(3 - z^2) = z^4$$
$$z^4 + 4z^2 - 12 = 0$$
$$(z^2 + 6)(z^2 - 2) = 0$$
$$\Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$$

- Cuando $z = \sqrt{2}$ en (1): $x^2 + y^2 = 1$
- Cuando $z = -\sqrt{2}$ en (1): $x^2 + y^2 = 1$

Paso 2 Conviene usar coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$

$x^2 + y^2 = r^2$

El JACOBIANO es $J = r$

a) La ecuación: $4(x^2 + y^2) = z^4$ se convierte en:

$$4r^2 = z^4$$
$$z = \sqrt{2r}$$

b) La ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ se convierte en:

$$r^2 + z^2 = 3$$
$$z = \sqrt{3 - 2r}$$

El recorrido es z es: $\sqrt{3 - r^2} \le z \le \sqrt{2r}$

c) La proyección del sólido sobre el plano xy es la región plana E limitada por la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$ de radio $r = 1$.

El recorrido de r es : $0 \le r \le 1$

El recorrido de θ es : $0 \le \theta \le 2\pi$

Paso 3 La nueva integral es sobre la región deformada S^*, esto es:

$$V(S) = \iiint_S dv = 2\iiint_{S^*} r\,dz\,dr\,d\theta$$

donde $S^* = \left\{ (r,\theta,z) \Big/ \sqrt{2r} \le z \le \sqrt{3 - r^2}\ ,\ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$

Entonces:

$$2\iiint_{S^*} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{\sqrt{2r}}^{\sqrt{3-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

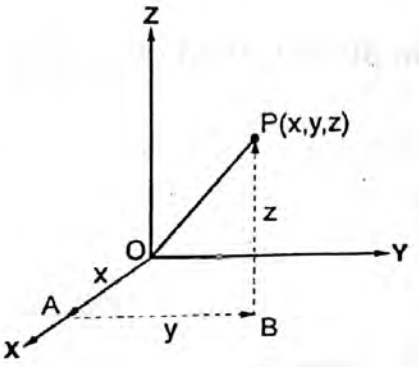
$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_{\sqrt{2r}}^{\sqrt{3-r^2}} dz$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} \left[\sqrt{3-r^2} - \sqrt{2r} \right] r\, dr$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \left[\sqrt{3-r^2}\; r - \sqrt{2}\; r^{3/2} \right] dr = \frac{4}{15}\pi\left(15\sqrt{2} - 16\sqrt{3}\right)$$

> ***Nota:***
> Algo muy importante que el lector debe tener en cuenta es diferenciar el movimiento de cada componente de las coordenadas cartesianas (x,y,z), de las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) y de las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ)

COORDENADAS RECTANGULARES



Para llegar al punto (x,y,z), las componentes rectangulares: x, y, z se mueven perpendicularmente.

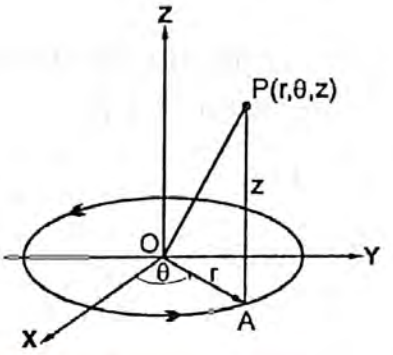
Sean:

$$\overrightarrow{OA} = x\,,\ \overrightarrow{AB} = y\,,\ \overrightarrow{BP} = z$$

Se cumple:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BP}.$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS



El radio vector $\overrightarrow{OA} = r$ se mueve dando vueltas circulares en el plano XY. Se *estira* del origen "O" hasta el punto A perteneciente a una curva en el plano XY.

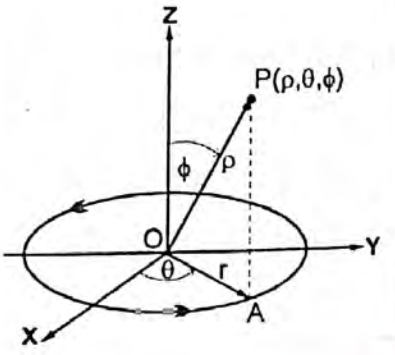
La medida de "θ" en radianes depende del movimiento radial del radio vector $\overrightarrow{OA} = r$

Si el radio vector da una vuelta completa, entonces $0 \le \theta \le 2\pi$.

$Z = \overline{AP}$ siempre se mueve verticalmente:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AP}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS



$\rho = \overrightarrow{OP}$ se mueve radialmente manteniéndose fijo en su punto de aplicación "O" (que es el origen de coordenadas) y su extremo P es un punto de $\mathbb{R}^3$.

Cada vez que se mueve el radio vector $\overrightarrow{OP} = \rho$, las medidas de los ángulos ϕ y θ varían

$$(0 \le \phi \le \pi \ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi).$$

El radio vector $\overrightarrow{OA} = r$ se mueve circularmente en el plano XY, se *estira* desde "O" hasta A. La medida del ángulo θ es desde $\overrightarrow{OX}$ hasta $\overrightarrow{OA}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

VOLUMEN DE UN SOLIDO

En los problemas del 1 al 2, dibujar los cuerpos cuyos volúmenes se expresan por las integrales triples:

01. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$

02. $\int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} dz\,dy\,dx$

- Usando integrales triples, hallar el volumen de la región descrita en cada uno de los siguientes ejercicios.

03. La región en el primer octante limitada por las gráficas de:

$\{(x,y,z)/x^2 + y^2 = 4\}$ y

$\{(x,y,z)/y^2 + z^2 = 4\}$

04. La región limitada por las gráficas de:

$\{(x,y,z)/z = x^2 + 2y^2\}$;

$\{(x,y,z)/x + y = 1\}$

y los planos de coordenadas.

05. La región limitada por los cilindros con ecuaciones: $x^2 = 4 - 4z$ y $y^2 = 4 - 4z$ y el plano XY.

06. Encontrar el volumen de la región $R \subset IR^3$, en el primer octante, limitada por el paraboloide $x^2 + y^2 = az$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.
(*aplicar coordenadas cilíndricas*).

07. Hallar el volumen de la región S limitada superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por el cono $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$
(*aplicar coordenadas esféricas*)

08. Encuentre el volumen de una esfera de radio "a" usando una integral triple:

a) Mediante coordenadas cilíndricas
b) Mediante coordenadas esféricas.

09. El centro de una esfera de radio "a" está sobre la superficie de un cilindro circular de radio $\frac{1}{2}a$. Use coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen de la región inferior a ambas superficies.

10. Use coordenadas esféricas para encontrar el volumen de la región limitada superiormente por la esfera con ecuación $\rho = a$ e inferiormente por el cono con ecuación $\phi = b$.

11. Encuentre el volumen de la región limitada superiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 = 6z$.

12. Encuentre el volumen de la región en el espacio IR^3 limitado superiormente por las gráficas de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ y $z = x$ (*use coordenadas cilíndricas*)

13. Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.

14. Un sólido está limitado por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$. Calcular su volumen.

15. Un sólido está limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $y = x$. Calcular su volumen.

- Hallar los volúmenes de los sólidos limitados por las superficies siguientes:

16. $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$

17. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$

18. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$

19. $x + y + z = a$; $3x + y = a$; $\frac{3}{2}x + y = a$; $y = 0$; $z = 0$.

20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$

21. $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$

- En los problemas 22-29 empléase coordenadas polares y generalizadas.

22. Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.

23. Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cono $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

24. Hallar el volumen limitado por las superficies: $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

25. Determinar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

26. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $2az = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ (volumen situado dentro del paraboloide).

27. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

28. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY, la superficie $z = a e^{-(x^2+y^2)}$ y el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

29. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY, el paraboloide $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$.

30. ¿En qué razón divide el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ al volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$?

31. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0$, $y > 0)$.

• Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

32. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$

33. $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$

34. $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y = \pm a$, $x - y = \pm a$

35. $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(a > 0)$

36. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$

37. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Pasando a coordenadas esféricas o cilíndricas, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:

38. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 \leq z^2$.

39. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2)$

40. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$

41. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $x^2 + y^2 = z^2$; $(z \geq 0)$; $(0 < a < b)$

• Utilizando las coordenadas esféricas generalizadas, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:

42. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}$

43. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

44. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

45. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

46. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$

47. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1$

48. Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies:
$x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $\frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$, $\frac{y}{5} - \frac{z}{3} = 1$.

49. Hallar el volumen del sólido que limitan las superficies:
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $x - y + z = 1$, $x - y + z = -1$

50. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $4y^2 = x(2 - z)$ y los planos $z = 0$, $x + z = 2$.

51. Sea $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ una superficie esférica de radio R. Sabiendo que el volumen de una esfera (bola cerrada de radio R) es $\frac{4}{3}\pi R^3$, calcular el volumen del sólido E encerrado por la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
$a, b, c > 0$.

52. Determinar el volumen del sólido S limitado por las superficies:
$z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

53. Calcular el volumen del sólido S limitado por las superficies:
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$

54. Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies
$2az = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$,
$a > 0$

55. Encontrar el volumen del sólido dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, entre el plano $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

56. Hallar el volumen de la región limitada por los cilindros hiperbólicas:
$xy = 1$, $xy = 9$, $xy = 4$, $xz = 36$,
$yz = 25$, $yz = 49$

57. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ (la parte interior con respecto al cono)

58. Hallar el volumen del sólido contenido en el primer octante y limitado por las superficies con ecuaciones:
$z = xy$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$;
$y = 2x$

59. Hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas, en $\mathbb{R}^3$, de las ecuaciones: $z = 10$, $z = x + y^2$, $x = 0$

60. ¿En qué razón divide la superficie:
$x^2 + y^2 + az = 4a^2$ al volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$?

61. Hallar el volumen de cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = az$,
$z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$

SOLUCIONES

01. $\frac{1}{4}$
02. 4
03. 16/3
04. $\frac{1}{4}$
05. 8
06. $\frac{3\pi a^3}{4}$
07. $\frac{64\pi}{3}(2-\sqrt{3})$
08. $\frac{4\pi a^3}{3}$
09. $\frac{2}{9}(3a^3\pi - 4a^3)$
10. $\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos b)$
11. $\frac{76\pi}{3}$
12. $\frac{7\pi}{6}$
13. $\frac{3}{4}$
14. 1/6
15. $\frac{a^3}{3}$
16. $\frac{\pi r^4}{4a}$
17. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$
18. $\frac{88}{105}$
19. $\frac{a^3}{18}$
20. $\frac{abc}{3}$
21. $\pi a^3(\alpha-\beta)$
22. $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$
23. $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$
24. $\frac{\pi a^3}{3}$
25. $\frac{4}{3}\pi abc$
26. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$
27. $\frac{32}{9}a^3$
28. $\pi a\left(1-e^{-R^2}\right)$
29. $\frac{3\pi ab}{2}$
30. $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$
31. $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$
32. $^3/_{35}$
33. $^7/_{24}$
34. $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$
35. $\frac{\pi a^3}{6}$
36. $\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$
37. $\frac{32}{3}\pi$
38. πa^3
39. $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$
40. $\frac{1}{2}$
41. $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$
42. $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$
43. $\frac{\pi^2}{4}abc$
44. $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$
45. $\frac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$
46. $\frac{8\pi}{5}abc$
47. $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$
48. $20\pi-\frac{160}{9}$
49. ¿?
50. $\frac{16}{9}$
51. $\frac{4\pi}{3}abc$
52. $\frac{\pi}{8}$
53. $\frac{19}{6}\pi$
54. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$
55. $\frac{32}{9}a^3$
56. 64
57. $\frac{2}{3}a^3\pi-\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}\,\pi$
58. $\frac{1}{2}\text{Ln}\,2$
59. $\frac{80}{3}\sqrt{10}$
60. 37:27
61. $\frac{5\pi a^3}{6}$

9.13 CENTRO DE MASA Y MOMENTOS DE INERCIA DE UN SÓLIDO

Sea S un sólido en IR^3 y ρ: $S \subset IR^3 \longrightarrow IR$ una función continua sobre S y que
$(x,y,z) \longmapsto \rho(x,y,z)$

define la densidad del sólido S en cada punto $(x,y,z) \in S$.

Definimos

1. La masa total del sólido está dado por $m = \iiint_S \rho(x,y,z)\, dv$

2. Los momentos de masa respecto a los planos coordenados del sólido S con función de densidad $\rho : S \subset IR^3 \longrightarrow IR$, son:

$$M_{xy} = \iiint_S z\,\rho(x,y,z)\, dv\,,\ M_{xz} = \iiint_S y\,\rho(x,y,z)\, dv\,,\ M_{yz} = \iiint_S x\,\rho(x,y,z)\, dv$$

3. El centro de masa del sólido S es el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, donde:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}\ ,\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}\ ,\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

4. Los momentos de inercia del sólido S alrededor de los ejes coordenados se define como:

$I_x = \iiint_S (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\, dv$, es el momento de inercia con respecto al eje X.

$I_y = \iiint_S (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\, dv$, es el momento de inercia con respecto al eje Y.

$I_z = \iiint_S (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\, dv$, es el momento de inercia con respecto al eje Z.

Observaciones:

Para hallar el centro de masa, tener en cuenta todas las simetrías posibles.

i) Si el sólido S es simétrico respecto al plano XY y $\rho(x,y,-z) = \rho(x,y,z)$, entonces $\bar{z} = 0$. Similar caso ocurren con los otros planos coordenados.

ii) Si el sólido S es simétrico respecto al eje X y $\rho(x,-y,-z) = \rho(x,y,z)$, entonces $\bar{y} = \bar{z} = 0$. Un resultado similar se cumplen para los otros ejes coordenados.

9.14 PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE TRIPLE INTEGRAL

Supongamos que se quiere hallar la triple integral $\iiint_S f(x,y,z)\,dv$, donde la función f(x,y,z) es continua sobre el sólido S.

¿Qué hacer frente a este problema?

En primer lugar, debemos graficar el sólido S. Caso contrario graficar, por lo menos, las curvas de nivel con el fin de encontrar los límites de integración.

En segundo lugar, se deberá observar la ecuación cartesiana de cada superficie que limita al sólido S y plantearse las siguientes interrogantes:

¿Cómo se quiere integrar $\iiint_S f(x,y,z)\,dv$?, ¿cartesianamente?, ¿usando coordenadas cilíndricas?, ¿usando coordenadas esféricas?, ¿usando otra transformación?

Respuesta:

- Si queremos integrar cartesianamente, Ud. elegirá a qué plano coordenados desea proyectar el sólido S.

  Si el sólido S se proyecta sobre el plano XY, la primera integral es respeto a "z" y hará dos cosas:

  1° Mirar hacia arriba para hallar la función $z = f(x,y)$ y mirar hacia abajo para hallar la función $z = g(x,y)$.

  2° La proyección del sólido S sobre el plano XY es una región $D \subset IR^2$. Sobre la región D se calculan las dos integrales restantes.

- Si en la función integrando f(x,y,z) y/o en las ecuaciones cartesianas de las superficies que limitan al sólido S, se presentan: $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$, $y^2 + z^2$; conviene usar coordenadas cilíndricas.

Cuando se usa coordenadas cilíndricas, hacer los siguientes pasos:

Escribir la transformación en coordenadas cilíndricas y el JACOBIANO:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$JACOBIANO = r$$

Transformar las ecuaciones cartesianas de las superficies que limitan al sólido S, en ecuaciones cilíndricas.

Hallar la nueva región $Q \subset IR^3$ sobre la cual vamos calcular la triple integral.
La región Q es el conjunto de ternas (r, θ, z) tales que :

$$\ldots \le z \le \ldots$$
$$\ldots \le r \le \ldots$$
$$\ldots \le \theta \le \ldots$$

$\Rightarrow$ La integral es: $\iiint_S f(x,y,z)\,dv = \iiint_Q f(x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z))\,\mathbf{r}\,dz\,dr\,d\theta$ (Jacobiano)

- Si en la función integrando f(x,y,z) y/o en las ecuaciones de las superficies que limitan al sólido S, se presentan: $x^2 + y^2 + z^2$, conviene usar coordenadas esféricas. Cuando se usa coordenadas esféricas, hacer los siguientes pasos:

Escribir la transformación en coordenadas esféricas y el JACOBIANO :

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2\,sen^2\,\phi$$

$$JACOBIANO = \rho^2\,sen^2\,\phi$$

Transformar las ecuaciones cartesianas de las superficies que limitan al sólido S, en ecuaciones esféricas.

Hallar la nueva región $Q \subset IR^3$ sobre la cual vamos calcular la triple integral.
La región Q es el conjunto de ternas (ρ, ϕ, θ) tales que :

$$\ldots \le \rho \le \ldots$$
$$\ldots \le \phi \le \ldots$$
$$\ldots \le \theta \le \ldots$$

$\Rightarrow$ La integral es:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dv = \iiint_Q f(x(\rho,\phi,\theta), y(\rho,\phi,\theta), z(\rho,\phi,\theta))\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

- Las integrales triples en coordenadas cilíndricas o en coordenadas esféricas son más simples que las integrales en coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 1 Halle la masa de un cono de radio R en la base y altura H, si la densidad en cada punto P es proporcional a la distancia de P al vértice del cono.

Solución:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

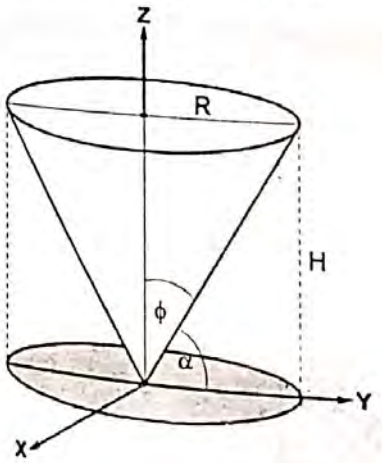
- Se pide hallar la masa de un cono:

$$m = \iiint_S \rho(x,y,z)\,dv$$

- Como datos, se tiene el radio R de la base y la altura H del cono
  Necesitamos:
  a) Hallar la ecuación del cono, y
  b) hallar la densidad del cono.

Veamos:

a) Si ubicamos el vértice del cono en el punto (0,0,0), el gráfico es:



La ecuación de este cono tiene la forma:

$z = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{x^2+y^2}$, donde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R}$

$\Rightarrow z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$

b) La densidad es proporcional a la distancia de P = (x,y,z) perteneciente al cono hasta (0,0,0), esto es ,

$$\rho(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- A continuación debemos hallar la triple integral:

$$m = \iiint k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$$

¿Como hallar esta triple integral?

Respuesta:

Como se presenta $x^2+y^2+z^2$, conviene aplicar coordenadas esféricas.

- Hacer los siguientes pasos:

1° Escribir la transformación a coordenadas esféricas y el JACOBIANO:

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{cases}$$

$$JACOBIANO = \rho^2\,\text{sen}\,\phi$$

2° Transformar las ecuaciones cartesianas de las superficies que limitan al sólido S, en ecuaciones esféricas:

a) El plano $z = H$ se convierte en

$$\rho\cos\phi = H$$

$$\boxed{\rho = \frac{H}{\cos\phi}}$$

b) El cono $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ se convierte

$$\rho\cos\phi = \frac{H}{R}\sqrt{\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi}$$

$$\rho^2\cos^2\phi = \frac{H^2}{R^2}\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi$$

Cono en coordenadas esféricas

$$\boxed{\phi = \text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)}$$

3° La nueva región Q sobre la cual vamos a calcular la triple integral es:

$$Q = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \Big/ 0 \le \rho \le \frac{H}{\cos\phi} \ , \ 0 \le \phi \le \text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right) \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

4° La integral es:

$$m = \iiint_S K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dv$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)} \int_0^{H/\cos\phi} \sqrt{\rho^2}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_0^{H/\cos\phi} \rho^3 \, d\rho$$

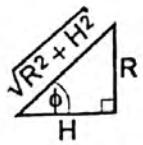
$$= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{H}{\cos\phi}}$$

$$= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, \frac{1}{4} \frac{H^4}{\cos^4\phi}$$

$$= \frac{K}{4} H^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)} \operatorname{sen}\phi \cdot \cos^{-4}\phi \, d\phi$$

$$= \frac{K}{4} H^4 \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{\cos^{-3}\phi}{-3} \right]_{\phi=0}^{\phi = \text{Arc tg}\left(\frac{R}{H}\right)}$$

$$= \frac{K}{12} H^4 \int_0^{2\pi} \left[\sec^3 \underbrace{\left(\text{Ar tg}\frac{H}{R} \right)}_{\phi} - 1 \right] d\theta$$



$$\text{tg}\,\phi = \frac{H}{R}$$

$$\phi = \text{Arc tg}\left(\frac{H}{R}\right)$$

$$\sec\phi = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H}$$

$$= \frac{K}{12} H^4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{(R^2+H^2)^{3/2}}{H^3} - 1 \right] d\theta$$

$$= \frac{K}{12} H^4 \left[\frac{(R^2+H^2)^{3/2}}{H^3} - 1 \right] \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{K}{12} H^4 \left[\frac{(R^2+H^2)^{3/2}}{H^3} - 1 \right] (2\pi)$$

$$= \frac{K}{6} H^4 \left[\frac{(R^2+H^2)^{3/2}}{H^3} - 1 \right]$$

$$= K\frac{\pi H}{6}(R^2+H^2)^{3/2} - \frac{K}{6} H^4 \pi$$

EJEMPLO 2 Encontrar el centro de masa del sólido dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$. La densidad del volumen es constante.

Solución:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

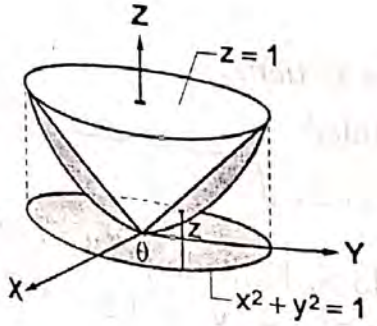
- Se pide hallar $\overline{C} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, que es el centro de gravedad del sólido S.
- Como datos, se tienen las superficies:

  $S_1 : x^2 + y^2 = z$, $S_2 : x^2 + y^2 = z^2$

  y la densidad $\rho(x,y,z) = K$, K constante.

Pasos a seguir:

Paso 1 Graficar el sólido S



Al intersectar $S_1 \cap S_2$ se hace:

$$z = z^2 \iff z^2 - z = 0$$
$$z(z-1) = 0 \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Para $z = 1$, se obtiene: $x^2 + y^2 = 1$

- Como el sólido S que aparece en el gráfico es simétrico respecto al eje Z, entonces $\overline{x} = \overline{y} = 0$.
- Sólo hallemos $\overline{z}$: $z = \frac{M_{xy}}{m}$

  donde: a) $m = \iiint_S k \, dv$

  Como en las dos ecuaciones de las superficies que limitan al sólido S, aparecen: $x^2 + y^2$, entonces aplicar coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

El *JACOBIANO* es $J = r$

i) $x^2 + y^2 = z$ se convierte en $r^2 = z$

ii) $x^2 + y^2 = z^2$ se convierte en $r^2 = z^2$

$r = z$

- La nueva región sobre la cual se integra es Q, donde

$$Q = \{(r,\theta,z)/r^2 \le z \le r\ ,\ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Entonces:

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{r} k\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r(r - r^2)\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{1} (r^2 - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{12}k\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{6}k\pi$$

- El momento respecto al plano XY es:

$$M_{xy} = \iiint_S z\,(k)\, dv$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{r} z\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} r\, dr \int_{r^2}^{r} z\, dz$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} r\, dr \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=r^2}^{z=r}$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} r\,\tfrac{1}{2}[r^2 - r^4]\, dr$$

$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} [r^3 - r^5]\, dr$$

$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1}$$

$$= \frac{1}{24}k\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{12}k\pi$$

- Luego, $\bar{z} = \dfrac{\frac{1}{12}k\pi}{\frac{1}{6}k\pi} = \dfrac{1}{2}$
- $\bar{c} = (0,0,1/2)$

EJEMPLO 3 Encontrar la masa del sólido acotado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, si la densidad de volumen en cualquier punto es $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solución:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Se pide hallar la masa m:

$$m = \iiint_S \rho(x,y,z)\, dv$$

Como datos se tiene:

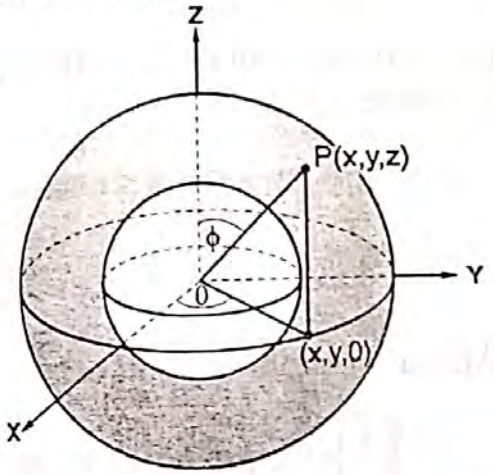
a) La densidad

$$\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

b) El sólido S, limitado por las esferas: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Pasos a seguir para hallar la triple integral:

1) Graficar el sólido S:



2) Conviene aplicar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{cases}$$

JACOBIANO $J = \rho^2\,\text{sen}\phi$

a) La ecuación : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

se convierte : $\rho^2 = 4$

$$\boxed{\rho = 2}$$

b) La ecuación : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

se convierte : $\rho^2 = 9$

$$\boxed{\rho = 3}$$

3) La nueva región sobre la cual se integra es Q, donde:

$Q = \{(\rho,\phi,\theta)/2 \le \rho \le 3\,,\ 0 \le \phi \le \pi\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

Luego la masa es:

$$m = \iiint_S k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^3 k\,\rho\,(\rho^2\,\text{sen}\phi)\,d\rho\cdot d\phi\cdot d\theta \qquad \text{(Jacobiano)}$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\text{sen}\phi\,d\phi \int_2^3 \rho^3\,d\rho$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\text{sen}\phi\,d\theta\left[\tfrac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=2}^{\rho=3}$$

$$= \tfrac{1}{4}k\,[3^4 - 2^4]\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\text{sen}\phi\,d\phi$$

$$= \tfrac{65}{4}k\int_0^{2\pi} d\theta\,[-\cos\phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi}$$

$$= \tfrac{65}{4}K(2)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \tfrac{65}{4}K(2)(2\pi)$$

$$= 65\,k\,\pi$$

EJEMPLO 4 Hallar el momento de inercia respecto del eje Z, del sólido S limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; que tiene densidad $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Se pide hallar:

$$I_Z = \iiint_S (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)\,dv$$

Como datos, se tiene:

a) El cono : $z^2 = x^2 + y^2$

b) El cilindro: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

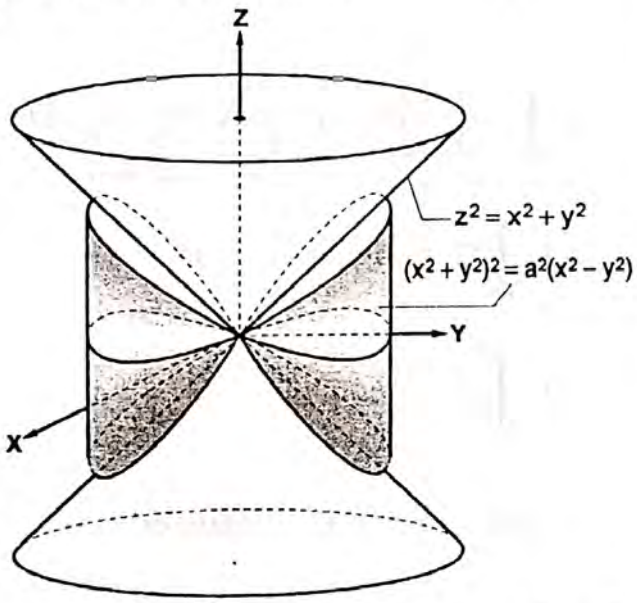
c) densidad : $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

- Queda por calcular la triple integral:

$$I_z = \iiint_S (x^2+y^2)\, k\sqrt{x^2+y^2}\, dv$$

Pasos a seguir:

1) Graficar el sólido S:



2) Porque aparece el término: x^2+y^2 en las superficies y en el integrando, conviene aplicar coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

JACOBIANO: $J = r$

a) $z^2 = x^2 + y^2$ se convierte en:

$z^2 = r^2$

$z = r$

b) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ se convierte en:

$$r^4 = a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\theta)$$

$$r^2 = a^2\cos 2\theta$$

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

donde : $\cos 2\theta \geq 0$

$$-\tfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{4}$$

la nueva región sobre la cual se integra es Q, donde:

$$Q = \left\{(r,\theta,z)/ -r \leq z \leq r\,,\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\theta}\,,\ -\tfrac{\pi}{4} \leq 0 \leq \tfrac{\pi}{4}\right\}$$

3) Ahora, la triple integral es:

$$I_z = \iiint_Q r^2\, k\sqrt{r^2}\; r\, dz\cdot dr\cdot d\theta$$

Porque hay simetría, hacemos:

$$I_z = 8k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\int_0^{r} r^4\, dz\cdot dr\cdot d\theta$$

$$I_z = 8k\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^4\, dr \int_0^{r} dz$$

$$I_z = 8k\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^5\, dr$$

$$= 8k\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= \tfrac{8}{6}k\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^6\cos^3 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{8}{6}k\,a^6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,[1-\text{sen}^2 2\theta]\, d\theta$$

$$= \tfrac{8}{6}k\,a^6\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos 2\theta - \cos 2\theta\,\text{sen}^2 2\theta]\, d\theta$$

$$= \tfrac{8}{6}k\,a^6\left[\tfrac{1}{2}\text{sen}\,2\theta - \tfrac{1}{6}\text{sen}^3 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$= \tfrac{8}{6}k\,a^6\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\right] = \tfrac{8}{6}k\,a^6\cdot\tfrac{2}{6} = \tfrac{4}{9}k\,a^6$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

MASA Y CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SÓLIDO

01. Un sólido homogéneo S con densidad $\delta = 1$ está acotado por abajo por el plano XY, por los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $(a > 0)$ y por arriba por la superficie $z = x^2 + y^2$. Halle su centro de gravedad.

Rpta.: $(0,0, a^2/3)$

02. Halle el centro de masa del sólido limitado por la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 9$.

Suponga que $\delta = 1$.

Rpta.: $\left(0, 0, \frac{27}{4}\right)$

03. Un sólido S está limitado por arriba por el plano $z = 4$ y por abajo por la superficie $z = x^2 + y^2$. Su densidad $\delta(x,y,z)$ en cada punto P es igual a la distancia de P al eje Z. Halle la masa total de S.

Rpta.: $\frac{128\pi}{15}$

04. Halle la masa de un cono de Radio R en la base y altura H si la densidad en cada punto P es proporcional a la distancia de P al vértice del cono.

Rpta.: $\frac{\pi H}{6}(H^2 + R^2)^{3/2}$

05. Un sólido tiene la forma del cilindro $x^2 + y^2 \le a$ con $0 \le z \le b$. Se supone que la densidad del sólido es: $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2$

a. Halle la masa del sólido
b. Halle el centro de masa del sólido

Rpta.: a) $\frac{\pi a^2 b}{2}$ b) $\left(0, 0, \frac{b}{2}\right)$

06. Halle el centro de gravedad del sólido intersección de los dos cilindros $x^2 + y^2 \le 1$ e $y^2 + z^2 \le 1$

Rpta.: $(0,0,0)$

07. Halle el centro de masa del sólido constituido por el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$; si la densidad es $\delta(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

Rpta.: $\left(\frac{1 - Ln2}{4 - \pi}, \frac{1 - Ln2}{4 - \pi}, \frac{1 - Ln2}{4 - \pi}\right)$

08. Encuentre el centroide del sólido limitado por la superficie cónica con ecuación $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2$ y el plano con ecuación $z = h$, $h > 0$, $a > 0$.

Rpta.:

09. Encuentre el centroide del sólido limitado por los planos coordenados y la gráfica de $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Rpta.: $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$

10. Un cuerpo ocupa el cubo limitado por los planos coordenados y los planos con ecuaciones respectivas

$x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano XY, encuentre el centro de masa del cuerpo.

Rpta.: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

11. Halle el centro de masa del sólido, de densidad de masa constante "ρ", limitado por las gráficas del cono circular recto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$.

Rpta.: $m = \frac{64}{3}\pi\rho$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0,0,3)$

12. Halle la masa y el centro de masa del sólido cuya densidad es $\rho(x,y,z) = 4$, limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

Rpta.: $m = 32\pi$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0,0,8/3)$

13. Halle la masa y el centro de masa del sólido cuya densidad es $\rho(x,y,z) = 10 + x$. El sólido es un tetraedro limitado por $x + 3y + z = 6$ y los planos coordenados.

Rpta.: $m = 138$, $\bar{x} = \frac{186}{115}$

$\bar{y} = \frac{56}{115}$, $\bar{z} = \frac{168}{115}$

14. Hallar el centroide del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, y el cono $z \operatorname{tg} b = \sqrt{x^2 + y^2}$

Rpta.: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3a(1+\cos b)}{8}\right)$

15. Hallar el centroide del sólido limitado por las superficies:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{xyz}{abc} ,$$

$a \geq 0$ $y \geq 0$ $z \geq 0$

Rpta: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{9\pi a}{448}, \frac{9\pi b}{448}, \frac{9\pi c}{448}\right)$

16. Encuentre la masa de un sólido limitado por una superficie esférica de radio "a" si la densidad en cada punto P es proporcional a la distancia de P al centro de la esfera.

Rpta.: $k\pi a^4$

17. Encuentre la masa de un cuerpo que ocupa la región limitada por las gráficas de $y = 0$, $z = 0$, $z = h$ $(h > 0)$ y $x^2 + y^2 = a^2$ si $\delta(x,y,z) = kyz$.

Rpta.:

18. Encuentre el centro de masa del cuerpo homogéneo que ocupa la región en el primer octante limitada por los tres planos de coordenadas y la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Rpta.: $\left(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}\right)$

19. Un cuerpo S ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e inferiormente por el plano XY. Encuentre el centro de masa de S si la densidad $\delta(x,y,z)$ en el punto P(x,y,z) es proporcional a la distancia de P al origen.

Rpta.:

20. a) Hallar la masa de la caja $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,1] \times [0,2]$,

suponiendo que la densidad es uniforme.

b) Igual que en la parte (a), pero con una densidad de masa:
$\delta(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$

Rpta.:
a) k *(si k es la densidad constante)*

b) $^{37}/_{12}$

21. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$, si la densidad es $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$

Rpta.:

22. Hallar el centro de masa de la región acotada por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$

Rpta.: (½ , ½ , ½)

23. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \le 1$, $1 \le z \le 2$, si la densidad es $\delta(x,y,z) = (x^2 + y^2)\, z^2$.

Rpta.:

24. Determine el centro de masa de los cuerpos homogéneos limitados por las gráficas de las superficies indicadas.

a) $z = y^2$, $z = 1$, $x = -1$, $x = 1$
b) $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $z \ge 0$
c) $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$
d) $z = (x^2 + y^2, z^2)^2$

Rptas.:

a) $(0,0,^3/_5)$
b) $(0,0,157/(20(9\text{arctg}(\sqrt{2}/2) + 3\sqrt{2} - 1)))$
c) $(0,0,1+\sqrt{2})$
d) $(0,0,^7/_{16})$

25. Hallar la masa m del paralelepípedo rectangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, si la densidad en el punto (x,y,z) es $\delta(x,y,z) = x + y + z$.

Rpta.: $\frac{abc}{2}(a + b + c)$

26. Del octante de la esfera:
$x^2 + y^2 + z^2 \le c^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$
se ha cortado el cuerpo OABC, limitado por los planos de coordenadas y por el plano:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \,(a \le c\,, b \le c)\,.$$

Hallar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x,y,z) es $\delta(x,y,z) = \text{ctg}\, z$

Rpta.: $\frac{ab}{24}(6c^2 - a^2 - b^2)$

27. En el sólido de forma semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$, la densidad varia proporcionalmente a la distancia desde el punto al centro. Hallar el centro de gravedad de este sólido.

Rpta.: $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{2}{5}a$

28. Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloide $y^2 + 2z^2 = 4x$ y por el plano $x = 2$.

Rpta.: $\bar{x} = \frac{4}{3}$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$

29. Calcular la masa del sólido limitado por dos esferas concéntricas de ra-

dios a y b, $(0 < a < b)$, si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.

Rpta.: $\frac{4}{5}\pi(b^5 - a^5)$

30. Un cono circular recto homogéneo tiene altura h. Demostrar que la distancia de su centroide a la base es $^h/_4$.

31. Determinar el centro de gravedad de un cono de altura h si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto a la base.

Rpta.: En el eje, a una distancia $^2/_5$ h de la base

32. Determinar el centro de gravedad de un cono de altura h si su densidad en cada punto es proporcional de ese punto al eje del cono.

Rpta.: En el eje, a una distancia $^1/_5$ de la base

33. Un sólido está limitado por dos hemisferios concéntricos de radios a y b, siendo $0 < a < b$. Si la densidad es constante, encontrar el centro de gravedad.

Rpta.: En el eje de simetría a una distancia $\frac{3}{8}\cdot\frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}$ del plano secante de los hemisferios.

34. Determinar el centro de gravedad de un cubo de lado h si su densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia de ese punto a un vértice de la base. (tomar la base en el plano XY y situar las aristas en los ejes coordenados)

Rpta.: $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{7}{12}h$ (vértice citado en el origen)

35. Calcular la masa del sólido limitado por la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, si en cada punto P(x,y,z) su densidad es x^2.

Rpta.: $\frac{4a^3bc}{15}\pi$

36. Hallar la masa del sólido limitado por las superficies: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = x$, $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$, $z \geq 0$ sabiendo que su densidad es $\delta(x,y,z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

Rpta.: 24π

37. Calcular la masa del sólido limitado por el plano XY, el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ si la densidad es $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2$

Rpta.: $\frac{512}{75}$

38. Hallar el centro de gravedad del sólido limitado por la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cono: $z\,tg\,\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Considere $\delta(x,y,z) = 1$

Rpta.: $\frac{2\pi}{3}R^3(1 - \cos\alpha)$

39. Un sólido está limitado por la superficie $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=1$, y su densidad en cada punto es igual al cuadrado de la distancia de dicho punto al plano de simetría del sólido que es paralelo al plano XZ. Determine la masa del sólido.

Rpta.: $\frac{4ab^3c}{3}\pi$

40. Halle la distancia al plano XY del centroide del sólido limitado por las gráficas en IR^3, de las ecuaciones: $z=0$, $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$; $0<r<R$; $Hy+2Rz=HR$, $H>0$.

Rpta: $\overline{z}=\frac{H}{16R^2}(5R^2+r^2)$, la distancia pedida es $|\overline{z}|$

41. Un cono circular recto de radio r y altura h tiene densidad en cada punto P(x,y,z) igual a la distancia de P a la base del cono. Usando coordenadas esféricas, halle la masa de dicho cono.

Rpta.: $\frac{1}{12}\pi h^2 r^2$

42. Determine el centroide del sólido limitado por las esferas

$$x^2+y^2+z^2-4\ ;\ x^2+y^2+z^2=1$$

y contenido en el cono

$$x^2+y^2=z^2\ ,\ z>0$$

Rpta.: $\overline{x}=\overline{y}=0$ (porque existe simetría respecto al eje z). Sólo debe hallarse $\overline{z}$.

43. Sea V el sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=1$ y los planos $z=0$, $z=x+2$. Determine la primera componente del centroide del sólido V.

44. Calcular la masa del sólido limitado por la superficie $(x^2+y^2+z^2)^3=z^4$ con $z\geq 0$, si su densidad en cada punto P(x,y,z) es:

$$\delta(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

Rpta.: $\pi/39$

45. Determinar la componente $\overline{y}$ del centro de gravedad del sólido limitado por las gráficas, en IR^3, de ecuaciones:

$y+z-2=0$, $y-z-2=0$, $y=x^2$ sabiendo que su identidad en cada punto P(x,y,z) es $\delta(x,y,z)=|y|$

Rpta.:

46. Hallar el centroide de un sólido limitado por las superficies:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$$

y su densidad es:

$$\delta(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

Rpta.:

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS

01 Determine el volumen del sólido limitado por la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es:
$\rho = 2 + \cos\phi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ y el plano XY.

Rpta.: $\frac{65\pi}{6}$

02 Determine el centro de gravedad (centroide) del sólido limitado por la semiesfera $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$, $a > 0$ y los planos $x + \sqrt{3}\,y = 0$, $x - \sqrt{3}\,y = 0$.

Rpta.: masa $= \frac{2a^3\pi}{9}$, $\overline{x} = \frac{9a}{16}$

03 Halle la masa del sólido limitado por el elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ si su densidad es: $\delta(x,y,z) = |xyz|$.

Rpta.: $\frac{1}{6}a^2 b^2 c^2$

04 Hallar el centro de masa del sólido que está limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, en el plano $z = 3$ y que está situado sobre dicho plano. La densidad del sólido es:
$\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Rpta.:

05 Calcular la masa del sólido situado en el primer cuadrante y limitado por los planos coordenados y las gráficas de las ecuaciones:
$a^2 y = a^2 - x^2$; $a^2 z = a^2 - x^2$, $a > 0$
Sabiendo que su densidad es:
$\delta(x,y,z) = xy$

Rpta.:

06 Calcular el momento de inercia respecto al eje Y, del sólido comprendido entre dos esferas ambas con centro en el origen y de radios a y 2a respectivamente, sabiendo que la densidad en cada punto (x,y,z) del sólido es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro.

Rpta.: $\frac{56}{3}k\,\pi^3 a^2$

07 Hallar la masa del sólido limitado por la superficie: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$, si la densidad en cada punto P(x,y,z) es $\delta(x,y,z) = x^2$.

Rpta.: $\frac{128}{15}\pi$

08 Hallar la coordenada $\overline{y}$ del centro de gravedad del sólido limitado por $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $y + 2bz = b$; donde $0 < a < b$.

Rpta.: $\overline{y} = -\frac{1}{4b}(a^2 + b^2)$

09 Hallar la masa del sólido en el primer octante limitado por los planos coordenados, por el plano $x + y = 1$ y los cilindros $z = e^x$, $z = e^y$; sabiendo que la densidad de cada punto es $\delta(x,y,z) = y$.

Rpta.: $5e^{1/2} - e - 3$

10 Calcular el volumen del sólido limitado por las paraboloides:
$z = 8 - x^2 - y^2$; $z = x^2 + (y-1)^2$.

CAPÍTULO 10

INTEGRALES DE LÍNEA

10.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos dos especies de integrales de línea: las integrales de linea sobre campos escalares con respecto a la longitud de arco y las integrales de linea de campos vectoriales a lo largo de un camino.

10.1 INTEGRALES DE LÍNEA DE PRIMERA ESPECIE

Las integrales de linea de primera especie se refieren a las integrales de linea sobre campos escalares con respecto a la longitud de arco.

Definición **1**

Sea $\vec{\alpha} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

una curva regular tal que $\alpha([a,b]) = \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es la traza o imagen de $\vec{\alpha}$.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre U tal que $\mathcal{C} \subset U$

$(x_1, x_2, \ldots x_n) \longmapsto z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

Sea $s(t) = \int_a^t \| \alpha'(\mu) \| \, d\mu$ la función longitud de arco

y $ds = \| \alpha'(t) \| \, dt$ es el diferencial longitud de arco.

La integral de linea de la función f a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ con respecto al parámetro longitud de arco s está dada por:

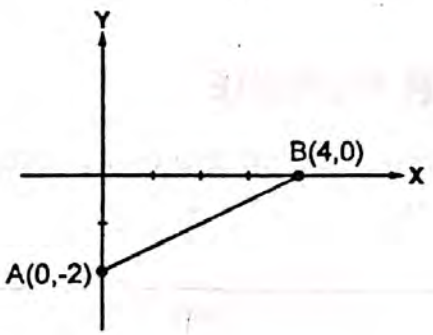
$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\vec{\alpha}(t)) \| \alpha'(t) \| \, dt$$

EJEMPLO 1 Calcular $\int_C \frac{ds}{x-y}$ donde C es el segmento de recta $y = \frac{1}{2}x - 2$ comprendida entre los puntos A(0,–2) y B(4,0)

Solución:

Paso 1 En primer lugar, debemos parametrizar la curva C.

Bastará hacer la parametrización canónica, que consiste en hacer : $x = t$, obteniéndose $y = \frac{1}{2}t - 2$. Como $0 \le x \le 4$, entonces $0 \le t \le 4$.



En consecuencia, la parametrización de C, es:

$$\vec{\alpha} : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = \left(t\ ,\ \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

Paso 2 Para integrar necesitamos $ds = \| \alpha'(t) \| \, dt$
Cálculos auxiliares:

i) $\alpha'(t) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

ii) $\| \alpha'(t) \| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

iii) $ds = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,dt$

Paso 3 Ahora, ya podemos integrar:

$$\int_C \frac{ds}{x-y} = \int_0^4 \frac{1}{t - \left(\frac{1}{2}t - 2\right)} \frac{1}{2}\sqrt{5}\, dt = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{1}{t+4}\, dt = \sqrt{5}\, \mathrm{Ln}2$$

EJEMPLO 2 Determinar $\int_C f(x,y,z)\,ds$ si $f(x,y,z) = xyz$ y C es la parte de la recta $x + y + z = 1,\ y - z = 0$ que se encuentra en el primer octante.

Solución:

Paso 1 En primer lugar, debemos parametrizar la recta C : $\begin{cases} y+z=1-x \ldots (1) \\ y-z=0 \qquad (2) \end{cases}$

Bastará resolver el sistema de ecuaciones con incógnitas y, z en función de x. Al sumar (1) + (2) se obtiene : $2y = 1 - x \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

De (2) obtenemos $z = y$

Luego, la parametrización de la recta C es: $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$

Paso 2 En segundo lugar, debemos hallar el recorrido del parámetro t : $a \le t \le b$ ¿cómo hallar a? , ¿cómo hallar b?

Como dato del problema se tiene que la recta C se encuentra en el primer octante, esto implica que la recta intersecta los planos coordenados : $x = 0$, $y = 0$ $\vee$ $z = 0$.

si $x = 0$ se obtiene $t = 0$ y el punto A = (0, ½ , ½).
si $y = 0$ se obtiene $t = 1$ y el punto B = (1, 0 , 0).

Entonces: $0 \le t \le 1$

Obtenemos la función que parametriza C : $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = \left(t, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t\right)$$

Paso 3 Necesitamos $ds = \| \vec{\alpha}'(t) \|\, dt$

Cálculos auxiliares:

i) $\vec{\alpha}'(t) = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ii) $\| \vec{\alpha}'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

iii) $ds = \frac{\sqrt{6}}{2}\, dt$

Paso 4 Ya podemos integrar:

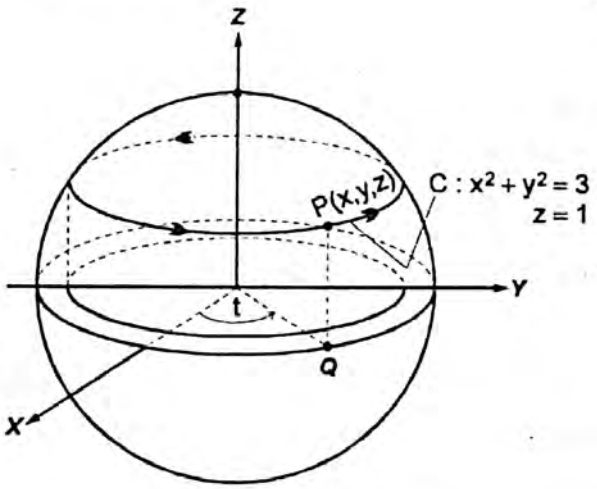
$$\int_C xyz\,ds = \int_0^1 t\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t\right)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t\right)\frac{\sqrt{6}}{2}\,dt = \frac{\sqrt{6}}{8}\int_0^1 t(t-1)^2\,dt = \frac{\sqrt{6}}{96}$$

EJEMPLO 3 Calcular $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$ donde C recorre una sola vez la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, con el plano $z=1$.

Solución:

Paso 1 En primer lugar, debemos parametrizar la curva $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \ldots (1) \\ z=1 \ldots (2) \end{cases}$

Veamos:



- Reemplazar (2) en (1) :

$$x^2+y^2+1=4$$
$$x^2+y^2=3 \quad ;$$ es una circunferencia contenida en el plano $z=1$

- Debemos parametrizar la curva

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$$

Hacer : $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sqrt{3}\,\text{sen}\,t \\ z=1 \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$

- Así obtenemos $\vec{\alpha}:[0\,,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t)=(\sqrt{3}\cos t\,,\sqrt{3}\,\text{sen}\,t,1)$$

Paso 2 Necesitamos $ds=\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt$

Cálculos auxiliares : *i)* $\vec{\alpha}'(t)=(-\sqrt{3}\,\text{sen}\,t\,,\sqrt{3}\cos t\,,0)$

ii) $\|\vec{\alpha}'(t)\|=\sqrt{3}$

iii) $ds=\sqrt{3}\,dt$

Paso 3 Ya podemos integrar :

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_0^{2\pi}(3\cos^2 t+3\,\text{sen}^2\,t+1)\sqrt{3}\,dt=4\sqrt{3}\int_0^{2\pi}dt=8\pi\sqrt{3}$$

10.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

01. Sea $\vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular tal que $\alpha([a,b]) = C \subset \mathbb{R}^n$ es la traza de $\vec{\alpha}$.

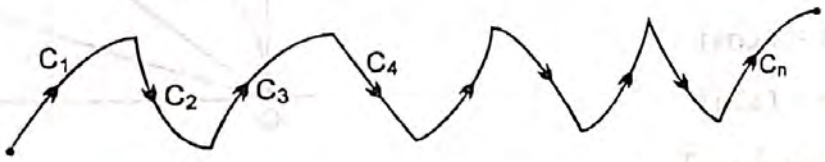
Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas en el conjunto abierto U que contiene a la curva C. Entonces se cumplen :

a) $\int_C k f\, ds = k \int_C f\, ds$, k es una constante

b) $\int_C (f \pm g)\, ds = \int_C f\, ds \pm \int_C g\, ds$

02. Si la curva $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots\ldots C_n$ se forma uniendo los extremos de un número finito de las curvas regulares $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$, entonces :

$$\int_{C=C_1\cup\ldots C_n} f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \int_{C_2} f\, ds + \ldots\ldots + \int_{C_n} f\, ds$$

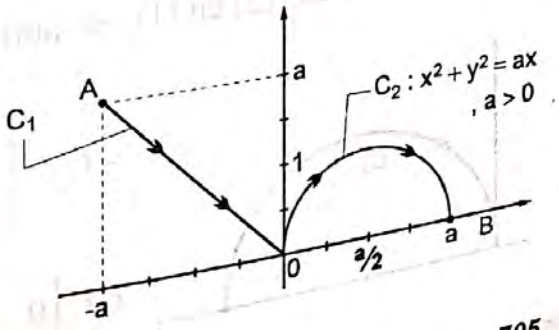


03. Dada la curva C con una orientación determinada, se denota por $-C$ la misma curva con una orientación opuesta, y se cumple : $\int_{-C} f\, ds = -\int_C f\, ds$

04. $\int_{C\cup(-C)} f\, ds = \int_C f\, ds + \int_{-C} f\, ds = 0$

EJEMPLO 4 Calcular $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\, ds$,

donde $C = C_1 \cup C_2$ está dada en el siguiente gráfico:



Solución:

Se pide hallar : $\int_{C=C_1 \cup C_2} \sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int_{C_1} \sqrt{x^2+y^2}\, ds + \int_{C_2} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$

El procedimiento ordenado, a seguir, es el siguiente :

Paso 1 **a)** Parametrizar el camino C_1, que es el segmento de recta $\overrightarrow{AO}$ que sigue el sentido desde A hasta 0.

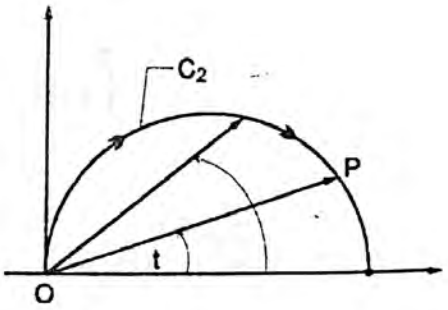
$$\begin{aligned} \vec{\alpha} : [0,1] &\longrightarrow IR^2 \\ t &\longmapsto \vec{\alpha}(t) = A + (0-A)\,t \\ &= (-a\,,\,a) + ((0\,,\,0) - (-a\,,\,a))\,t \\ &= (-a + at\,,\,a - at) \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares :

i) $\vec{\alpha}'(t) = (a\,,\,-a)$ *ii)* $|\vec{\alpha}'(t)| = a\sqrt{2}$ *iii)* $ds = a\sqrt{2}\,t$

b) Parametrización el camino C_2.

- Eligiendo como polo el origen de coordenadas "O" se obtienen las coordenadas polares :



$$(1) \quad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}$$

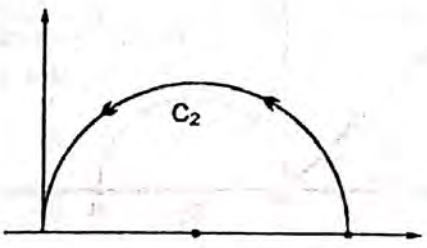
$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Con estas coordenadas polares, la ecuación $x^2 + y^2 = ax$ se convierte en :

$$r^2 = ar\cos t \Rightarrow r = a\cos t \ldots\ldots (2)$$

- La variación de t es : $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ para $-C_2$ que es el opuesto de C_2

- Al reemplazar (2) en (1) , se obtiene la parametrización del camino $-C_2$



$$-C_2 : \begin{cases} x = a\cos t \cdot \cos t = a\cos^2 t \\ y = a\cos t \operatorname{sen} t = a\cos t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} : \left[0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow IR^2 \\ t &\longmapsto \vec{\alpha}(t) = (a\cos^2 t\,,\,a\cos t \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

• *Cálculos auxiliares :*

i) $\vec{\alpha}'(t) = (a \cdot 2\cos t(-\operatorname{sen} t)\,,\, a(-\operatorname{sen} t \operatorname{sen} t + \cos t \cos t))$

$\vec{\alpha}'(t) = (-a \operatorname{sen} 2t\,,\, a\cos 2t)$

ii) $|\vec{\alpha}'(t)| = a$

iii) $ds = a\,dt$

Paso 2 Ya podemos integrar :

a) $$\int_{C_1} \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_0^1 \sqrt{(-a+at)^2+(a-at)^2}\; a\sqrt{2}\,dt$$

$$= \int_0^1 a(t-1)\sqrt{2}\; a\sqrt{2}\,dt = 2a^2 \int_0^1 (t-1)\,dt = -a^2$$

b) $$\int_{-C_2} \sqrt{x^2+y^2}\,ds = -\int_{C_2} \sqrt{x^2+y^2}\,ds = -\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2}\; a\,dt = -a\int_0^{\pi/2} r\,dt$$

Pero $r = a\cos t \Rightarrow = -a\int_0^{\pi/2} a\cos t\,dt = -a^2$

Paso 3 *Conclusión :* $\displaystyle\int_C f\,ds = -a^2 - a^2 = -2a^2$

EJEMPLO 5 Calcular $\displaystyle\int_C |y|\,ds$, donde C es el arco de la lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)$$

Solución:

Paso 1 Eligiendo como ***POLO*** el origen de coordenadas y las transformaciones polares $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}$.

La ecuación $(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)$ se convierte en :

$$(r^2)^2 = a^2\,(r^2\cos^2 t - r^2\operatorname{sen}^2 t)$$

$$r^4 = a^2\, r^2\cos 2t$$

$$r^2 = a^2\cos 2t$$

$$r = a\sqrt{\cos 2t}\;, \text{ donde } \cos 2t > 0 \iff -\tfrac{\pi}{4} \le t \le \tfrac{\pi}{4}$$

Entonces la parametrización de C es : $\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2t}\,\cos t \\ y = a\sqrt{\cos 2t}\,\operatorname{sen} t \end{cases}$

$$\vec{\alpha}:\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (a\sqrt{\cos 2t}\,\cos t\,,\, a\sqrt{\cos 2t}\,\operatorname{sen} t)$$

Paso 2 Necesitamos $ds = |\vec{\alpha}'(t)|\,dt$.

Cálculos auxiliares :

i) $\vec{\alpha}'(t) = \left(a\left(\frac{-2\operatorname{sen} 2t}{2\sqrt{\cos 2t}}\right)\cos t + a\sqrt{\cos 2t}\,(-\operatorname{sen} t)\,,\, a\frac{(-2\operatorname{sen} 2t)}{2\sqrt{\cos 2t}}\operatorname{sen} t + a\sqrt{\cos 2t}\cos t \right)$

ii) $|\vec{\alpha}'(t)| = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}$

iii) $ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}\,dt$

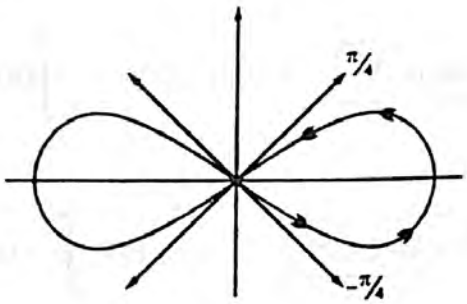
Paso 3 $\displaystyle\int_C |y|\,ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left| a\sqrt{\cos 2t}\,\operatorname{sen} t \right| \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}\,dt$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\operatorname{sen} t|\,dt\,,$$

$$= a^2 \left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} -\operatorname{sen} t\,dt + \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} t\,dt \right]$$

$$= a^2 \left[\cos t \int_{t=-\frac{\pi}{4}}^{t=0} - \cos t \int_{t=0}^{t=\pi/4} \right]$$

$= a^2(2-\sqrt{2})$ ← *es el resultado de integrar en la rama derecha de la lemniscata*



donde : $|\operatorname{sen} t| = \begin{cases} \operatorname{sen} t & , \text{ si } \operatorname{sen} t \geq 0 \\ -\operatorname{sen} t & , \text{ si } \operatorname{sen} t < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \operatorname{sen} t & , \text{ si } 0 \leq t \leq \pi/4 \\ -\operatorname{sen} t & , \text{ si } -\frac{\pi}{4} < t < 0 \end{cases}$

Paso 4 Conclusión : Como la integral de lineal es para las dos ramas de la lemniscata, entonces :

$$\int_C |y|\,ds = 2a^2(2-\sqrt{2})$$

10.2.1 APLICACIONES DE LA INTEGRAL CURVILÍNEA DE 1ª ESPECIE A LA MECÁNICA

1. MASA DE UNA CURVA

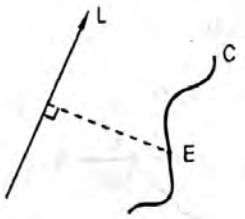
Si $\delta = \delta(x,y,z)$ es la densidad lineal en el punto variable (x,y,z) de la curva C, entonces la masa M de la curva es igual a :

$M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds$	***Datos necesarios :*** 1. La ecuación paramétrica de la curva C: $\alpha(t)$. 2. $ds = \lvert\alpha'(t)\rvert\,dt$ 3. $t \in [a,b]$

2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA CURVA $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\,\delta(x,y,z)\,ds$	$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\,\delta(x,y,z)\,ds$	$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z\,\delta(x,y,z)\,ds$

3. MOMENTO ESTÁTICO Y MOMENTO DE INERCIA

$M_L = \int d(x,y,z)\,\delta(x,y,z)\,ds$ d = distancia de un punto de la curva C a la recta L. δ = densidad lineal. ds = $\lvert\alpha'(t)\rvert\,dt$	$I_L = \int d^2(x,y,z)\,\delta(x,y,z)\,ds$ 
Los momentos estáticos respecto a los planos coordenadas son : $M_{xy} = \int z\,\delta(x,y,z)\,ds$ $M_{xz} = \int y\,\delta(x,y,z)\,ds$ $M_{yz} = \int x\,\delta(x,y,z)\,ds$	Los momentos de inercia respecto a los ejes x, y, z, son respectivamente $I_x = \int_C (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,ds$ $I_y = \int_C (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,ds$ $I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,ds$

Problema 1 Un alambre de densidad constante K tiene la forma $|x| + |y| = a$ Encuentre sus momentos de inercia con respecto al eje Y y co respecto al eje Z.

Solución:

Se pide hallar : $I_y = \int_\Gamma (x^2 + z^2)\,\delta(x,y,z)\,ds$ y $I_z = \int_\Gamma (x^2 + y^2)\,\delta(x,y,z)\,ds$

Como datos tenemos : 1) La curva $\Gamma : |x| + |y| = a$

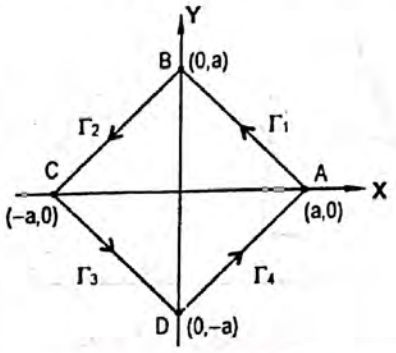
2) La densidad es constante, en decir $\delta(x,y,z) = K$

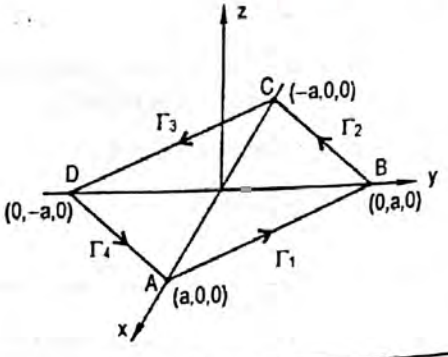
Para integrar, requerimos de la ecuación paramétrica de la curva Γ.
¿Cómo se parametriza la curva Γ?

En primer lugar, definamos los dos valores absolutos que aparecen en la ecuación cartesiana $|x| + |y| = a$:

$$|x| + |y| = a \iff \begin{cases} x+y=a \ , & \text{si} \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq 0 \\ -x+y=a \ , & \text{si} \quad x < 0 \ , \quad y \geq 0 \\ x-y=a \ , & \text{si} \quad x \geq 0 \ , \quad y < 0 \\ -x-y=a \ , & \text{si} \quad x < 0 \ , \quad y < 0 \end{cases}$$

En segundo lugar, graficar cada recta obtenida :





Al observar el gráfico notamos:

1. Γ es una curva seccionalmente regular. Γ no es derivable en los puntos A , B , C y D.
2. Γ es la yuxtaposición (concatenación) de los caminos Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 lo cual se denota así :

$$\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2 * \Gamma_3 * \Gamma_4$$

entonces

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}$$

En tercer lugar, parametrizar cada camino e integrar en cada camino.

Γ_1: $\alpha(t) = A + t(B-A) = (a - at, at, 0)$, $t \in [0,1]$

$\alpha'(t) = (-a, a, 0)$, $|\alpha'(t)| = a\sqrt{2}$, $ds = |\alpha'(t)|\,dt$

Γ_2: $\alpha(t) = B + t(C-B) = (-at, a - at, 0)$, $t \in [0,1]$

$\alpha'(t) = (-a, -a, 0)$, $|\alpha'(t)| = a\sqrt{2}$

Γ_3: $\alpha(t) = C + t(D-C) = (-a + at, -at, 0)$, $t \in [0,1]$

$\alpha'(t) = (a, -a, 0)$, $|\alpha'(t)| = a\sqrt{2}$

Γ_4: $\alpha(t) = D + t(A-D) = (at, -a + at, 0)$, $t \in [0,1]$

$\alpha'(t) = (a, a, 0)$, $|\alpha'(t)| = a\sqrt{2}$

En cuarto lugar , calcular I_y y I_z

a) $I_z = \int_\Gamma (x^2 + y^2)\, K\, ds$

$= K \int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds$

$= K \left\{ \int_{\Gamma_1} (x^2 + y^2)\, ds + \int_{\Gamma_2} (x^2 + y^2)\, ds + \int_{\Gamma_3} (x^2 + y^2)\, ds + \int_{\Gamma_4} (x^2 + y^2)\, ds \right\}$

$= K \left\{ \int_0^1 [(a - at)^2 + (at)^2]\, a\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 [(-at)^2 + (a - at)^2]\, a\sqrt{2}\, dt \right.$

$\left. + \int_0^1 [(-a + at)^2 + (-at)^2]\, a\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 [(at)^2 + (-a + at)^2]\, a\sqrt{2}\, dt \right\}$

$= 4Ka^2 a\sqrt{2} \int_0^1 [1 - 2t + 2t^2]\, dt$

$= \frac{8}{3} K a^3 \sqrt{2}$

$I_y = \int_\Gamma K(x^2 + z^2)\, ds$ ..... de manera similar

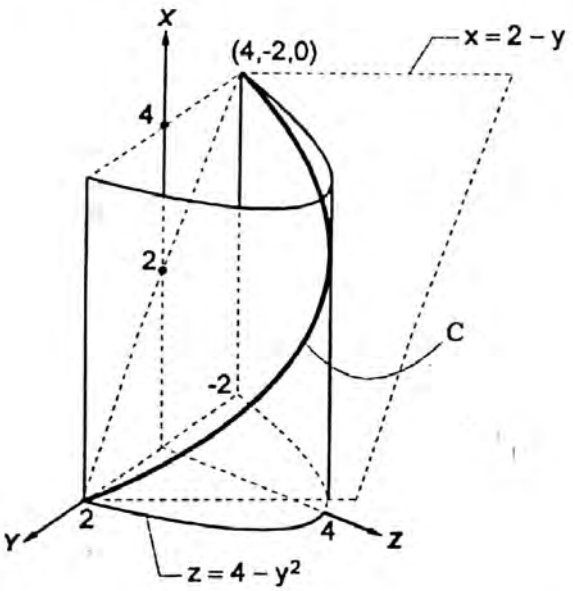
$= \frac{4}{3} K a^3 \sqrt{2}$

Problema 2 Un alambre tiene forma de la intersección del cilindro $z = 4 - y^2$; $z \geq 0$ con el plano $x = 2 - y$. Determinar la masa del alambre si la densidad en cada punto es $\delta(x,y,z) = x$.

Solución:

1. Se pide hallar $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_C x \cdot ds$

2. Según el problema, la curva C es la intersección del cilindro $z = 4 - y^2$, $z \geq 0$ con el plano $x = 2 - y$.



$$C:\begin{cases} z = 4 - y^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ x = 2 - y \Rightarrow y = 2 - x & \ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

(2) en (1): $Z = 4 - (2 - x)^2$ ..... (3)

3. La parametrización de C es:

$$C:\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ en (2)} \\ z = 4 - (t-2)^2 & \ldots\ldots\ldots \text{ en (3)} \end{cases}$$

$t \in [0,4]$

La curva C empieza en $(0,2,0)$ y termina en $(4,-2,0)$.

4. La ecuación vectorial de C es: $\alpha(t) = (t, 2-t, 4-(t-2)^2)$, $0 \leq t \leq 4$

$$\alpha'(t) = (1, -1, -2(t-2))$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1+1+4(t-2)^2}$$

$$= 2\sqrt{(t-2)^2 + \tfrac{1}{2}}$$

5. $$\int_C x \cdot ds = \int_0^4 t\,|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^4 2t\sqrt{(t-2)^2+\tfrac{1}{2}}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 t\sqrt{(t-1)^2+\tfrac{1}{2}}\,dt = 2\left\{ \tfrac{1}{3}\left((t-1)^2+\tfrac{1}{2}\right)^{3/2} + \tfrac{1}{2}\text{Ln}\left[t-1+\sqrt{(t-1)^2+\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\text{Ln}(t-1)+\sqrt{(t-1)^2+\tfrac{1}{2}} \right] \right\}$$

= *Continue* .....

Cálculo de $I = \int t\sqrt{(t-2)^2+\frac{1}{2}}\,dt$, hacer $t-1=y \Rightarrow t=y+1$, $dt=dy$

$$= \int (y+1)\sqrt{y^2+\tfrac{1}{2}}\,dy = \int y\sqrt{y^2+\tfrac{1}{2}}\,dy + \int \sqrt{y^2+\tfrac{1}{2}}\,dy$$

$$= \textit{ver tabla}$$

Problema 3 Hallar el centro de masa de una pieza de alambre de densidad constante enrollada en la forma de la hélice:

$\vec{r}(t) = (4\cos t\,,\,4\operatorname{sen} t\,,\,3t)$, $t \in [0\,,\,\pi]$

Solución:

1. Se pide hallar $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, donde:

$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_C x\,\delta(x,y,z)\,ds$	$\overline{y} = \frac{1}{M}\int_C y\,\delta(x,y,z)\,ds$	$\overline{z} = \frac{1}{M}\int_C z\,\delta(x,y,z)\,ds$

2. Datos: a) $\delta(x, y, z) = K \longleftarrow$ *constante*

b) $\vec{r}(t) = (4\cos t\,,\,4\operatorname{sen} t\,,\,3t)$, $t \in [0,\pi)$

$\vec{r}\,'(t) = (-4\operatorname{sen} t\,,\,4\cos t\,,\,3)$

$\left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 9}$

$= 5$

c) $ds = \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt = 5\,dt$

3. Hallar la masa $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds$

$$= \int_0^{\pi} K(5\,dt) = 5k(\pi) = 5k\pi.$$

4. Cálculo de $\int_C x\,\delta(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi} 4\cos t \cdot K \cdot 5dt$

$$= 20K\int_0^{\pi} \cos t\,dt =$$

FUNCIÓN PAR

$$= 20K \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 40K$$

5. Cálculo de $\int_C y\,\delta(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi} 4\,\text{sen}\,t \cdot K\,5\,dt$

$$= 20K \int_0^{\pi} \text{sen}\,t\,dt$$

$$= 40k$$

6. Cálculo de $\int_C z\,\delta(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi} 3t \cdot K \cdot 5dt$

$$= 15K \int_0^{\pi} t \cdot dt = \frac{15}{2} K \pi^2$$

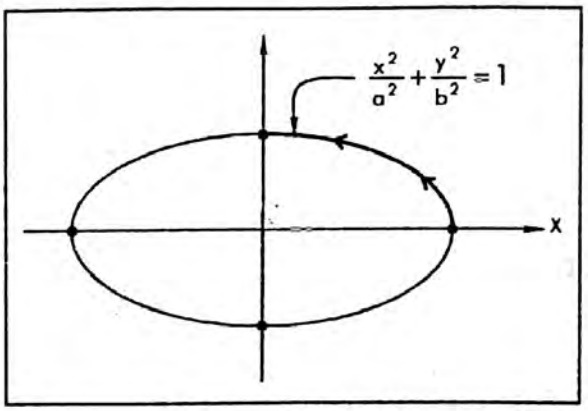
7. Conclusión:

$$\overline{x} = \frac{1}{5k\pi} \cdot 40k \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{5k\pi} \cdot 40k \quad , \quad \overline{z} = \frac{1}{5k\pi} \cdot \frac{15k}{2}\pi^2$$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{8}{\pi}} \quad , \quad \boxed{\overline{y} = \frac{8}{\pi}} \quad , \quad \boxed{\overline{z} = \frac{3}{2}\pi}$$

Problema 4 Hallar la masa de una cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situada en el primer cuadrante si la densidad en cada punto es igual a la ordenada de ese punto.

Solución:



1. Se pide hallar $M = \int_C \delta(x,y)\,ds$

2. Datos: a) La curva es $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

que al parametrizar es:

$$C: \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \text{sen}\,t \end{cases}$$

$t \in \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ..... (en el 1er. cuadrante)

Es decir, $\alpha(t) = (a\cos t\ ,\ b\,\text{sen}\,t)$

$\alpha'(t) = (-a\,\text{sen}\,t\ ,\ b\cos t)$

$ds = |\alpha'(t)|\,dt$

b) La densidad es $\delta(x,y) = y$ ⟵ *ORDENADA*

3. Reemplazar los datos en 1:

$$M = \int_C \delta(x,y)\,ds$$

$$= \int_C y\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\; dt$$

$$= b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\; dt$$

En una elipse se tiene $\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = -c^2 \\ \frac{c}{a} = e \qquad \text{.....} \textit{(excentricidad)} \end{cases}$

Entonces: $$M = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}\; dt$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\; dt = \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2e} \operatorname{arc\,sen} e$$

Sugerencia: hacer $u = e \cos t$

Problema 5 Hallar la masa total de un alambre cuya forma es la de la curva $y = |x|$, con $-1 \le x \le 1$, si la densidad de cada punto P de él es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

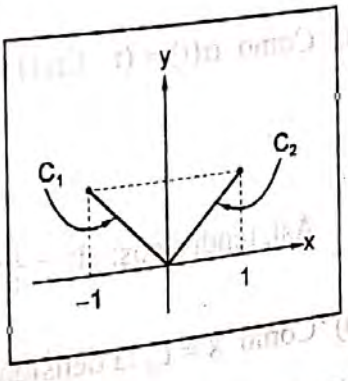
Solución:

1. Se pide hallar $M = \int_C \delta(x,y)\,ds$, datos $\begin{cases} \delta(x,y) = |xy| \\ y = |x| = \begin{cases} x & , 0 \le x \le 1 \\ -x & , -1 \le x < 0 \end{cases} \end{cases}$

$$= \int_C |xy|\,ds$$

$$= \int_C |x||y|\,ds \quad , \quad y = |x|$$

$$= \int_C |x|^2\,ds = \int_C x^2\,ds$$



2. Como $C = C_1 \cup C_2$, donde

C_1 : $y = -x$, $-1 \le x < 0$
C_2 : $y = x$, $0 \le x \le 1$

Al paremetrizar se obtiene:

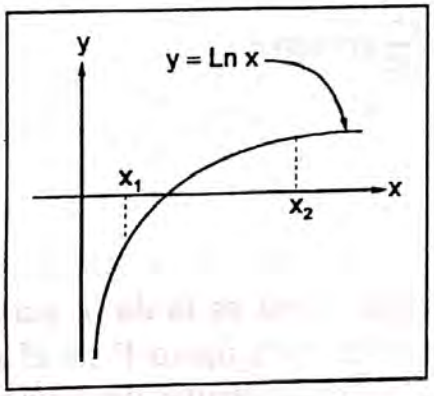
C_1 : $\alpha(t) = (t, -t)$, $-1 \le t < 0$
$\alpha'(t) = (1, -1)$

C_2 : $\alpha(t) = (t, t)$, $0 \le t \le 1$
$\alpha'(t) = (1, 1)$

entonces
$$\int_C x^2\, ds = \int_{C_1} x^2\, ds + \int_{C_2} x^2\, ds$$
$$= \int_{-1}^{0} t^2 \sqrt{2}\, dt + \int_{0}^{1} t^2 \sqrt{2}\, dt$$
$$= \sqrt{2} \int_{-1}^{0} t^2\, dt + \sqrt{2} \int_{0}^{1} t^2\, dt$$
$$= \sqrt{2}\,\tfrac{1}{3} + \sqrt{2}\,\tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}$$

Problema 6 Hallar la masa de un fragmento de la línea $y = \text{Ln}x$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son x_1 , x_2 , si la densidad de la línea en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

Solución:



1. Se pide hallar: $M = \int_C \delta(x, y)\, ds$
2. ***Datos:***
   a) La densidad es $\delta(x,y) = x^2$
   b) La ecuación cartesiana de la línea es $y = \text{Ln}\, x$. Para parametrizar dicha línea hacemos $x = t$, por tanto $y = \text{Ln}\, t$.

Así tendremos la ecuación vectorial de la línea: $\boxed{\alpha(t) = (t\,,\, \text{Ln}\, t) \quad t_1 < t < t_2}$

3. Necesitamos la longitud de arco ds.

Por definición de longitud de arco, se tiene: $ds = |\alpha'(t)|dt$

a) Como $\alpha(t) = (t\,,\, \text{Ln}\, t)$, entonces $\alpha'(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right)$, $t > 0$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{t^2 + 1}$$

Así, tendremos: $ds = \frac{1}{t}\sqrt{t^2 + 1}\,dt$

b) Como $x = t$, la densidad será: $\delta(x,y) = t^2$

4. Por lo tanto, la masa será:

$$M = \int_C \delta(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

$$= \frac{1}{3}[(t_2+1)^{3/2} - (t_1+1)^{3/2}]$$

Problema 7 Hallar la masa del arco de línea $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ desde el punto correspondiente a $t = 0$, hasta un punto cualquiera si la densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar.

Solución:

1. Se tiene como datos:

a) $\alpha = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, $0 \le t$

b) $\delta(x,y,z) = \frac{k}{r^2}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$= \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\operatorname{sen}^2 t + e^{2t}}$$

$$= \frac{k}{2e^{2t}} \qquad = \sqrt{2e^{2t}}$$

2. Se pide hallar la mesa $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds$

donde: $ds = |\alpha'(t)|\,dt$

De $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, hallar:

$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t, e^t)$

$|\alpha'(t)| = \sqrt{3}e^t$

Luego $ds = \sqrt{3}e^t\,dt$

3. Sustituir en M: $M = \int_0^t \frac{k}{2e^{2t}} \cdot \sqrt{3}e^t \cdot dt = \frac{k\sqrt{3}}{2}\int_0^t e^{-t}dt$

$$= \frac{k\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-t})$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Grupo 1

01. Calcular la integral de línea con respecto a la longitud de arco en cada uno del ejercicio de los ejercicios desde a) hasta d).

a) $\int_C (x+y)ds$, siendo C el triángulo de vértices (0,0) , (1,0) y (0,1), recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Rpta.: $\sqrt{2}+1$

b) $\int_C y^2\,ds$, en donde C tiene la ecuación vectorial:
$\alpha(t) = a(t-\text{sent})\,\mathbf{i} + a(1-\cos t)\,\mathbf{j}$,
$0 \le t < 2\pi$

c) $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, donde C tiene la ecuación vectorial $\alpha(t) = a(\cos t + t\,\text{sent})\mathbf{i} + a(\text{sent} - t\cos t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

d) $\int_C z\,ds$, donde C tiene la ecuación vectorial: $\alpha(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\,\text{sent}\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le t_0$

02. Consideremos un alambre semicircular uniforme de radio a.

a) Demostrar que el centroide está situado en el eje de simetría a una distancia $\frac{2a}{\pi}$ del centro.

b) Demostrar que el momento de inercia respecto al diámetro que pasa por los extremos del alambre es $\frac{1}{2}Ma^2$, siendo M la masa del alambre.

03. Un alambre tiene la forma de un circulo $x^2+y^2=a^2$. Determinar su masa y su momento de inercia respecto a un diámetro si la densidad en (x,y) es $|x|+|y|$.

04. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la de la curva de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$ si la densidad del alambre es (x,y,z) es x^2.

05. Un alambre uniforme tiene la forma de la porción de curva de intersección de las dos superficies:

$$x^2+y^2=z^2 \quad \text{e} \quad y^2=x$$

que une los puntos (0,0,0) y $(1,1,\sqrt{2})$. Hallar la coordenada $\overline{Z}$ del centroide.

06. Calcular la masa M de un muelle que tiene forma de hélice cuya ecuación vectorial es:

$$\alpha(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sent}\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$$

si la densidad en (x,y,z) es $x^2+y^2+z^2$

Rpta.:

$$b\sqrt{a^2+b^2}\,(2\pi^2a^2+4\pi^4b^2)$$

07. Sea Γ la hélice $\vec{\alpha} : [0,2\pi] \longrightarrow IR^3$ definido por $\vec{\alpha}(t) = (\cos t , \operatorname{sen} t , t)$ y sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Hallar $\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,ds$

Rpta.: $\frac{2\sqrt{2\pi}}{3}(3+4\pi^2)$

08.

a) Mostrar que la integral de trayectoria de f(x,y) a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por:

$r = r(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

b) Calcular la longitud de arco de $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

09. Si $f : [a,b] \longrightarrow IR$ es continuamente diferenciable a trozos, sea la longitud de la gráfica de f en [a,b] definida como longitud de la trayectoria.
$t \longmapsto (t , f(t))$ para $t \in [a,b]$

a) Mostrar que la longitud de la gráfica de f en [a,b] es:

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

b) Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$, a $x = 2$.

10. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $x+y+z=0$ si la densidad en (x,y,z) está dada por $\delta(x,y,z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

11. Halle la masa total de un alambre cuya forma es la de la curva $y = \operatorname{Ln} x$, comprendida entre $x_1 = 1$ y $x_2 = e$, si la densidad en cada punto **P** de él es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

Rpta.: $\frac{1}{3}(1+e^2)^{3/2} - 2^{3/2}$

12. Halle la masa total de un alambre "en V", cuya forma es la de la curva $y = |x|$, comprendida entre $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, si la densidad en cada punto de él es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

Rpta.: $2\sqrt{2}/3$

Grupo 2

01. Hallar la masa de la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = bt$, cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado del radio polar de ese punto.

Rpta.: $m = \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)$, $\delta(x,y,z) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

02. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la primera semiespira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt$, considerando la densidad constante

Rpta.: $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0\,,\,\frac{2a}{\pi}\,,\,\frac{b\pi}{2}\right)$

03. Calcular los momentos de inercia, con respecto a los ejes de coordenadas, de la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = \frac{h}{2\pi}t$.

Rpta.: $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{2}\right)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$, $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$

04. Calcular la masa m de una varilla cuya densidad es $\rho(x,y) = x$ y tiene la forma $y = 4 - x^2$, $0 \le x \le 2$.

Rpta.: 18.67

05. Calcular el centro de masa $(\bar{x},\bar{y})$ de la varilla que tiene la forma $y = x^2$, $0 \le x \le 3$.

Rpta.: $\bar{x} = 2.227$, $\bar{y} = 5.324$

06. Hallar la masa de un fragmento de la línea $y = \text{Ln}\,x$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son x_1 y x_2, si la densidad de la línea en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

Rpta.: $\frac{1}{3}\left\{(x_2^2+1)^{2/3} - (x_1^2+1)^{2/3}\right\}$

07. Hallar la masa de un fragmento de la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$, $x_2 = a$, si la densidad de la línea en cada punto es inversamente proporcional a la ordenada del punto siendo la densidad en el punto (0 , a) igual a δ.

Rpta.: δa

08. Hallar la masa de la cuarta parte de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, situado en el primer cuadrante si la densidad en cada punto es igual a la ordenada de ese punto.

Rpta.: $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon}$, ε = excentricidad de la elipse

09. Hallar la masa del arco de la linea $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\text{sen}\,t$, $z = e^t$ desde el punto correspondiente a $t = 0$ hasta un punto cualquiera si la densidad del arco es

inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto (1,0,1) es igual a 1.

Rpta.: $(1-e^{-t})\sqrt{3}$

10. Calcular el momento estático de la primera espira de la linea helicoidal cónica $x = t\cos t$, $y = t\,\text{sen}\,t$, $z = t$ con respecto al plano XY, considerando la densidad proporcional al cuadrado de distancia desde este plano $\rho = kz^2$.

Rpta.: $\frac{8k\sqrt{2}}{15}[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{3/2}+1]$

11. Determinar la masa del contorno de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si su densidad lineal en cada punto P(x,y) es igual a $|y|$.

Rpta.: $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsen\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$

12. Hallar la masa de la primera espira de la elipse circular $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt$, si la densidad en cada punto es igual al radio del mismo.

Rpta.: $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\frac{a^2}{2b}\text{Ln}\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)$

13. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del semiarco de la cicloide $x = a(t-\text{sen}\,t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le \pi$

Rpta.: $\left(\frac{4}{3}a\,,\frac{4}{3}a\right)$

14. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje OZ, de la primera espira de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt$.

Rpta.: $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$

15. ¿Con qué fuerza influye la masa M, distribuida con densidad constante por la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, sobre la masa m, situado en el punto A(0,0,b)?

Rpta.: $\frac{kMmb}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}$

16. Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de la parábola $y = x^2$ desde $(-2,4)$ hasta $(2,4)$ si su densidad en cada punto del alambre es $\delta(x,y) = |y|$

Rpta.: $m = -\frac{3}{8}17\sqrt{17} - \frac{1}{32}\text{Ln}\,(4 + 17\sqrt{17})$

- En los problemas 17 y 18 se trata de hallar la masa y el centro de masa de un alambre plano cuya sección transversal es de área constante "α".

  Fórmulas: $m = \alpha \int_a^b \rho(s)\,ds$, $\rho(s)$ = densidad del alambre

  $ds = \|\beta'(t)\|\,dt$, $\beta(t)$ es la parametrización del arco de curva del alambre.

  Los primeros momentos del alambre de masa "m" con respecto al plano YZ y el plano ZX es, respectivamente:

$$M_{yz} = \alpha \int_a^b x\,\rho(s)\,ds \quad , \quad M_{xz} = \alpha \int_a^b y\,\rho(s)\,ds$$

17. Un alambre L con sección transversal de área constante α tiene la propiedad de que el centro de cualquiera de sus secciones transversales están en la curva C que es la gráfica de $\left\{(x,y)/y = \sqrt{a^2 - x^2} \ , \ x \in [0,a]\right\}$

Si la densidad $\rho(s)$ en cada punto P(x,y,z) del alambre es proporcional a la distancia de (x,y,0) a la parte positiva del eje X, encuentre el centro de masa de L

Rpta.: $m = ka^2\alpha$, $\bar{x} = \frac{a}{2}$, $\bar{y} = \frac{a\pi}{4}$, $\bar{z} = 0$

18. Un alambre L con sección transversal de área α y densidad constante k tiene la propiedad de que el centro de cualquiera de sus secciones transversales está en la curva C, que es gráfica de $\left\{(x,y)/y = \sqrt{a^2 - x^2} \ , \ x \in [0,a]\right\}$

Rpta.: $m = \frac{\alpha ka\pi}{2}$, $M_{yz} = \alpha ka^2$, $M_{xz} = \alpha ka^2$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{2a}{\pi}, \frac{2a}{\pi}, 0\right)$

19. Encuentre el centroide de la curva que es la gráfica en coordenadas polares del conjunto de pares ordenados $\left\{(r,\theta)/r = a\,, \frac{-\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right\}$

Rpta.: $\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2\pi}, 0\right)$

20. Hallar la masa de un muelle con forma de hélice circular $\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + t\,\vec{k})$, $0 \le t \le 6\pi$ siendo la densidad del alambre $\rho(x,y,z) = 1 + z$.

Rpta.: $m = 6\pi\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{3}}\right)$

Grupo 3 INTEGRALES DE LINEA SOBRE CAMPOS ESCALARES

Calcule la integral de línea:

01. $\int_C 2x\,ds$ donde C es el segmento de recta que va de (1,2) a (3,5)

Rpta.: $4\sqrt{13}$

02. $\int_C (3x + y)\,ds$ donde C es el segmento de recta que va desde (5,2) a (1,1)

Rpta.: $\frac{21}{2}\sqrt{17}$

03. $\int_C 3x\,ds$ donde C es el cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, que va de (2,0) a (0,2).

Rpta.: 12

04. $\int_C 3y\,ds$ donde C es la porción de $y = x^2$ que va desde (0,0) a (2,4)

Rpta.: 25.41

05. $\int_C 4z\,ds$ donde C es el segmento de recta que va de (1,0,1) a (2, –2,2)

Rpta.: $6\sqrt{6}$

06. $\int_C xy\,ds$ donde C es el arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situado en el primer cuadrante.

Rpta.: $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$

07. $\int_C xy\,ds$, donde C es el contorno del cuadrado $|x| + |y| = a$, $a > 0$.

Rpta.: 0

08. $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, donde C es un segmento de recta que une entre si los puntos **O**(0,0) y A(1,2).

Rpta.: $\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

09. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, donde C es el arco de la envolvente de la circunferencia $x = a(\cos t + t\,\text{sen}t)$, $y = a(\text{sen}t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta.: $\frac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{3/2} - 1]$

10. $\int_C (x^2+y^2)^2\,ds$, donde C es el arco de la espiral logarítmica $r = ae^{m\theta}$ $(m > 0)$ desde el punto A(0,a) hasta el punto B $(-\infty,0)$

Rpta.: $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$

11. $\int_C (x+y)\,ds$, donde C es el lazo derecho de la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$

Rpta.: $a^2\sqrt{2}$

12. $\int_C (x+y)\,ds$, donde C es un arco de la curva $x = t$, $y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$

Rpta.: $\frac{1}{54}(56\sqrt{7} - 1)$

13. $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, donde C es la primera espira de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}t$, $z = bt$

Rpta.: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,\text{arctg}\,\frac{2\pi b}{a}$

14. $\int_C \sqrt{2y^2+z^2}$, donde C es el circulo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$

Rpta.: $2\pi a^2$

15. $\int_L \frac{ds}{x-y}$, donde L es un segmento de la recta $y = \frac{1}{2}x - 2$ comprendido entre los puntos A(0, –2) y B(4,0).

Rpta.: $\sqrt{5}\,\text{Ln}2$

16. $\int_L xy\,ds$, donde L es el contorno de un rectángulo cuyos vértices son A(0,0) , B(4,0) , C(4,2) y D(0,2).

Rpta.: 24

17. $\int_L y\,ds$, donde L es un arco de la parábola $y^2 = 2px$, recortado por la parábola $x^2 = 2py$.

Rpta.: $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5} - 1)$

18. $\int_L (x^2+y^2)^n\,ds$, donde L es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Rpta.: $2\pi a^{2n+1}$

19. $\int_L \sqrt{2y}\,ds$, donde L es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \text{sen}t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Rpta.: $4\pi a\sqrt{a}$

20. Calcular la integral $\int_L (x-y)\,ds$, donde L es la circunferencia $x^2+y^2=ax$

Rpta.: $\frac{\pi a^2}{2}$

21. Calcular la integral $\int_C x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$ donde C es una línea dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\geq 0$ (mitad de la lemniscata)

Rpta.: $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

22. Calcular $\int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds$, donde C es una parte de la espiral de Arquímedes $r=2\theta$, comprendida dentro de un círculo de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

Rpta.: $\frac{1}{12}[(R^2+4)^{3/2}-8]$

23. Calcular $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, donde C es la primera espira de la helicoide:

$x=a\cos t$, $y=a\,\text{sent}$, $z=at$.

Rpta.: $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$

24. Calcular $\int_C xyz\,ds$, donde C es una cuarta parte de la circunferencia:

$x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$,

situada en el primer octante.

Rpta.: $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$

25. Calcular la integral $\int_C (x+y)\,ds$, donde C es una cuarta parte de la circunferencia:

$x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$,

situado en el primer octante.

Rpta.: $R^2\sqrt{2}$

10.3 INTEGRALES DE LÍNEA DE SEGUNDA ESPECIE

Las integrales de línea de segunda especie se refiere a las integrales de línea de campos vectoriales a lo largo de un camino.

***Definición* 1**

Sea $\vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva seccionalmente regular tal que $C = \vec{\alpha}([a,b])$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (x_1(t) \ldots\ldots, x_n(t))$$

es la traza de α.

Sea $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto F(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$$

y acotado en la región U que contiene a la curva C.

La integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de la curva C está definido por:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)) \bullet \alpha'(t)\,dt$$

Producto escalar

ACLARACIONES:

1. Si el campo vectorial $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está definido por:

   $\vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ y la parametrización de una curva $C \subset U$ está definida por:

$$\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$$

se tiene:

i) $\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t))$

ii) $d\vec{\alpha}'(t) = \vec{\alpha}(t)\,dt$

$$= (x'(t)\,dt, y'(t)\,dt)$$
$$= (dx, dy)\ ;\ dx = x'(t)\,dt,\ dy = y'(t)\,dt$$

Entonces $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha} = \int_C [Mdx+Ndy]$, donde $W = Mdx+Ndy$ se llama función 1– forma

$$= \int_a^b [M(x(t),y(t))\,x'(t)+N(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt$$

2. Si el campo vectorial $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está definido por $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ y la parametrización de la curva $C \subset U$ está definida por $\vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

se tiene:

i) $\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

ii) $d\vec{\alpha}'(t) = \alpha'(t)\,dt$

$$= (x'(t)\,dt\ ,\ y'(t)\,dt\ ,\ z'(t)\,dt)$$

$$= (dx, dy, dz)$$

Entonces: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha} = \int_C [Pdx+Qdy+Rdz]$, donde $W = Pdx + Qdy + Rdz$ se llama función 1 – forma

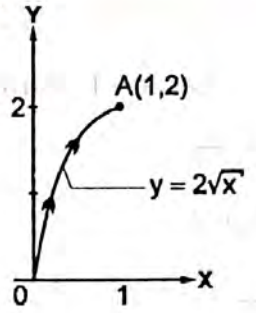
Nota:

Los ejemplos y problemas las vamos a desarrollar vectorialmente, para ello, necesariamente tenemos que parametrizar la curva.

EJEMPLO 1 Calcular $\int_C [y^2dx - xdy]$ donde C es la curva $y^2 = 4x$ desde $(0,0)$ a $(1,2)$.

Solución:

Paso 1 Si se puede graficar, hagámoslo:



Paso 2 Parametrizar el arco de parábola $\overset{\frown}{OA}$:

haciendo $\begin{cases} x = t \\ y = 2\sqrt{t} \end{cases}$

como $0 \le x \le 1$, entonces $0 \le t \le 1$

Así, tendremos : $\vec{\alpha}:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = \underbrace{(t}_{x}, \underbrace{2\sqrt{t})}_{y}$$

Paso 3 Para integrar necesitamos:

i) $\vec{\alpha}'(t) = \left(1, 2\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

ii) $d\vec{\alpha}(t) = \alpha'(t)dt = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = \left(\underbrace{dt}_{dx}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}dt}_{dy}\right)$

Paso 4 Ya podemos integrar:

$$\int_C [y^2dx - xdy] = \int_0^1 \left[(2\sqrt{t})^2(dt) - (t)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}dt\right)\right]$$

$$= \int_0^1 [4tdt - t^{1/2}dt] = \left[4\frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}t^{3/2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{4}{3}$$

EJEMPLO 2 Calcular $\int_\alpha [ydx + zdy + xdz]$ donde α es la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $z^2 + y^2 = 1$ (en sentido antihorario visto desde arriba y solo en el primer octante.

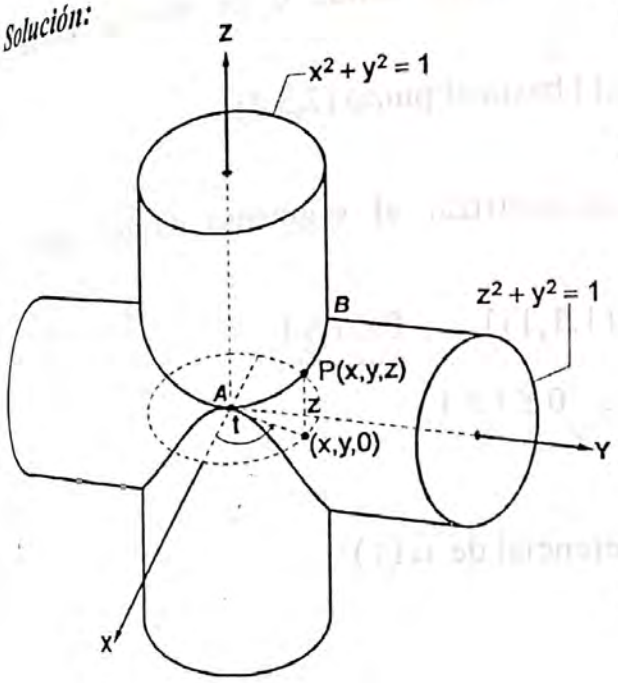
Solución:

Se pide hallar $\int_\alpha [ydx + zdy + xdz] = \int_\alpha (y,z,x)\cdot(dx,dy,dz)$

- En primer lugar, debemos parametrizar la curva $\alpha : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \ldots\ldots S_1 \\ z^2 + y^2 = 1 \ldots\ldots S_2 \end{cases}$

  Como vemos α es la intersección de los cilindros S_1 y S_2.

Solución:



- La curva en el primer octante es el arco $\widehat{AB}$.
- El punto P(x,y,z) pertenece a la curva $\widehat{AB}$, cuya parametrización se hace siguiendo los siguientes pasos :

1° Se parametriza el punto $(x,y,0)$ que pertenece al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, haciendo:

$$x = \cos t$$
$$y = \operatorname{sen} t$$

2° La componente z del punto $P \in \widehat{AB}$ se parametriza en la ecuación:

$$z^2 + y^2 = 1.$$

Como $y = \operatorname{sen} t \Rightarrow z^2 + \operatorname{sen}^2 t = 1 \Rightarrow z^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 t$

$$z^2 = \cos^2 t \Rightarrow z = \cos t$$

3° Entonces la parametrización de arco $\widehat{AB}$ es:

$\alpha : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $\boxed{\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t)}$

- Para integrar necesitamos el diferencial de $\vec{\alpha}(t)$, que se obtiene de

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$d\vec{\alpha}(t) = \alpha'(t)\,dt$$

$$\boxed{d\vec{\alpha} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t)\,dt}$$

- Ya podemos integrar:

$$\int_{\alpha} (y,z,x)\cdot(dx,dy,dz) = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} [-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - \operatorname{sen} t \cos t]\,dt = \int_0^{\pi/2} [\cos 2t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t]\,dt = -\tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 3 Calcular $\int_C x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$ donde C es un segmento de la recta desde el punto (1,1,1) hasta el punto (2,3,4).

Solución:

Paso 1 En primer lugar, debemos parametrizar el segmento dirigido desde (1,1,1) hasta (2,3,4)

$$\vec{\alpha}(t) = (1,1,1) + t[(2,3,4) - (1,1,1)] \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\vec{\alpha}(t) = (\underbrace{1+t}_{x}, \underbrace{1+2t}_{y}, \underbrace{1+3t}_{z}) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

Paso 2 En segundo lugar, hallar la diferencial de $\vec{\alpha}(t)$:

$$d\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}'(t)\,dt$$

$$= (1, 2, 3)\,dt$$

$$= (\underbrace{1dt}_{dx}, \underbrace{2dt}_{dy}, \underbrace{3dt}_{dz})$$

Paso 3 Ya podemos integrar:

$$\int_C x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz = \int_0^1 (1+t)\,dt + (1+2t)(2dt) + [1+t+1+2t-1](3dt)$$

$$= \int_0^1 [(1+t+2+4t+3+9t]\,dt = \int_0^1 [14t+6]\,dt = 13$$

EJEMPLO 4 Calcular $\int_{\overset{\frown}{OA}} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, donde $\overset{\frown}{OA}$ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, situado por el lado XOZ, donde $y > 0$

Solución:

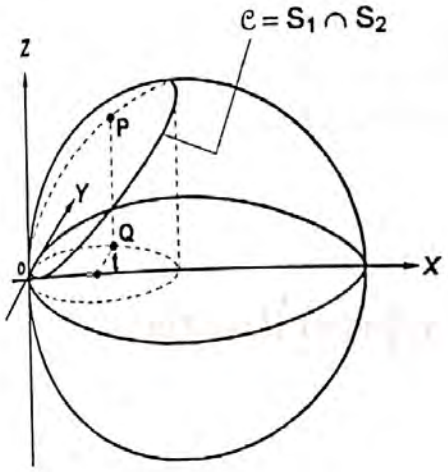
1. Hagamos un gráfico de las superficies

S_1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ es una esfera de centro (R,0,0) y radio R

$$x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

S_2: $z = x$ es un plano que pasa por el origen de coordenadas



2. Necesitamos parametrizar la circunferencia $\mathcal{C}$. Para ello, seguir los siguientes pasos:

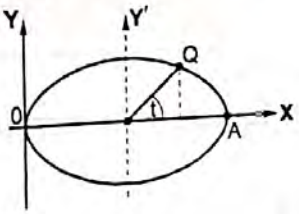
Paso 1 Proyectar la circunferencia $\mathcal{C}$ sobre el plano XY, esta operación es equivalente a reemplazar la ecuación $z = x$ en la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = Rx$, obteniéndose:

$$x^2 + y^2 + x^2 = Rx$$

$$2x^2 - Rx + y^2 = 0$$

$$2\left(x^2 - \frac{R}{2}x + \frac{R^2}{16} \right) + y^2 = \frac{R^2}{8}$$

$$2\left(x - \frac{R}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{8} \iff \frac{\left(x - \frac{R}{4}\right)^2}{\frac{R^2}{16}} + y^2 = 1 \quad \textit{(es una elipse en el plano XY)}$$



Paso 2 Parametrizar la elipse: $\begin{cases} x - \frac{R}{4} = \frac{R}{4}\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$

Paso 3 Como la variable z es $z = x$, entonces $z = \frac{R}{4} + \frac{R}{4}\cos t$.

En consecuencia, la parametrización de la circunferencia $\mathcal{C}$, es:

$$\vec{\alpha}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = \Big(\underbrace{\tfrac{R}{4} + \tfrac{R}{4}\cos t}_{x}, \underbrace{\operatorname{sen} t}_{y}, \underbrace{\tfrac{R}{4} + \tfrac{R}{4}\cos t}_{z} \Big)$$

3. Necesitamos el diferencial de $\vec{\alpha}(t)$:

$$d\vec{\alpha}(t) = \alpha'(t)\,dt$$

$$= \left(-\frac{R}{4}\operatorname{sen} t, \cos t, -\frac{R}{4}\operatorname{sen} t \right) dt$$

$$= \Big(\underbrace{-\tfrac{R}{4}\operatorname{sen} t\, dt}_{dx}, \underbrace{\cos t\, dt}_{dy}, \underbrace{-\tfrac{R}{4}\operatorname{sen} t\, dt}_{dz} \Big)$$

4. Ya se puede integrar, teniendo en cuenta que $y > 0$, esto $\text{sen}\, t > 0$.

La solución de $\text{sen}\, t > 0$, es: $0 < t < \pi$

Luego la integral es:

$$\int_{\overset{\frown}{OA}} xydx + yzdy + zxdz$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{R}{4} + \frac{R}{4}\cos t\right)(\text{sen}\, t)\left(-\frac{R}{4}\text{sen}\, t\, dt\right) + (\text{sen}\, t)\left(\frac{R}{4} + \frac{R}{4}\cos t\right)(\cos t\, dt) +$$

$$\left(\frac{R}{4} + \frac{R}{4}\cos t\right)^2\left(-\frac{R}{4}\text{sen}\, t\, dt\right) =$$

multiplicar e integrar, obteniéndose : $\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Calcular las integrales curvilíneas:

01. $\int_C xdy$, donde C es el contorno de un triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ en dirección positiva (esto es, en sentido contrario al de las agujas del reloj).

Rpta.: 3

02. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y - x)dy$ a lo largo de la línea 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y^2 = x$ 4) $y = x^3$

Rpta.: 1) $^1/_3$ 2) $^1/_{12}$ 2) $^{17}/_{20}$ 4) $^{-1}/_{20}$

03. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\, dx + x^2\, dy$ a lo largo de la línea: 1) $y = x$; 2) $y = x^2$ 3) $y = x^3$; 4) $y^2 = x$

Rpta.:

En los cuatro casos la integral es igual a 1.

Nota:

Esta propiedad ocurre porque en las funciones $P = 2yx$, $Q = x^2$ se cumple : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

04. $\int_C ydx + xdy$, donde C es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ en el primer cuadrante, considerando el sentido del camino en sentido antihorario.

Rpta.: 0

05. $\int_C ydx - xdy$, donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ recorrida en sentido positivo (antihorario).

Rpta.: $-2\pi ab$

06. $\int_C \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2}$, donde C es la semicircunferencia $(y > 0)$ de $x^2 + y^2 = a^2$.

Rpta.: $-\frac{4}{3}a$

07. $\int_C (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy$, donde C es el arco (desde el origen de coordenadas) de la cicloide :

$x = a(t - \text{sen } t)$; $y = a(1 - \cos t)$.

Rpta.: πa^2

08. $\int_C \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, donde C es la cuarta parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ desde el punto (a,0) hasta el punto (0,a).

Rpta.: $\frac{3}{16}\pi a\sqrt[3]{a}$

09. $\int_C xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz$, donde C es el segmento de la recta desde el punto (1,1,1) hasta el punto (2,3,4).

Rpta.: 13

10. $\int_C yzdx + zxdy + xydz$, donde C es el arco de la hélice:

$x = R\cos t$, $y = R\,\text{sen}\,t$, $z = \frac{at}{2\pi}$

desde el punto de la intersección de la hélice con el plano $z = 0$ hasta el punto de la intersección con el plano $z = a$.

Rpta.: 0

11. $\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, donde C es la línea de intersección de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y del cilindro: $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0\ ,\ z \geq 0)$, siendo recorrida, en el proceso de integración, en sentido contrario al de las agujas del reloj si se mira desde el origen de coordenadas.

Rpta.: $-\frac{\pi R^3}{4}$

12. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y h una antiderivada de g tal que $h(1) = 2$, $h(2) = 4$.

Calcular:

$$\int_\Gamma xg(x^2 + y^2 + z^2)\,dx + yg(x^2 + y^2 + z^2)\,dy + zg(x^2 + y^2 + z^2)\,dx$$

Rpta.: 1

13. Calcular $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, donde L es el rombo con vértices A(1,0), B(0,1), C(−1,0), D(0,−1) recorrido en sentido antihorario.

Rpta.: 0

14. Calcular $\int_\lambda 6xydx+(3x^2+2y)dy$

a) a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$, recorrido en sentido antihorario.

b) a lo largo del cuadrado $|x|+|y|=1$, recorrido en sentido antihorario.

Rpta.: a) 0 , b) 0

Nota:

Cuando el camino $\vec{\alpha}$ es cerrado, se usa la *NOTACIÓN* :

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$ para indicar la integral de línea en torno a un camino cerrado.

---

15. Calcular $\oint \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ en sentido contrario al de las agujas del reloj

Rpta.: -2π

16. Calcular $\oint_C \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, donde C es el lazo derecho de la lemniscata $r^2=a^2\cos 2\theta$, que sigue en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Rpta.: 0

17. Hallar $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$; donde :

$\vec{F}(x,y)=(e^x \operatorname{sen} y, e^{2x}\cos y)$ y C es el contorno de un rectángulo de vértices: (0,0) , (1,0) , $(1,\pi/2)$, $(0,\pi/2)$.

10.4 INDEPENDENCIA DE TRAYECTORIA EN INTEGRALES DE LÍNEA

Introducción:

Bajo ciertas condiciones que debe cumplir el campo vectorial $\vec{F}$, la integral de línea $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$ sólo dependerá de los extremos del camino $\vec{\alpha}$. Dichas condiciones la damos en las siguientes definiciones:

01 DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN f(x,y,z)

Sea $f: U\subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^r, $r\geq 1$, donde U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$. La diferencial de la función f es la aplicación lineal

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$. Si hacemos $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y,z)$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = R(x,y,z)$ se tendrá: $df = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)\,dz$

02 La función $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ se llama 1– forma diferencial.

03 Sea $w = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)\,dz$ una función 1–forma, definida en un abierto $U \subset IR^3$. Decimos que w es exacta en U si se cumplen las igualdades :

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

04 Si w es exacta en un abierto $U \subset IR^3$, entonces existe una función diferenciable $f: U \subset IR^3 \longrightarrow IR$ tal que $df = w$. En este caso decimos que f es una primitiva de w en U.

05 La definición en 4, sólo nos dice que existe f cuando w es exacta, pero no nos dice ¿cómo se halla f ?. Hallar la función f es sólo un problema de resolver una ecuación diferencial exacta.

TEOREMA 1 Sea $\vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow IR^3$ un camino regular tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C$ es la traza de $\vec{\alpha}$; y sea $\vec{F}: U \subset IR^3 \longrightarrow IR^3$ un campo vectorial continuo en la región U que contiene a la curva C, definida por:

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

donde $P, Q, R : U \subset IR^3 \longrightarrow IR$ son funciones reales de clase C^1 en U.

Si la función 1–forma diferencial $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$, es exacta entonces existe una función $f: U \subset IR^3 \longrightarrow IR$, tal que :

1) $df = Pdx + Qdy + Rdz$

2) $\int_C [Pdx + Qdy + Rdz]$ depende sólo de los extremos del camino $\vec{\alpha}$ que une los extremos $\alpha(a) = (x_1, y_1, z_1)$ y $\alpha(b) = (x_2, y_2, z_2)$, y se cumple:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Comentario: Según el teorema 1, si $\vec{F}$ es un gradiente sobre U, entonces existe una función escalar $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Si esto ocurre, entonces:

$\vec{F}$ se llama *CAMPO* vectorial *CONSERVATIVO*

y f se llama función *POTENCIAL DEL CAMPO VECTORIAL* $\vec{F}$.

Consecuencias:

Una consecuencia del teorema 1, es lo referente a las funciones reales definidas en algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Sea :

$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^r, $r \geq 1$ definida en la región abierta $U \subset \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto Z = f(x,y)$

- La diferencial de f es la aplicación lineal: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$
- Haciendo : $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ y $df = w$, queda definida la función

  1– forma diferencial: $w = Mdx + Ndy$, donde $\begin{cases} M = \frac{\partial f}{\partial x} \\ N = \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$ y además :

  $M, N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1

- La función 1–forma $w = Mdx + Ndy$ es exacta en U si se cumple : $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$
- Si la función 1–forma $w = Mdx + Ndy$ es exacta, entonces existe una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = w$. En este caso decimos que f es una primitiva de w en U.
- La función f se halla resolviendo la ecuación diferencial exacta $Mdx + Ndy = 0$

Corolario 1

Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camino regular tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C$ es la traza de $\vec{\alpha}$ y sea $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en U

$(x,y) \longmapsto \vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$

Si la función 1 – forma diferencial $Mdx + Ndy = \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$ es exacta, entonces existe una función $f: U \subset IR^2 \longrightarrow IR$ tal que:

1. $df = Mdx + Ndy$, y

2. $\int_C [Mdx + Ndy]$ depende solamente de los extremos del camino $\vec{\alpha}$ que une los extremos $\vec{\alpha}(a) = (x_1, y_1)$ y $\vec{\alpha}(b) = (x_2, y_2)$, y se cumple:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

EJEMPLO 1 ***(Aplicación del corolario 1)***

Sea el campo vectorial $\vec{F}: U \subset IR^2 \longrightarrow IR^2$ definido por $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ donde $U = \{(x,y) \in IR^2 / -4 < x < 4 , -4 < y < 4 , (x,y) \neq (-2,0)\}$

Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$, siendo C un camino contenido en U y une los puntos desde A(–1,–2) hasta B(3,2).

Solución:

Este problema cumple las hipótesis del *COROLARIO 1*

- La principal hipótesis se refiere que el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$, cumple la propiedad: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, donde $M = y^2$, $N = 2xy$

  Esto es, la función 1 – forma $y^2dx + 2xy\,dy$ es exacta, lo cual implica que existe una función escalar $f(x,y)$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Nuestra tarea es hallar la función f(x,y).

Método a seguir, para hallar la función $f(x,y)$.

Paso 1 Se tiene que $\nabla f = \vec{f}$, esto es:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y^2 , 2xy)$$

Al igualar componentes: $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ ..... (2)

$\downarrow$ Integramos

$$f(x,y) = y^2 x + h(y)\text{ , debemos hallar h (y)}$$

Derivar respecto a y : $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx + \frac{dh}{dy}$ ..... (1)

Igualar (1) y (2) $2yx + \frac{dh}{dy} = 2xy$

$$\frac{dh}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = k \quad , \quad k = \text{constante}$$

En consecuencia: $\boxed{f(x,y) = y^2x + k}$

Paso 2 Aplicamos el corolario 1, esto es, que la integral de línea $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$ sólo depende de los extremos de cualquier camino que une los puntos A(−1,−2) y B (3,2).

Es decir: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha} = f(B) - f(A)$, donde $f(x,y) = y^2x + k$

$$= [(2^2)(3) + k] - [(-2)^2(-1) + k]$$

$$= 16$$

EJEMPLO 2 (*Aplicación del TEOREMA 1*)

Calcular: $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + 9x^2y^2dy + (4xz+1)dz$

Solución:

En este problema se tiene:

$P(x,y,z) = 6xy^3 + 2z^2$ $\rightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 18xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 4z$

$Q(x,y,z) = 9x^2y^2$ $\rightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 18xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$

$R(x,y,z) = 4xz + 1$ $\rightarrow$ $\frac{\partial R}{\partial x} = 4z$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$

Observando las derivadas parciales, se cumple que: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$

Este resultado es la hipótesis principal del *TEOREMA 1*, lo cual implica que existe una función escalar $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f=\vec{F}$, esto es,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(6xy^3+2z^2\ ,9x^2y^2\ ,4xz+1)$$

A partir de esta igualdad vectorial, debemos hallar la función $f(x,y,z)$.

Veamos:

Igualando componentes se tiene:

$\frac{\partial f}{\partial x}=6xy^3+2z^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=9x^2y^2$ .....(1) , $\frac{\partial f}{\partial z}=4xz+1$ .....(2)

⇓

Integrar respecto a "x" :

$$\boxed{f(x,y,z)=\int[6xy^3+2z^2]\,dx+g(y,z)}$$

$f(x,y,z)=3x^2y^3+2z^2x+g(y,z)$ ... (3). Debemos hallar $g(y,z)$.

Derivar respecto a "y"

$\frac{\partial f}{\partial y}=9x^2y^2+g_y(y,z)$ .....(4)

Igualar (4) con (1) : $9x^2y^2+g_y(y,z)=9x^2y^2$

$g_y(y,z)=0$ ..... (5)

Integrar la función en (5) respecto a y :

$g(y,z)=\int 0\,dy+h(z)$

$\Rightarrow\ g(y,z)=h(z)$ ..... (6)

Reemplazar (6) en (3) :

$\boxed{f(x,y,z)=3x^2y^3+2z^2x+h(z)}$ ..... (7). Debemos hallar $h(z)$

⇓

Derivar respecto a z .

$\frac{\partial f}{\partial z}=4zx+\frac{dh}{dz}$ ..... (8)

Igualar (8) con (2) :

$$4zx + \frac{dh}{dz} = 4xz + 1$$

$$\frac{dh}{dz} = 1$$

integrar respecto a z : $h(z) = \int 1\,dz + k$

$$h(z) = z + k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Reemplazar (9) en (7) : $\boxed{f(x,y,z) = 3x^2 y^3 + 2z^2 x + z + k}$

- Ahora, aplicamos la tesis del Teorema 1, esto es, que al integral de línea sólo depende de los puntos extremos (1,0,2) y (–2,1,3) de cualquier camino que las une.

  El resultado es:

$$\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} w = f(-2,1,3) - f(1,0,2)$$
$$= [3(-2)^2 (1)^3 + 2(3)^2 (-2) + 3 + k] - [3(1)^2 (0)^3 + 2(2)^2 (1) + 2 + k]$$
$$= -31$$

TEOREMA 2 Sea P, Q, R : $U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales continuas en U, y sea $\vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camino regular cerrado, esto es, $\vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b)$ tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C$ es la traza de $\vec{\alpha}$.

La función 1–forma $Pdx + Qdy + Rdz$ es exacta si y sólo si

$$\int_C [P\,dx + Q\,dy + R\,dz] = 0$$

EJEMPLO Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$ donde $F(x,y,z) = (2x - y^2, -2yx + z^2, 2zy + 1)$, siendo C la curva que es intersección entre las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y, $x^2 + y^2 = 4x$.

Solución:

En este problema se cumplen las 3 hipótesis del *TEOREMA 2*:

1. Las funciones reales $P = 2x - y^2$, $Q = -2yx + z^2$, $R = 2zy + 1$ son continuas en $U = \mathbb{R}^3$ (por ser polinomios en x,y,z).

2. Se cumple que: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

3. La curva C es cerrada.

En consecuencia: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = 0$

PROBLEMAS PROPUESTOS

INTEGRALES DE LINEA SOBRE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

01. Dado el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{r^3}(kx, ky, kz)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, k constante. Halle el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$ para trasladar una partícula que se encuentra en un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ hasta un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Rpta.: $\frac{1}{4}k$

02. Calcular $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy$

Rpta.: 8

03. Calcular $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$

Rpta.: 4

04. Calcular $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

(el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración)

Rpta.: $\text{Ln}\frac{13}{5}$

05. Calcular $\int_{P_1}^{P_2} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ donde los puntos P_1 y P_2 están situados sobre las circunferencias concéntricas cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y los radios son iguala a

R_1 y R_2, respectivamente (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración.

Rpta.: $R_2 - R_1$

06. $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz$

Rpta.: $\frac{10}{3}$

07. $\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$

Rpta.: 0

08. $\int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx}{(x-yz)^2}$ (el contorno de integración no corta la superficie $z = \frac{x}{y}$.

Rpta.: $-\frac{9}{2}$

09. $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$

Rpta.: $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,dy$

10. $\int_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}^{(x,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$

Rpta.: $\text{Ln}\,(x+y)$

11. Calcular $\oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$,

donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Rpta.: 0

12. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$, donde :

$$\vec{F} = (xy^2 + 3x^2y\,,\,(x+y)x^2)\,,$$

C es el camino formado por los segmentos de recta de (1,1) a (0,2) a (3,0).

Rpta.: $-{}^3/_2$

13. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$, donde :

$$\vec{F} = \frac{2x}{y^2+1}\,\vec{i} - \frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\,\vec{j}\,;$$

C es el camino parametrizado por:
$x = t^3 - 1$, $y = t^6 - 1$, $0 \le t \le 1$

Rpta.: -1

14. Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$, donde :

$$\vec{F} = [\cos(xy^2) - xy^2\,\text{sen}\,(xy^2)]\,\vec{i} - 2x^2y\,\text{sen}\,(xy^2)\,\vec{j}$$

C es la curva $\vec{\alpha}(t) = (e^t, e^{t+1})$, $-1 \le t \le 0$.

Rpta.: $\cos(e^2) - \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}\right)$

15. $\int_C xy^2\,dx + x^2y\,dy$, para cada uno de los siguientes caminos :

a) C es la frontera de la región limitados por: $y = 0$, $y = x$, $y = \sqrt{1-x^2}$

b) C es el camino que recorre la gráfica de $y = \sqrt{1-x^2}$ desde (1,0) hasta $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) C es el camino que recorre desde el punto (1,0) hasta $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y de éste hasta el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Rpta.: a) 0 b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{8}$

16. Calcular

$$\int_C (3x^2 + 2x + y^2)\,dx + (2xy + y^3)\,dy$$

donde C es cualquier camino desde (0,0) hasta (1,1)

Rpta.: $^{13}/_{4}$

17. Calcular

$$\int_C (y - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$ donde C es cualquier camino desde $(-1, -1)$ hasta (0,3).

Rpta.: 8

18. Calcular :

$$\int_C (\operatorname{sen} y)\,dx + (3 + x\cos y)\,dy\ ,$$

donde C es el camino paramétrico.

$$\vec{R}(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\operatorname{sen} t)\,\vec{j}\ ,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Rpta.: $\frac{3\pi}{2} - 2$

19. El campo gravitatorio G entre dos partículas de masas M (en el origen de coordenadas) y m separadas una distancia r es $G(x,y,z) = -\frac{kmM}{r^3}R$ donde k es la constante gravitatoria, $R = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y r es el módulo de R.

a) Demuestre que G es conservativo y halle un potencial escalar f para G, que se llama el potencial newtoniano.

b) Calcule el trabajo realizado contra G al mover un objeto desde el punto $P(a_1, b_1, c_1)$ hasta $Q(a_2, b_2, c_2)$.

Rpta.:

a) $f = \frac{kmM}{r}$

b) $kmM\left[\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+C_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+C_1^2}}\right]$

20. a) Demostrar que :

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + 3xz^2\,\mathbf{k}$$

es un campo de fuerzas conservador.

b) Hallar el potencial escalar del que deriva.

c) Halle el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde (1,–2,1) a (3,1,4)

Rpta.:

a) Basta probar que $\nabla x\vec{F} = \vec{0}$

b) $f(x,y,z) = x^2y + xz^3$

c) 202

21. Sea:

$\vec{F}(x,y,z)=(2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3+2)$

y Γ la intersección de las superficies, en $\mathbb{R}^3$, $z=x^2$, $y=x$. Halle el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$ para trasladar una partícula desde el punto A(–2,–2,4) hasta el punto B(2,2,4) siguiendo la curva Γ.

Rpta.: 2^8

22. Determine el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x,y,z)=(yz, xz, xy)$ para trasladar una partícula desde el punto A(1,–1, 2) hasta el punto B(0,1,1) a lo largo de la curva Γ que es intersección de las superficies:

$x+y+z=2$; $x^2+y^2-z=0$

Rpta.: 2

23. Sea el campo vectorial

$\vec{F}=(6x-2y^2e^{2x}+ze^{xz},$

$-2ye^{2x}, \cos z+xe^{xz})$

Calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ si C es la curva descrita por:

$\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+(t-1)(t-2)\,\vec{j}+\frac{\pi}{2}t^3\,\vec{k}$,

$0\le t\le 1$.

Rpta.: $7+e^{\pi/2}$

24. Calcular

$\int_C 2x\,\text{sen}\,y\,dx+(x^2\cos y-3y^2)\,dy$,

C es cualquier trayectoria desde $(-1,0)$ hasta $(5,1)$

Rpta.: 25 sen 1 – 1

25. Calcular :

$\int_C (2y^2-12x^3y^3)dx+(4xy-9x^4y^2)\,dy$;

C es cualquier trayectoria desde (1,1) hasta (3,2).

Rpta.: –1919

10.5 TRABAJO

A continuación vamos a definir el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un camino contenido en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

1. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva $C\subset U$ por acción de una fuerza $\vec{F}: U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, entonces el trabajo W realizado por $\vec{F}$ a lo largo de C viene

$(x,y) \longmapsto \vec{F}(x,y)=(M(x,y), N(x,y))$

dado por: $W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=\int_C [M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy]$

2. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva $C \subset U$ por acción de una fuerza

$$\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

entonces el trabajo W realizado por $\vec{F}$ a lo largo de C viene dado por:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_C [P\,dx + Q\,dy + R\,dz]$$

EJEMPLO 1 Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas :

$\vec{F}(x,y) = (10x^4 - y^3, x^3 - 3y^5)$ para trasladar una partícula alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ una sola vez, siendo el recorrido en sentido antihorario.

Solución:

Se pide hallar: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$

- En primer lugar debemos parametrizar la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en sentido antihorario.

  La parametrización es $\vec{\alpha}: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (\sqrt{5}\cos t, \sqrt{5}\,\text{sen}\, t)$$

- Necesitamos el diferencial de $\vec{\alpha}$: $d\vec{\alpha} = \alpha'(t)\,dt$
  $$= (-\sqrt{5}\,\text{sen}\, t, \sqrt{5}\cos t)\,dt$$

- Entonces, el trabajo es:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^{2\pi} (10x^4 - y^3, x^3 - 3y^5) \bullet (-\sqrt{5}\,\text{sen}\, t, \sqrt{5}\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{(10x^4 - y^3)(-\sqrt{5}\,\text{sen}\, t) + (x^3 - 3y^5)(\sqrt{5}\cos t)\right\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{-\sqrt{5}\,\text{sen}\, t(10 \cdot 5^2 \cos^4 t - 5\sqrt{5}\,\text{sen}^3 t) + \sqrt{5}\cos t\,(5\sqrt{5}\cos^3 t - 3 \cdot 5^2\sqrt{5}\,\text{sen}^5 t)\right\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ -2(5^3)\sqrt{5}\,\text{sen}\,t\cos^4 t + \underbrace{5^2\,\text{sen}^4 t + 5^2\cos^4 t}_{\begin{array}{l}5^2(\text{sen}^4 t+\cos^4 t)\\ 5^2[1-2\,\text{sen}^2\cos^2 t]\\ 5^2[2\,\text{sen}^2 2t]\end{array}} - 3(5^3)\cos t\,\text{sen}^5 t \right\} dt$$

$$= -2(5^3)\sqrt{5}\int_0^{2\pi} \text{sen}\,t\cos^4 t\,dt + 2(5^2)\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 2t\,dt - 3(5^3)\int_0^{2\pi} \cos t\,\text{sen}^5 t\,dt$$

$$= \qquad 0 \qquad + \qquad 50\pi \qquad - \qquad 0$$

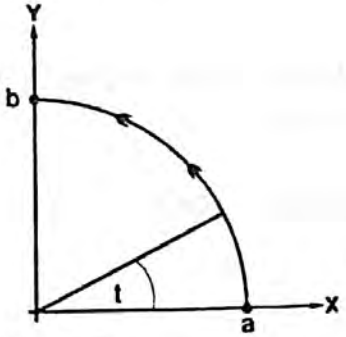
$$= 50\pi$$

EJEMPLO 2 Hallar el trabajo que realiza la fuerza:

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2+x^2+y^2}} \,,\, \frac{y}{\sqrt{a^2+b^2+x^2+y^2}} \right),\ a > b,$$ para mover una partícula en sentido antihorario a lo largo de la parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ que se halla en el primer cuadrante.

Solución:

Se pide hallar el trabajo $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$



- Necesitamos parametrizar parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ que se halla en el primer cuadrante:

La parametrización del arco de elipse, es: $\vec{\alpha}:[0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$$

donde $d\vec{\alpha} = \alpha'(t)\,dt$

$= (-a\,\text{sen}\,t\,,\, b\cos t)\,dt$

- Ya podemos integrar:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{a\cos t(-a\,\text{sen}\,t)}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\cos 4+b^2\,\text{sen}^2 t}} + \frac{b\,\text{sen}\,t\cdot b\cos t)}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\cos^2 t+b^2\,\text{sen}^2 t}} \right] dt$$

Producto escalar

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(b^2-a^2)\,\text{sen}\,t\cos t}{\sqrt{2a^2+b^2+(b^2-a^2)\,\text{sen}^2 t}}\,dt = \sqrt{2b^2+a^2} - \sqrt{2a^2+b^2}$$

EJEMPLO 3 En cada punto del plano, sobre el punto material actúa la fuerza $\vec{F}$ cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son iguales a $X = xy$, $Y = x + y$. Calcular el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ al desplazarse el punto desde el origen de coordenadas hasta el punto (1,1) a lo largo de:

1) La recta $y = x$;
2) La parábola $y = x^2$;
3) Una línea quebrada de dos escalares cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas (considerar dos casos).

Solución:

El resultado de 1) es : $^4/_3$, de 3) $\frac{3}{2}$ y 1.

Resolvamos la 2)

Se pide hallar el trabajo $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$

Para ello, necesitamos la función $\vec{F}$, que es, $\vec{F}(x,y) = (xy, x+y)$

También, necesitamos la ecuación paramétrica de la parábola $y = x^2$ desde el punto (0,0) hasta el punto (1,1):

Haciendo $x = t$, se obtiene $y = t^2$. Entonces la parametrización de la parábola es:

$$\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) = (t, t^2)$$

- El diferencial de $\vec{\alpha}$ es : $d\vec{\alpha} = \alpha'(t)\, dt$
  $= (1, 2t)\, dt$

- Luego: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^1 (xy, x+y) \cdot (1, 2t)\, dt$

$$= \int_0^1 [xy + 2t(x+y)]\, dt$$

$$= \int_0^1 [(t)(t^2) + 2t(t+t^2)]\, dt$$

$$= \int_0^1 [3t^3 + 2t^2]\, dt = \frac{17}{12}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

TRABAJO:

01. Sea C la intersección del cono $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ con los planos coordenados en el primer octante. Determine el trabajo que realiza la fuerza:

$$\vec{F}(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, xyz)$$

para mover una partícula alrededor de la curva C una sola vez, partiendo del punto A (1,0,0) en sentido horario visto desde el origen de coordenadas.

Rpta.: 0

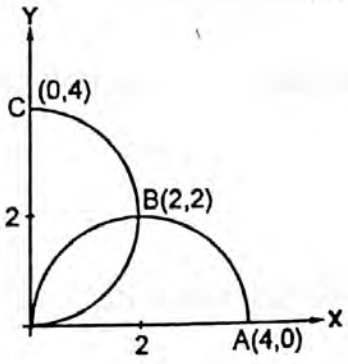
02. Sea R la región exterior a la circunferencia $r = 2\cos\theta$ e interior a la curva (cardioide) $r = 2 + 2\cos\theta$. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (x^2 + xy^2, yx^2 + y^2 + 2x)$ para trasladar una partícula a lo largo de toda la frontera de R, siendo el recorrido en sentido positivo.

Rpta.: Aplicar el Teorema de Green

03. Una partícula es llevada desde el punto A(4,0) hasta el punto C = (0,4) pasando por B, a lo largo de la curva tal como se indica en la figura por la fuerza $\vec{F}(x,y) = (-y\cos(xy) + 2x + 7y, -x\cos(xy) + 2y + 7x)$

Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$

Rpta.: $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo. W = 0



04. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ y C la intersección del cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ y el plano $x + y + z = \frac{5a}{2}$. Calcule el valor de la integral

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$ ***Rpta.:*** 0

05. En cada punto del plano, sobre el punto material actúa una fuerza cuyo valor es constante e igual a F y cuya dirección sigue la del eje positivo de abscisas. Hallar el trabajo efectuado por esta fuerza cuando se desplaza a lo largo del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, situado en el primer cuadrante.

Rpta.: FR

06. En cada punto M de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ está aplicada una fuerza $\vec{F}$ cuyo valor es igual a la distancia que media entre el punto M y el centro de la elipse, y dirigida hacia el centro de la elipse. a) Calcular el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ al desplazarse el punto a lo largo del arco de la elipse situado en el primer cuadrante. b) Hallar el trabajo cuando el punto recorre toda la elipse.

Rpta.: a) $\frac{a^2-b^2}{2}$; b) 0

07. Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes de coordenadas son dadas por las fórmulas $X = 2xy$ y $Y = x^2$. Mostrar que el trabajo de la fuerza, al desplazarse el punto, depende sólo de su posición inicial y final y no depende de la forma del trayecto. Calcular la magnitud del trabajo al desplazarse desde el punto (1,0) hasta el punto (0,3).

Rpta.: 0

08. La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el plano XOY. Dicha fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo, al desplazarse el punto bajo la acción de esta fuerza a lo largo de la recta $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ desde el punto M(a,b,c) hasta el punto N (2a, 2b, 2c)

Rpta.: $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}$ Ln2 , donde k es el coeficiente de proporcionalidad

09. La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje OZ. Dicha fuerza es perpendicular a este eje y está dirigido hacia él. Hallar el trabajo de la fuerza al desplazarse el punto bajo la acción de dicha fuerza a lo largo de la circunferencia $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$ desde el punto M(1,1,0) hasta el punto N(0,1,1).

Rpta.: 0.5 k Ln2 , donde k es el coeficiente de proporcionalidad

10. Demostrar que el trabajo de la fuerza de gravitación de dos masas puntuales, efectuado al desplazarse una de ellas no depende de la forma del trayecto. La magnitud de la fuerza de atracción F la establece la ley de Newton $F=\frac{km_1m_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre los puntos, m_1 y m_2 son las masas concentradas en dichos puntos, k es la constante de gravitación.

11. Un objeto se mueve en el campo de fuerzas $\vec{F} = y^2\mathbf{i} + 2y(x+1)\mathbf{j}$, en sentido contrario a las agujas del reloj, desde el punto (2,0), sobre el camino elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$ hasta (–2,0) y luego vuelve al punto (2,0) moviéndose sobre el eje X. ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre el objeto.

Rpta.: $W = W_1 + W_2 = 0 + 0 = 0$

12. Se da un campo de fuerzas plano por la expresión $\vec{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$. Halle el trabajo total realizado por esta fuerza al mover un punto material en sentido contrario a las agujas del reloj por el perímetro del cuadrado de vértices (0,0), (2,0), (2,2), (0,2).

Rpta.: 16

13. Sobre un punto material actúa la fuerza dada por $\vec{F} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$. Halle el trabajo realizado por esa fuerza cuando el punto se mueve por un camino rectilíneo desde (1,0) hasta (0,1).

Rpta.: ½

- En los dos problemas siguientes halle el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z)$ cuando se desplaza un objeto a lo largo del camino C.

14. $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} + (x^2+2)\vec{j} + y\vec{k}$ y C es el segmento rectilíneo (1,0,2) hasta (3,4,1).

Rpta.: 42

15. $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (xz - y)\vec{k}$ y C es el camino $\vec{R}(t) = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 4t^3\,\vec{k}$, para $0 \le t \le 1$.

Rpta.: 5/2

16. Suponga una partícula con carga Q y masa m que se mueve con velocidad $\vec{V}$ bajo la influencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$. Entonces la fuerza total sobre la partícula es $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$ y se llama la fuerza de Lorentz. Use la segunda ley de Newton del movimiento, $\vec{F} = m\vec{A}$ para demostrar que $m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{V} = Q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}$.

Halle después el trabajo realizado por la fuerza de Lorentz cuando la partícula se mueve sobre la curva paramétrica $\vec{R}(t)$, para $t_1 \le t \le t_2$.

17. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (5e^{\operatorname{sen} x} - 6y + \operatorname{Ln}(1-z), 4x + e^{\cos y} + e^z, 3x^3y^4z)$, un campo de fuerzas. Hallar el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover una carga eléctrica alrededor de la curva C, en sentido antihorario $C: 9x^2 + 16y^2 = 144$

Rpta.: 120π (aplique el teorema de Stokes)

18. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$$

para mover una partícula alrededor de la curva Γ, una sola vez, donde Γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $3y + 2z - 6 = 0$. El sentido del recorrido es el antihorario visto desde el origen de coordenadas.

Rpta.: -20π

19. Sea $\vec{F}(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ una fuerza y Γ la porción más pequeña de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$ que une los puntos $A(-1,0)$ y $B(0,b)$, $b > 0$.

i) Halle el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$ para trasladar una partícula a lo largo de Γ desde A hasta B.

ii) Para qué valor de b el trabajo es mínimo.

Rpta.: i) $W = 2b^2 + 2 + 12b\pi$, ii) $b = -3\pi$

20. Sea Γ la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 4$; $x + 2y - 2 = 0$. Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ para mover una partícula alrededor de la curva Γ una sola vez.

Rpta.: 0

21. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}(x,y,z) = (4y, 2xz, 3y)$ que actúa sobre un objeto que se mueve a lo largo de la espiral definida paramétricamente por $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = 3t$, desde el punto (2,0,0) hasta el punto $(-2, 0, 3\pi)$.

Rpta.: $6\pi^2 - 8\pi + 36$

22. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z)=(y,0,z)$ a lo largo de la curva C, que es el triángulo que va desde (0,0,0) a (2,1,2) a (0,0,0) .

Rpta.: 0

23. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z)=(xy\,,3z\,,1)$, a lo largo de la curva C, que es la espiral $x=\cos t$, $y=\operatorname{sent}$, $z=2t$ que va de (1,0,0) a $(0,1,\pi)$.

Rpta.: $4\pi-\frac{19}{3}$

24. Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas:

$$\vec{F}(x\,,y\,,z)=(2y^2-z^2/2\,,z^2-2x^2\,,2x^2-2y^2)$$

al trasladar una partícula a lo largo de la curva Γ intersección de la superficie que limita al sólido $V=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3\,;0\le x\le 1\,,0\le y\le 2\,,0\le z\le 3\}$ y el plano $2x+2y+z=4$ recorrida en sentido antihorario vista desde la parte superior del eje Z.

25. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas:

$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}-2y\,,\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,,\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ para trasladar una partícula alrededor de la curva que es intersección de las superficies $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; $x^2+y^2=ax$; $a>0$. El recorrido es de manera que al observar desde el origen el sentido es el de las agujas del reloj.

26. Determine el trabajo realizado por el campo gravitacional.

$\vec{F}(\vec{x})=-\frac{m\,MG}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$, $\vec{x}=(x,y,z)$

al mover una partícula con masa m desde el punto (3 , 4 , 12) hasta el punto (2 , 2 , 0), a lo largo de una curva C que es suave a segmentos:

Rpta.: $m\,MG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{13}\right)$.

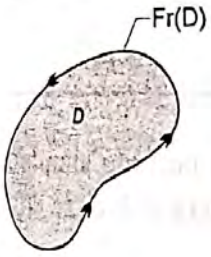
10.6 TEOREMA DE GREEN

Introducción:

El teorema de Green relaciona la integral doble $\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$ sobre la región D, con la integral de línea $\oint_{Fr(D)} \underbrace{[M(x,y)dx + N(x,y)dy]}_{w}$ sobre la frontera de la región D.

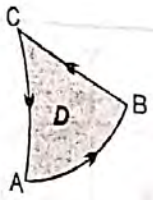
Ver los siguientes ejemplos ilustrativos:

EJEMPLO 1



$$\oint_{Fr(D)} w = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

EJEMPLO 2

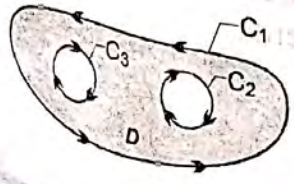


$$\int_{\overset{\frown}{AB}} w + \int_{\overrightarrow{BC}} w + \int_{\overset{\frown}{CA}} w = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$Fr(D) = \overset{\frown}{AB} \cup \overrightarrow{BC} \cup \overset{\frown}{CA}$$

En este caso, la frontera de la región D es la unión finita de tres caminos: $\overset{\frown}{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overset{\frown}{CA}$. Para que funcione el Teorema de Green, cada camino debe seguir un sentido tal, que la región D siempre esté a la izquierda de cada camino.

EJEMPLO 3



$$\oint_{C_1} w + \oint_{-C_2} w + \oint_{-C_3} w = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde: $\oint_{-C_2} w = -\oint_{C_2} w$ y $\oint_{-C_3} w = -\oint_{C_3}$

C_2 tiene sentido antihorario
$-C_2$ tiene sentido opuesto al de C_2

C_3 tiene sentido antihorario
$-C_3$ tiene sentido opuesto al de C_3

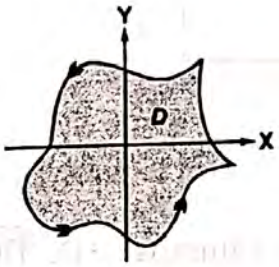
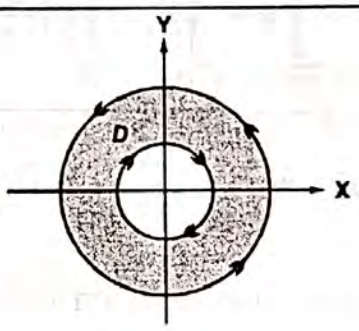
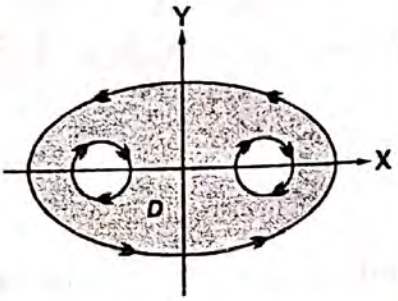
> ***Nota:*** El sentido positivo de cada camino, es el antihorario. El sentido antihorario u horario de cada camino está definido por su parametrización.

Definiciones Preliminares

- **Conjunto Simplemente Conexo**

> ***Definición***
>
> Una región $D \subset IR^2$ es simplemente conexo, si todo camino cerrado simple α contenido en la región D se puede deformar continuamente hasta reducirse en un punto sin salirse de la región D.

EJEMPLOS GRÁFICOS:

 D es simplemente conexo.	 D no es simplemente conexo (porque tiene un agujero).	 D no es simplemente conexo (tiene dos agujeros.)

- ***ORIENTACIÓN POSITIVA DE UN CAMINO RESPECTO A LA REGIÓN D,*** es aquella que sigue un camino tal que la región D, siempre está a la izquierda.

Enunciado del Teorema de Green

Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ una región abierta y $D \subset V$ una región cerrada simplemente conexa cuya frontera $Fr(D)$ es una curva cerrada regular simple.

Si $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales ***continuas*** sobre la región D, entonces:

$$\oint_{Fr(D)} [M\,dx + N\,dy] = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Observación Para aplicar el Teorema de Green, tener en cuenta dos hipótesis básicas que exige el teorema. Estas son :

1. Las funciones M(x,y) y N(x,y) deben ser continuas en la región D encerrada por un número finito de caminos regulares.
2. Cada camino debe ser parametrizado siguiendo un sentido tal que la región D esté a la izquierda.
   Ver el ejemplo 2.

EJEMPLO 1 Usando el Teorema de Green, calcular:

$I = \oint_\Gamma (y^3 - xy^2 \operatorname{sen} xy)\,dx + (4xy^2 - x^2 y \operatorname{sen} xy)\,dy$ donde Γ es la curva $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$ recorrida en sentido antihorario.

Aplicando el Teorema de Green:

$$I = \oint_\Gamma \underbrace{(y^3 - xy^2 \operatorname{sen} xy)}_{P}\,dx + \underbrace{(4xy^2 - x^2 y \operatorname{sen} xy)}_{Q}\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

donde: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4y^2 - y(2x \operatorname{sen} xy + x^2 y \cos xy)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - x(2y \operatorname{sen} xy + y^2 x \cos xy)$

$$= \iint_D y^2\,dx\,dy$$

esta integral se halla sobre la región D limitada por la elipse:

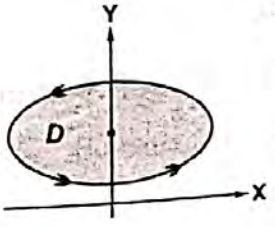
$x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$

$\iff x^2 + 4(y^2 - 4y + \ldots) = -12$

$\iff x^2 + 4(y^2 - 4y + 4) = -12 + 16$

$\iff x^2 + 4(y-2)^2 = 4$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$



Aplicar coordenadas polares modificadas para calcular la $\iint_D y^2\,dx\,dy$ $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y-2 = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ Jacobiano $J = 2r$

La nueva región sobre la cual se integra es: $E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

Luego, $\iint_D y^2 dx\,dy = \iint_E (2 + r\cos\theta)^2\,(2r)\,dr\,d\theta = \frac{17}{2}\pi$

EJEMPLO 2 Calcular la integral de línea $I = \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, donde $L = C_1 \cup C_2$,

siendo $C_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $C_2 : x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$.

Solución:

1° Identificar la función 1– forma $w = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

2° Identificar las funciones: $M(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

3° Se pide calcular $\int_{L=C_1\cup C_2} w = \oint_{C_1} w + \oint_{C_2}$

4° Graficar las curvas C_1 y C_2 y darle el sentido según las regiones D_1 y D_2, respectivamente (*ver fig. 1*)

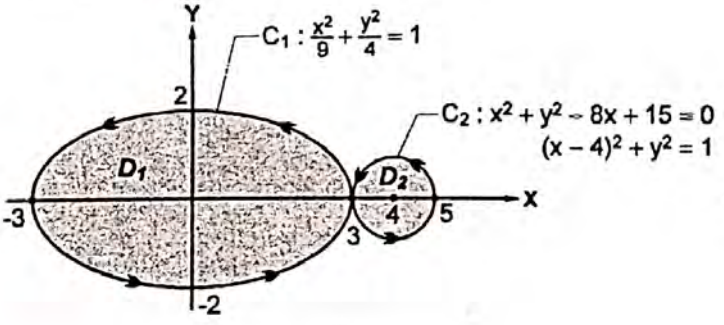


Fig. 1

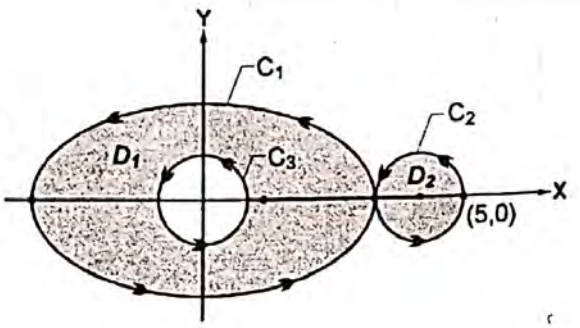


Fig. 2

5° Antes de hacer los cálculos, investigar el problema respondiendo sucesivamente las siguientes preguntas:

a) ¿Es $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$? Sí,

b_1) ¿Las funciones M y N son continuas en la región D_2 encerrada por C_2? Sí, entonces $\oint_{C_2} w = 0$.

b_2) ¿Son M y N continuas en la región D_1 encerrada por C_2? No, pues en (0,0) no son continuas las funciones M y N. Entonces $\oint_{C_1} w$ no puede ser cero.

¿Qué es?. El cálculo de $\oint_{C_1} w$ se obtiene "*abriendo un agujero en (0,0)*", esto es, definir una circunferencia de centro (0,0) y radio ε muy pequeña (ver Fig. 2).

$$C_3 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \varepsilon \cos t \\ y = \varepsilon \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Por el teorema de Green se cumple: $\oint_{C_1} w = \oint_{C_3} w$

Cálculo de $\oint_{C_3} w = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\cos t \cdot \varepsilon\cos t - \varepsilon \operatorname{sen} t(-\varepsilon \operatorname{sen} t)}{\varepsilon^2} dt = 2\pi$

◆ Conclusión:

$$\int_{L = C_1 \cup C_2} w = 2\pi$$

EJEMPLO 3 Calcular $\int_\Gamma 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)dx + \operatorname{Ln}(x^2 + y^2)\,dy$

a) Si $\Gamma : \begin{cases} x = 4 + 2\cos\theta \\ y = 4 + \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

b) Si Γ es el arco de la curva $x = \sqrt{4 - y^2}$ que va desde $A(\sqrt{3}, 1)$ hasta el punto $B(\sqrt{3}, 1)$

Solución: La función M no es continua en $x = 0$

a) 1° Graficar Γ (es una elipse de centro (4,4), a = 2, b = 1.

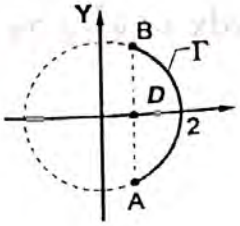
2° En la función 1–forma se cumple:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y las funciones M y N son continuas en la región D, entonces al aplicar el teorema de Green se cumple:

$$\oint_\Gamma w = 0 \; ; \; w = 2\operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dx + \operatorname{Ln}(x^2 + y^2)\,dy$$

b) Graficar Γ.



- Se pide hallar $\int_\Gamma w$
- Si aplicamos el teorema de Green, cerramos el circuito con el segmento $\overrightarrow{BA}$ y se cumple:

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_\Gamma w + \int_{\overrightarrow{BA}} w$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma w = -\int_{\overrightarrow{BA}} w \; , \; \overrightarrow{BA} : \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = t, -1 \le t \le 1 \end{cases}$$

- Hallando:

$$f(x,y) = y\operatorname{Ln}(x^2 + y^2) - 2y + 2x\operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

Se halla: $\int_\Gamma w = f(B) - f(A)$

PROBLEMAS PROPUESTOS

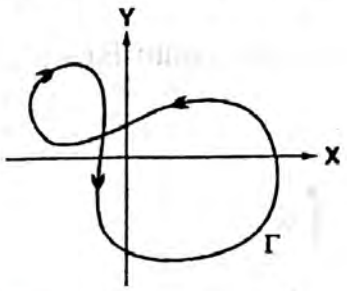
TEOREMA DE GREEN

01. Usando el Teorema de Green, calcular:

$I=\oint_{\Gamma}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\sqrt{x^2+y^2})+y^2\right]dx+\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\sqrt{x^2+y^2})+x^2\right]dy$ donde Γ es la frontera de la región limitada por $x=\sqrt{1+y^2}$, $x=\sqrt{4+y^2}$, $y=-1$, $y=1$; recorrida en sentido antihorario.

Rpta.: 6

02. Se $\mu(x,y)=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)$. Calcular el valor de la integral $\oint_{\Gamma}\left(-\frac{\partial\mu}{\partial y}dx+\frac{\partial\mu}{\partial x}dy\right)$ donde Γ es la curva mostrada en la figura.



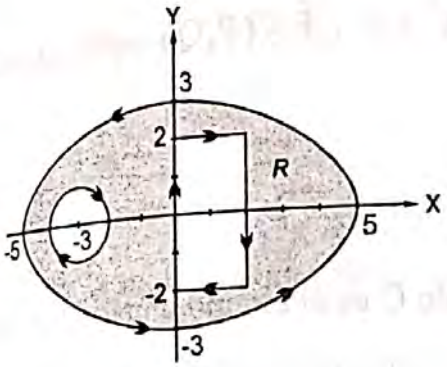
Rpta.: 2π

03. Calcular $\int_C(y-x)dx+(2x-y)dy$, sabiendo que C es la frontera de la región limitada por las gráficas de $y=x$, $y=x^2-x$.

Rpta.: $^4/_3$

04. Si R es la región interior a la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ y exterior a la circunferencia $x^2+y^2=4$. Calcular la integral de línea $\int_C 2xydx+(x^2+2x)\,dy$.

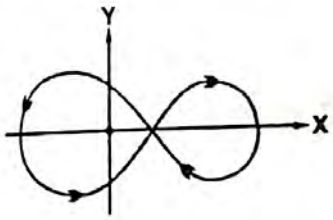
Rpta.: 16π

05. 

En la figura, calcular la integral de línea $\int_{\partial R} 2xydx + (x^2 + 2x)\,dy$ donde ∂R es el borde (frontera) de la región sombreada R.

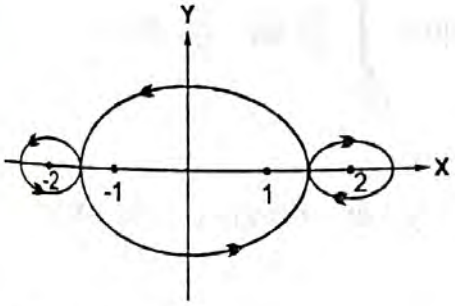
Rpta.: $2(14\pi - 8)$

06. Calcular el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ al mover una partícula a lo largo de la curva ℓ dada en la siguiente gráfica y en el sentido indicado.



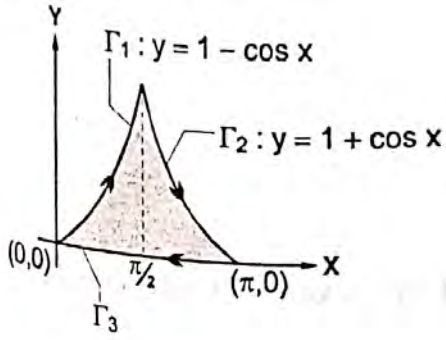
Rpta.: 2π

07. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2-2x+1}, \frac{x}{x^2+y^2-2x+1} \right)$ y la curva C en el gráfico. Determine el trabajo que realiza $\vec{F}$ para mover una partícula alrededor de C 10 veces.



Rpta.: 2π

08. Usando el Teorema de Green, halle el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x,y) = (2x\cos(xy) - x^2 y\,\text{sen}(xy) - y, -x^3\,\text{sen}(xy))$ para trasladar una partícula desde el origen hasta el punto $(\pi,0)$ a lo largo de la curva $\Gamma: y = 1 - |\cos x|$



Se pide hallar $W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$

Por el teorema de Green, se tiene:

$$\underbrace{\int_{-\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{\alpha} + \int_{-\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}}_{-\int_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}} + \underbrace{\int_{-\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}}_{0} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \pi - 2$$

Rpta.: $W = 2 - \pi$

09. Verificar el Teorema, si $P = 2x^3 - y^3$, $Q = x^3 + y^3$, $\vec{F} = (P,Q)$ sobre la región $D = \{(x,y)\ /a \le x^2 + y^2 \le b\}$

Rpta.: $\frac{3\pi}{2}(b^2 - a^2)$

10. Evaluar $\int_C (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$, donde C es el circulo unitario y verificar el teorema de Green.

Rpta.: $\frac{3\pi}{2}$

11. Bajo las condiciones del Teorema de Green, probar que

$$\oint_{\partial D} PQ\,dx + PQ\,dy = \iint_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \right] dx\,dy$$

12. Sea D una región para el cual se cumple el Teorema de Green. Suponer que f es armónica, esto es , $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en D. Probar que $\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0$

13. Calcula la integral $\int_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, donde L es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Rpta.: 0

14. Calcular la integral $\int_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, donde L es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$

Rpta.: $-\frac{a^3\pi}{8}$

15. Demostrar que la integral $\int_L (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy$ es igual a cero, si L es una línea cerrada y simétrica respecto a los ejes de coordenadas.

16. Calcular $\int_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy - ydx}{x^2}$, siendo L un camino cerrado.

Rpta.: 0

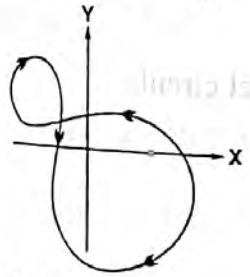
17. Calcular la siguiente integral de línea $\int_C 2\,\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dx + \text{Ln}\,(x^2+y^2)\,dy$, donde C es la frontera de una región cerrada que no contiene al punto (0,0).

Rpta.: 0

18. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y) = xy\,\vec{i} + (x+y)\,\vec{j}$ para mover una partícula en el camino cerrado C: $x^2 + y^2 = 4$

Rpta.: 4π

19. Sea $\mu(x,y) = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,(x^2+y^2)$. Calcule el valor de la integral $\oint_\Gamma \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}dy\right)$



donde Γ es la curva mostrada en la figura.

Rpta.: 2π

20. Sea A la región, en el primer cuadrante, limitada por las gráficas de $y = x$, $x^2 + y^2 = 4$ y el eje X. Usando el Teorema de Green determinar el valor de la integral $\iint_A (x^2+y^2)\,dxdy$

Rpta.: π

21. Usando el Teorema de Green halle el área de la región limitada por la curva $C:\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$ $0 \le t \le a, a > 0$; el segmento que une el origen con el punto $A\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}, \frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)$ y el eje X.

Rpta.: $\frac{1}{2}a$

22. Dado el campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (-y,x)$ y la región
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16 \, , \, x^2 + y^2 - 4y + 3 \ge 0 \, , \, x^2 + y^2 + 4y + 3 \le 0\}$

A) Calcular $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$

B) ¿Se puede aplicar el Teorema de Green?

Rpta.: A) 28π , B) Si se puede, el resultado es : 28π

23. Hallar $\oint_C (x^2 - xy)dx + (y^2 - xy)dy$ donde C es el borde de la región R limitado por las curvas: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $2y = 3\sqrt{3}x$, $9x^2 + 4y^2 = 144$, $2y = \sqrt{3}x$ en la región en que $y > 0$.

Rpta.: $7(1 - \sqrt{3})$

24. Calcular $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy$, en donde C es el circulo $x^2 + y^2 = 9$

Rpta.: 36π

25. Calcular $\int_C x\,y\,dx + y^5 dy$, donde C es el triángulo con vértices (0,0), (2,0) y (2,1).

Rpta.: $-\frac{4}{3}$

26. Calcular $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)\,dy$. C es la frontera de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

Rpta.: $^1/_3$

27. Calcular $\int_C xydx + 2x^2\,dy$. C consiste de los segmentos de recta que van de (–2,0) a (2,0) y la parte superior del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

Rpta.: 0

28. Calcular $\int_C (xy + e^{x^2})dx + (x^2 - \text{Ln}(1+y))dy$. C consiste del segmento de recta que va desde (0,0) a (π,0), de la curva $y = \text{sen}x$, $0 \le x \le \pi$

Rpta.: π

29. Utilice el Teorema de Green para calcular el trabajo llevado a cabo por la fuerza $\vec{F}(x,y) = x(x+y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ al mover una partícula desde el origen a lo largo del eje X hasta (1,0), y después a lo largo del segmento de recta hasta (0,1), para después ir de regreso hasta el origen a lo largo del eje Y.

Rpta.: $-\frac{1}{12}$

30. Calcule la integral de línea $\oint_C (7y - e^{\text{sen}\,x})dx + [15x - \text{sen}(y^3 + 8y)]dy$ donde C es la circunferencia de radio 3 y centro en el punto (5, −7)

Rpta.: 72π

31. Evalúe la integral de línea $\oint_C (e^x + 6xy)dx + (8x^2 + \text{sen}\,y^2)dy$, donde C es la frontera de la región $R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9 \ , \ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \}$

Rpta.: $^{260}/_{3}$

32. Evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \ , \ \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ y C es cualquier curva cerrada simple orientada positivamente que contiene el origen.

Rpta.: 0

33. Evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \ , \ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$ y C es cualquier curva cerrada simple orientada positivamente que contiene el origen.

34. Evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4} \ , \ \frac{y^3}{x^4+y^4} \right)$ y C es cualquier curva cerrada simple orientada positivamente que contiene el origen.

Rpta.: 0

35. Evaluar $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}=\left(\frac{y^2x}{x^4+y^4}, \frac{-x^2y}{x^4+y^4}\right)$ y C es cualquier curva cerrada simple orientada positivamente que contiene el origen.

36. Evaluar $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}=\left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\right)$ y C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Emplee este resultado y el teorema de Green para demostrar que $\iint_R \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}\,dA$ diverge, donde R es el disco $x^2 + y^2 \le 1$.

10.7 INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA REGIÓN

TEOREMA Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región limitada por un camino cerrado C, entonces el área de la región D es dada por:

$$A(D)=\tfrac{1}{2}\oint_C [xdy-ydx]$$

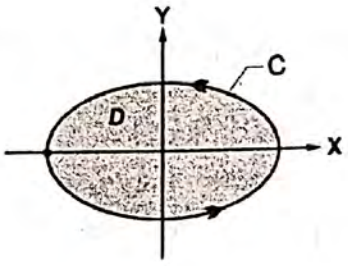
EJEMPLO 1 Hallar el área de la región D, encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Solución:

Se pide hallar:

$$A(D)=\tfrac{1}{2}\oint_C [xdy-ydx] \quad \text{..... (1)}$$

Area de la región D



Veamos:

- Lo primero que hacemos es parametrizar la elipse, dándole el sentido según la región D.

  La parametrización de C es: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$

- Para integrar, necesitamos el diferencial de x y el diferencial de y $\begin{cases} dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt \\ dy = b\cos dt \end{cases}$

- Reemplazar en (1): $A(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(b\cos t dt) - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t\,dt)]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[ab\cos^2 t + ab\,\text{sen}^2 t]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab(2\pi) = ab\pi$$

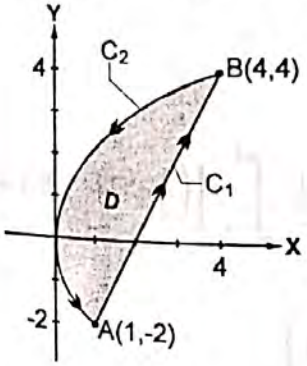
EJEMPLO 2 Hallar el área de la región D limitada por las gráficas de las ecuaciones : $y^2 = 4x$, $2x - y - 4 = 0$.

Solución:

Se pide hallar $A(D) = \oint_{C = C_1 \cup C_2}[xdy - ydx] = \int_{C_1}[xdy - ydx] + \int_{C_2}[xdy - ydx]$ ..... (1)

Veamos:

Paso 1 Graficar la región D.



Paso 2 Dar a cada camino el sentido, según la región D, como se ve en la figura.

C_1 : $2x - y - 4 = 0$

C_2 : $y^2 = 4x$

Paso 3 Parametrizar cada camino

a) La parametrización del camino $C_1 : 2x - y - 4 = 0$ que une los puntos desde A(1,–2) hasta B(4,4), es :

$$\tilde{\alpha}(t) = (1,-2) + t[(4,4) - (1,-2)] \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\tilde{\alpha}(t) = (1+3t, -2+6t) \quad , \quad 0 \le t \le 1 \qquad \alpha'(t) = (3,6)$$

b) La parametrizacion de $C_2 : y^2 = 4x$ desde B(4,4) hasta A(1,−2) se obtiene haciendo $y = t$, obteniéndose:

$$\begin{cases} y = t \\ t^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}$$

Como $-2 \le y \le 4$, entonces $-2 \le t \le 4$

Así tendremos que $\boxed{\vec{\alpha}(t) = \left(\frac{1}{4}t^2, t\right),\ t \in [-2, 4]}$ $\boxed{\alpha'(t) = \left(\frac{1}{2}t, 1\right)}$ es la parametrización del camino C_2 en el sentido desde A hasta B.

Para integrar, necesitamos el sentido desde B hasta A. En este caso cambiamos el sentido del camino haciendo $t \in [\overleftarrow{-2, 4}]$.

Paso 4 Ya podemos integrar:

$$A(D) = \int_{C_1} w + \int_{-C_2} w \qquad , \qquad w = \frac{1}{2}[xdy - ydx]$$

$$= \int_{C_1} w - \int_{C_2} w$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [(1+3t)(6dt) - (-2+6t)(3dt)] - \frac{1}{2}\int_{-2}^4 \left[\left(\frac{1}{4}t^2\right)(1dt) - (t)\left(\frac{1}{4}tdt\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [6 + 18t + 6 - 18t]\,dt - \frac{1}{2}\int_{-2}^4 \left[\frac{1}{4}t^2\,dt\right]$$

$$= 6\int_0^1 dt + \frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-2}^{t=4}$$

$$= 6 + \frac{1}{8}\left[\frac{64}{3} + \frac{8}{3}\right] = 9\mu^2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

ÁREA DE REGIONES:

En los ejercicios 1-7 calcular las áreas de las regiones planas limitadas por las líneas cerradas, mediante la integral curvilínea.

01. Por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Rpta.: $\frac{3}{8}\pi a^2$

02. Por la cardioide

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\,\text{sen}\, t - a\,\text{sen}\, 2t \end{cases}$$

Rpta.: $6\pi a^2$

03. Por el lazo del folio de descartes:
$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Rpta.: $\frac{3}{2}a^2$ Hacer $y = tx$

04. Por el lazo de la línea $(x + y)^3 = xy$

Rpta.: $^1/_{60}$

05. Por el lazo de la línea $(x + y)^4 = x^2y$

Rpta.: $^1/_{210}$

06. Por la lemniscata de Bernoulli :
$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$

Rpta.: $2a^2$. Hacer $y = xtgt$

07. Por el lazo de la línea :
$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$

Rpta.: $^1/_{30}$. Hacer $y = xt^2$

08. Por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$

Rpta.:

09. Determine el área de la región acotada por el hipocicloide que tiene la ecuación vectorial
$\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \text{sen}^3 t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta.: $3\pi/8$

10. Determine el área de la región acotada por la curva que tiene la ecuación vectorial
$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \text{sen}^3 t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta.:

- Mediante integrales de línea, hallar el área de las regiones acotadas por las gráficas de las ecuaciones dadas en 11 - 16

11. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$
Rpta.: $^{64}/_3$

12. $y = x^2$, $y = x + 2$
Rpta.: $^9/_2$

13. $y = 2x$, $y = 3 - x$, $y = 0$
Rpta.: 3

14. $y = 3x$, $y = 5 - 2x$, $y = 0$
Rpta.: $^{15}/_4$

15. $y = x^2$, $x = y^2$
Rpta.: $^1/_3$

16. $y = x^3$, $y = x^2$
Rpta.: $^1/_{12}$

- En los problemas del 17 al 26 determine si F es o no es un campo vectorial conservativo. Si lo es, encuentre una función f, tal que $F = \nabla f$.

17. $F(x,y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (2y - 3x)\mathbf{j}$

18. $F(x,y) = (3x^2 - 4y)\mathbf{i} + (4y^2 - 2x)\mathbf{j}$

19. $F(x,y) = (x^2 + y)\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$

20. $F(x,y) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j}$

21. $F(x,y) = (1 + 4x^3 y^3)\mathbf{i} + 3x^4 y^2\,\mathbf{j}$

22. $F(x,y) = (y\cos x - \cos y)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$

23. $F(x,y) = (e^{2x} + x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + x^2 \cos y\,\mathbf{j}$

24. $F(x,y) = (ye^{xy} + 4x^3 y)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x^4)\mathbf{j}$

25. $F(x,y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\mathbf{j}$

26. $F(x,y) = (x + y^2)\mathbf{i} + (2xy + y^2)\mathbf{j}$

- En los ejercicios siguientes :
  a) Determine la función f, tal que $F = \nabla f,y$
  b) Utilice el inciso a) para evaluar:
  $\int_C F \cdot dr$ a lo largo de una curva dada C.

27. $F(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
C es el arco de la parábola $y = x^2$ de $(-1,1)$ a $(3,9)$.

28. $F(x,y) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$
C es el arco de la curva $y = x^4$ de $(1,0)$ a $(2,8)$.

29. $F(x,y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3x^2 y^2\,\mathbf{j}$
$C : \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + (t^2 + 1)\,\mathbf{j}$,
$0 \le t \le \pi/2$.

30. $F(x,y) = e^{2y}\,\mathbf{i} + (1 + 2xe^{2y})\mathbf{j}$,
$C : \mathbf{r}(t) = te^t\,\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$

31. $F(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$
C es el segmento de recta que va desde $(2,1,4)$ hasta $(8,3,-1)$.

32. $F(x,y,z) = 2x\,y^3 z^4\,\mathbf{i} + 3x^2 y^2 z^4\,\mathbf{j} + 4x^2 y^3 z^3\,\mathbf{k}$
$C : x = t\,,\ y = t^2\,,\ z = t^3\,,\ 0 \le t \le 2$

33. $F(x,y,z) = (2xz + \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$
$C : r(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$,
$0 \le t \le 2\pi$

34. $F(x,y,z) = 4xe^z\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + 2x^2 e^z\,\mathbf{k}$
$C : r(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

- En los siguientes ejercicios muestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral.

35. $\int_C 2x \operatorname{sen} y\,dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\,dy$
C es cualquier trayectoria desde $(-1,0$ hasta $(5,1)$

36. $\int_C (2y^2 - 12x^3 y^3)\,dx + (4xy - 9x^4 y^2)\,dy$
C es cualquier trayectoria desde $(1,1)$ hasta $(3,2)$.

CAPÍTULO 11

INTEGRALES DE SUPERFICIES

11.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos dos temas bien definidos:

a) Integrales de campos escalares sobre superficies, e

b) Integrales de campos vectoriales sobre superficies.

Definiciones preliminares:

1. Superficie Parametrizada

   - Una superficie parametrizada, es una aplicación

   $$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
   $$(u,v) \longmapsto \vec{r}\,(u,v) = (x(u,v)\,,\, y(u,v)\,,\, z(u,v))$$

   Donde D es el dominio de la aplicación $\vec{r}$.

2. La imagen del conjunto D mediante $\vec{r}$, esto $\vec{r}$ (D), es la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

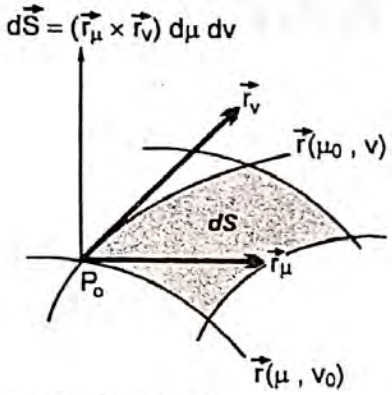
3. La superficie S es de clase C^1, si la aplicación $\vec{r}$ es de clase C^1.

4. Se dice que la aplicación $\vec{r}$ es de clase C^1, cuando la aplicación $\vec{r}$ y sus derivadas parciales $\vec{r}_\mu$ y $\vec{r}_\nu$ son continuas en D.

5. Superficie Regular
   Diremos que una superficie S, parametrizada por la aplicación $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\mu,v) \longmapsto \vec{r}\,(\mu,v)$ es regular si $\vec{r}_\mu \times \vec{r}_\nu \neq \vec{0}$ para todo $(\mu,v) \in D$.

6. Diferencial de Superficie

Sea $S \subset IR^3$ una superficie parametrizada por la aplicación:
$\vec{r}\,(\mu,v) = (x(\mu,v)\,,\, y(\mu,v)\,,\, z(\mu,v))\,;\, (\mu,v) \in D$. Si por un punto P_0 de S trazamos los vectores tangentes $\vec{r}_\mu = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ a las curvas coordenadas $\vec{r}\,(\mu, v_0)$ y $\vec{r}\,(\mu_0, v)$, respectivamente, obtenemos un plano tangente $(T_{P_o}(S))$ generado por los vectores $\{\vec{r}_\mu, \vec{r}_v\}$.



a) El vector $(\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\,d\mu dv = d\vec{S}$ es normal al plano tangente $(T_{P_o}(S))$, pero también, es tangente al diferencial de superficie dS.

b) El área de la diferencial de superficie dS es $|\,\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v\,|\,d\mu\,dv = dS$

Recordar que:

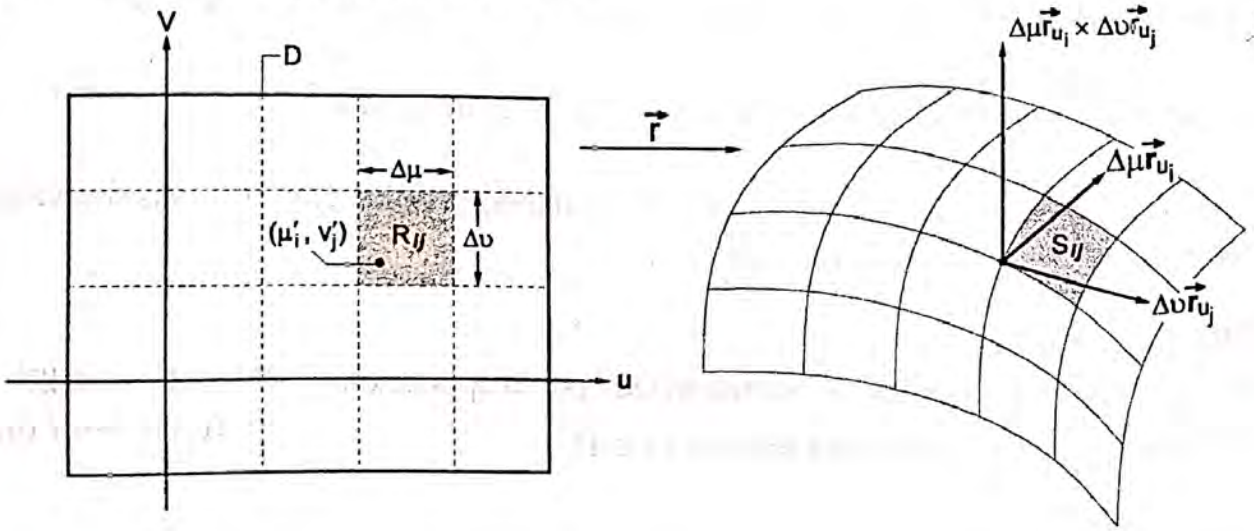
$|\,\vec{b} \times \vec{c}\,|$ = área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

11.1 INTEGRALES DE CAMPOS ESCALARES SOBRE SUPERFICIES

Sea $S \subset IR^3$ una superficie regular y $f: S \subset IR^3 \longrightarrow IR$ una función definida sobre S. $\quad (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$

Sea $\vec{r} : D \subset IR^2 \longrightarrow S \subset IR^3$ una parametrización de la superficie S,
$\quad (\mu,v) \longmapsto \vec{r}\,(\mu,v) = (x(\mu,v)\,,\, y(\mu,v)\,,\, z(\mu,v))$

donde D es una región cerrada en IR^2.



Sea $P = \{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{ij}, \ldots R_{mn}\}$ una partición de la región $D \subset IR^2$, esta partición induce otra $P' = \{S_{11}, S_{12}, \ldots S_{ij}, \ldots, S_{mn}\}$ de $\vec{r}(D)$ donde $\vec{r}(R_{ij}) = S_{ij}$ para $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Sea $(\mu'_i, \upsilon'_j) \in R_{ij}$ un punto arbitrario tal que $\vec{r}(\mu'_i, \upsilon'_j) = (x'_{ij}, y'_{ij}, z'_{ij})$.

La suma de Riemann de $f(x,y,z)$ correspondiente a la partición P' es:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x'_{ij}, y'_{ij}, z'_{ij})\, A(S_{ij})$$; donde $A(S_{ij})$ = área de la superficie S_{ij}.

Si existe el $\lim_{\|A(S_{ij})\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x'_{ij}, y'_{ij}, z'_{ij})\, A(S_{ij})$, donde $\|A(S_{ij})\|$ = máxima área de la superficie de partición P'. El límite de esta suma de Riemann es la integral de superficie de f sobre S y se denota por:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \lim_{\|A(S_{ij})\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x'_{ij}, y'_{ij}, z'_{ij})\, A(S_{ij})$$

donde $A(S_{ij}) = \| \Delta\mu\, \vec{r}_{\mu_i} \times \Delta v\, \vec{r}_{\mu_j} \| = \| \vec{r}_{\mu_i} \times \vec{r}_{\mu_j} \| \Delta\mu\, \Delta v$

y $dS = \| \vec{r}_\mu \times \vec{r}_v \|\, d\mu dv$

TEOREMA Sea S una superficie regular de IR^3.

Sea $\vec{r}: D \subset IR^2 \longrightarrow IR^3$ una parametrización de S.

$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}(\mu,v) = (x(\mu,v), y(\mu,v), z(\mu,v))$

Si $f: S \subset IR^3 \longrightarrow IR$ es una función continua, entonces:

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$

a) existe $\iint_S f(x,y,z)\, dS$

b) $$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\vec{r}(\mu,v)) \| r_\mu \times \vec{r}_v \|\, d\mu dv$$

S: Integral de la función escalar f(x,y,z) sobre la superficie S.

D: Integral sobre la región D.

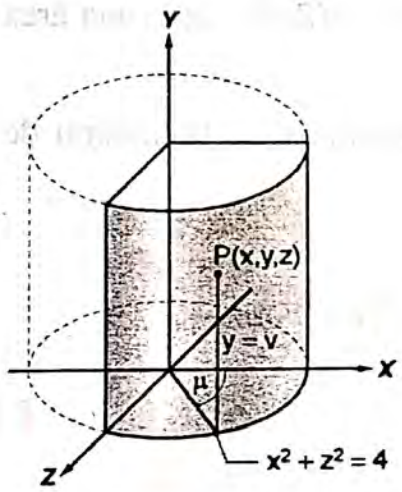
EJEMPLO 1 Calcular el valor de la integral de $f(x,y,z) = xyz$ sobre S; parte de $x^2 + z^2 = 4$ en el primer octante entre $y = 0$, $y = 1$

Solución:

Se pide calcular: $$\iint_S xyz\, dS = \iint_D f(\vec{r}(\mu,v)) \,\|\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v\|\, d\mu\, dv$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

Paso 1 Lo primero que se hace es parametrizar la superficie S, definiéndola sobre su dominio D.



a) El cilindro $x^2 + z^4 = 4$ se parametriza así:

$$\begin{cases} x = 2\cos\mu \\ z = 2\,\text{sen}\,\mu \\ y = v \text{ , como } & 0 \le y \le 1, \\ \text{entonces} & 0 \le v \le 1 \end{cases}$$

b) Entonces la parametrización de S, es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}(\mu,v) = (2\cos\mu\,,\, v\,,\, 2\,\text{sen}\,\mu)$$

$$D = \{(\mu,v) / \; 0 \le \mu \le \pi/2 \;,\; 0 \le v \le 1\}$$

Paso 2 En segundo lugar, se hace algunos cálculos auxiliares, antes de integrar. Estos cálculos auxiliares son:

a) La derivada parcial de $\vec{r}$ respecto a μ : $\vec{r}_\mu = (-2\,\text{sen}\,\mu\,,\,0\,,\,2\cos\mu)$

b) La derivada parcial de $\vec{r}$ respecto a v : $\vec{r}_v = (0\,,\,1\,,\,0)$

c) El producto vectorial: $$\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\,\text{sen}\,\mu & 0 & 2\cos\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2\cos\mu, 0, -2\,\text{sen}\,\mu)$$

d) El módulo de $\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v$: $\|\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v\| = \sqrt{4\cos^2\mu + 4\,\text{sen}^2\,\mu} = 2$

e) El diferencial de superficie es $dS = \|\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v\|\, d\mu dv$
$= 2 d\mu dv.$

Paso 3 Ya podemos integrar:

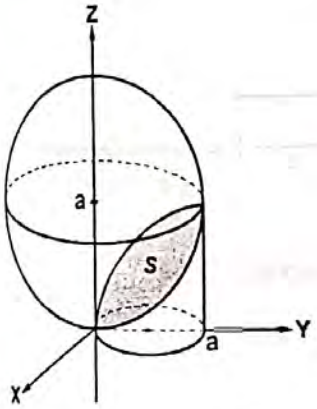
$$\iint_S xyz\,dS = \iint_S (2\cos\mu)(v)(2\operatorname{sen}\mu)(2d\mu dv)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (8\cos\mu\operatorname{sen}\mu)\,dv d\mu = 2$$

EJEMPLO 2 Calcular el valor de la integral de $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2az - z^2}}$ sobre S : parte de la superficie $x^2 + z^2 + (z-a)^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$, debajo del plano $z = a$.

Solución:

Paso 1 Hacer el gráfico:



a) $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$, es una esfera de centro $(0,0,a)$ y radio a.

b) $x^2 + y^2 = ay \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ es un cilindro.

Se pide hallar $\iint_S \frac{1}{\sqrt{2az - z^2}}\,dS = \iint_D f(\vec{r}(x,y)) \| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \|\,dx\,dy$

Paso 2 Para integrar, necesitamos:

a) Parametrizar la superficie S, que es parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$, que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

En este caso la parametrización se hace despejando z de la esfera y se toma la parte negativa de la raíz cuadrada.

Así tenemos: $z = a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

La proyección de esta parte de esfera (dentro del cilindro) sobre el plano XY es la región $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le ay \}$

En consecuencia, la función vectorial que parametriza a la superficie S, dentro del cilindro es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}(x,y) = \left(x, y, a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)$$

donde $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2 + y^2 \leq ay \}$

Paso 3 Cálculos auxiliares que se necesitan para integrar:

a) Las derivadas parciales: $\vec{r}_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)$

$$\vec{r}_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)$$

b) El producto vectorial: $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{\;}}, -\frac{y}{\sqrt{\;}}, 1 \right)$

c) El módulo de $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y$: $\| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \| = \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$

d) El diferencial de superficie:

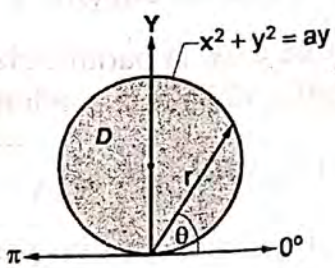
$$dS = \| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \| \, dxdy$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

Paso 4 Ya podemos integrar:

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{2az - z^2}} \, dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy$$

Esta integral se halla sobre la región D.

, pues: $2az - z^2 = x^2 + y^2$ se obtiene de la esfera



Paso 5 Como la región D es circular, conviene hacer transformación a coordenadas polares.

Aplicando las coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\text{JACOBIANO} = r$$

La ecuación $x^2 + y^2 = ay$ se convierte en: $r^2 = a\,r\,\text{sen}\,\theta$

$$r = a\,\text{sen}\,\theta$$

Con esta transformación la nueva región de integración es:

$$E = \{ (r,\theta)/0 \le r \le a\ \text{sen}\,\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \pi \}$$

Entonces la integral doble sobre D, ahora se convierte en otra integral sobre la región E. Así tendremos:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_E \frac{1}{r} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi}\int_0^{a\,\text{sen}\,\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\theta = \frac{a}{2}\pi^2$$

11.1.1 El diferencial de la función $\vec{r}(\mu,v)$

Dada la función $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}(\mu,v) = (x(\mu,v)\ ,\ y(\mu,v)\ ,\ z(\mu,v))$$

el diferencial de la función $\vec{r}(\mu,v)$ es la aplicación lineal $d\vec{r} : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

$$(d\mu, dy) \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} d\mu \\ \\ dv \end{bmatrix}$$

La matriz A es la derivada de la función $\vec{r}(\mu,v)$ y los vectores columnas $\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}\right) = \vec{r}_\mu$ y $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \vec{r}_v$ son los vectores generados del plano tangente $T_P(S)$ en el punto P.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Integrales de Campos Escalares Sobre Superficies

01. Determine el valor de la integral de superficie $\iint_S f\,dS$ donde $f(x,y,z) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$; S es la porción de la superficie $x^2 + y^2 - z = 0$ que se encuentra entre los planos $z = 1$, $z = 4$.

Rpta.: $\frac{1}{6}[17^{3/2} - 5^{3/2}]\pi^2$

02. Sea S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ acotada por los planos $z = 2$ y $z = 2\sqrt{3}$

Calcular la integral de superficie $\iint_S z\sqrt{x^2 + y^2}\,dS$

Rpta.: $\frac{64}{3}(3\sqrt{3} - 1)\pi$

03. Sea S la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y A(0,0,8). Para cualquier punto P de S sea q la distancia entre P y A.

Calcule $\iint_S \frac{1}{q}\,dS$.

Rpta.: 16π

04. Calcular $\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)dS$, donde S es una parte del plano $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ situado en el primer cuadrante.

Rpta.: $4\sqrt{61}$

05. Determinar el valor de la integral de superficie $\iint_S f dS$ donde $f(x,y,z) = xyz$, donde S es una parte del plano $x + y + z = 1$ situada en el primer octante.

Rpta.: $\sqrt{3}/120$

06. Hallar $\iint_S x\,dS$, donde S es una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, situado en el primer octante.

Rpta.: $\pi R^3/4$

07. Hallar $\iint_S y\,dS$, donde S es la semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Rpta.: 0

08. Hallar $\iint_S \frac{dS}{r^2}$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, limitado por los planos $z = 0$ y $z = H$, r es la distancia que media entre el punto de superficie y el origen de coordenadas.

Rpta.: $2\pi \operatorname{arctg} \frac{H}{R}$

09. Hallar $\iint_S \frac{dS}{r^n}$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, r es la distancia que media entre el punto de la esfera y el punto fijo $P(0,0,c)$ $(c > R)$.

Rpta.:

$$\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}} - \frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right] \quad \text{para} \quad n \neq 2 ,$$

$$\frac{2\pi R}{c} \operatorname{Ln} \frac{c+R}{c-R} \quad , \quad \text{pasa} \quad n = 2$$

10. $\iint_S \frac{dS}{r}$, donde S es una parte de la superficie del paraboloide hiperbólico $z = xy$, recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, r es la distancia que media entre el punto de la superficie y el eje OZ.

Rpta.: $\pi\left[R\sqrt{R^2+1} + \operatorname{Ln}\left(R + \sqrt{R^2+1}\right)\right]$.

11. El cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ recorta una porción de superficie S de la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Determine el valor de la integral.

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dS$$

Rpta.: $\sqrt{2}\pi$

12. Calcular $\iint_S xy\, dS$, donde S es la superficie del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$, $x = y$.

Rpta.: $\frac{5\sqrt{2}+3}{24}$

13. Evaluar $\iint_S xyz\, dS$, donde S es el triángulo con vértices (1,0,0), (0,2,0) y (0,1,1)

Rpta.: $\frac{\sqrt{6}}{30}$

14. Calcular $\iint_S z^2\, dS$ donde S es la frontera del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

Rpta.: $^7/_3$

15. Calcular $\iint_S x^2\, dS$, donde S es la esfera unitaria.

Rpta.: $^{4\pi}/_3$

16. Evalúe $\iint_S z\, dS$, donde $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, siendo S_1: $x^2 + y^2 = 1$; S_2 : $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$; S_3 : $z = x + y$ S encierra un sólido K limitado por S_1 , S_2 y S_3 .

Rpta.: $\frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$

17. Suponga que $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, donde g es una función de una variable tal que $g(2) = -5$. Evalúe $\iint_S f(x,y,z)\, dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Rpta.:

18. Calcular $\iint_S y\,dS$, S es la parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está sobre el primer octante.

Rpta.: $3\sqrt{14}$

19. Calcular $\iint_S x\,dS$, S es la superficie $y = x^2 + 4z$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 2$

Rpta.: $(33\sqrt{33} - 17\sqrt{17})/6$

20. Calcular $\iint_S yz\,dS$, S es la parte del plano $z = y + 3$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Rpta.: $\pi\sqrt{2}/4$

21. Calcular $\iint_S (x^2z + y^2z)\,dS$, S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

Rpta.: 16π

22. Calcular $\iint_S (x^2y + z^2)\,dS$, S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que está entre $z = 0$ y $z = 2$.

Rpta.: 16π

23. $\iint_S yz\,dS$, S es la superficie con ecuaciones paramétricas $x = \mu v$, $y = \mu + v$, $z = \mu - v$, $\mu^2 + v^2 \le 1$

Rpta.: 0

- En los ejercicios de 25 - 27, calcule la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)\,dS$, siendo:

24. $f(x,y,z) = x + y + z$ para $S: z = 4 - x^2 - y^2$ situado sobre el plano XOY.

Rpta.: $\frac{(289\sqrt{17} - 35)\pi}{60}$

25. $f(x,y,z) = xyz$ para $S: x^2 + y^2 = 9$, $0 \le z \le 3$.

Rpta.: 0

26. $f(x,y,z) = 1$, para $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Rpta.: $4\pi r^2$.

27. Calcular $\iint_S x(z^2 + y^2)\,dS$, donde S es el hemisferio de frente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Rpta.: $\frac{243}{2}\pi$

28. Calcular $\iint_S x^2 z\,dS$, donde S es la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$.

Rpta.: $^{\pi}/_{2}$

29. Calcular $\iint_S (x + z)\,dS$, donde S es la superficie plana $2x + 2y + z = 6$, tomada en el primer octante.

Rpta.: $^{81}/_{2}$

30. Calcular $\iint_S xyz\,dS$, siendo S la superficie plana $3x + 2y + z = 12$, delimitada por los planos $y = 0$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 0$.

Rpta.: $\frac{22\sqrt{4}}{3}$

31. Calcular $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, donde S es la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=16$

Rpta.: $\frac{2048}{3}\pi$

32. Calcular $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, donde S es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$, $0\le z\le 16$.

Rpta.: $\frac{32768\sqrt{13}}{81}\pi$

33. Calcular $\iint_S xz\,dS$, siendo S una parte de la superficie $y=x^2$, delimitado por los planos $z=0$, $z=4$, $x=0$, $x=2$

Rpta.: $2(17\sqrt{17}-1)/3$

34. Calcular $\iint_S 2z\,dS$, siendo S la parte del paraboloide $z=x^2+y^2-2$ abajo del plano XY.

Rpta.: $-\frac{37}{5}\pi$

35. Calcular $\iint_S \frac{1}{x}\,dS$, donde S es la superficie $\vec{r}(\mu,v)=(\mu,v,v+1)$, $1\le\mu\le 2$, $-1\le v\le 1$

Rpta.: $2\sqrt{2}\,\text{Ln}2$

11.2 ÁREAS DE SUPERFICIES

A) Si $\vec{r} : D \subset IR^2 \longrightarrow IR^3$

$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}\,(\mu,v) = (x(\mu,v)\,,\, y(\mu,v)\,,\, z(\mu,v))$

es la parametrización de una superficie S que está acotado sobre la región cerrada y acotada D, el área de superficie A(S), se define por:

$$\boxed{A(S) = \iint_D dS} \quad , \qquad \text{donde } dS = |\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|\, d\mu\, dv$$

B) Si una superficie S es la gráfica de la función $z = f(x,y)$, que está definido sobre el conjunto $D \subset IR^2$, que es cerrado y acotado, tal que, D = PROYECCIÓN de Gr(f) sobre el plano XY; entonces el área de la superficie S, es dada por:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; dx\, dy$$

C) Si una superficie S es la gráfica de la función $y = g(x,z)$ que está definido sobre el conjunto $D \subset IR^2$, que es cerrada y acotada tal que, D = PROYECCIÓN de Gr(g) sobre el plano XZ; entonces el área de la superficie S es:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_z^2}\; dx\, dz$$

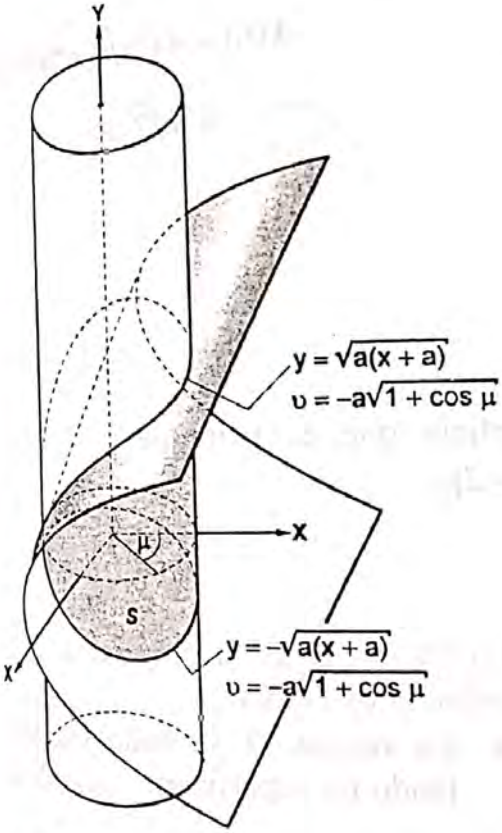
D) Si una superficie S es la gráfica de la función $x = h(y,z)$ que está definido sobre el conjunto $D \subset IR^2$, que es cerrado y acotado, tal que D = PROYECCIÓN de Gr(h) sobre el plano YZ; entonces el área de la superficie S es dada por:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + h_y^2 + h_z^2}\; dy\, dz$$

E) Si $F(x,y,z) = 0$, es la ecuación implícita de una superficie S, definido para todo $(x,y) \in D$ = PROYECCIÓN de S sobre el plano XY, siendo $D \subset IR^2$ cerrada y acotado, entonces el área de la superficie S es:

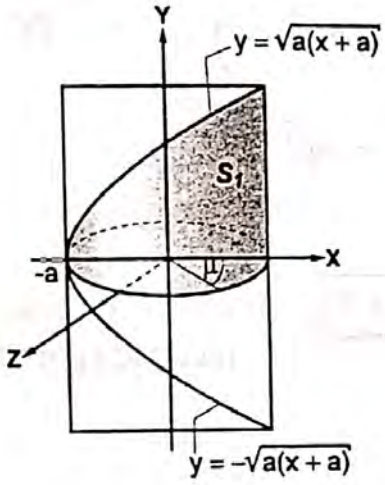
$$A(S) = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}\, dx\, dy$$

PROBLEMA 1 Hallar el área de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindro $y^2 = a(x + a)$.



Solución:

Viendo el gráfico de perfil, es:



<u>*Se pide hallar el área de la superficie S*</u>

La superficie, cuya área se desea hallar, es simétrica respecto al plano XY y también respecto al plano XZ.

- Bastará hallar la cuarta parte del área de la superficie S, esto es, para $z \geq 0$ y $y \geq 0$. Llamemos S_1 a esta superficie, cuya área es:

$$A(S_1) = \iint_D \| \vec{r}_\mu \times \vec{r}_v \| \, d\mu dv$$

Para ello, debemos parametrizar S_1, usando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = a\cos\mu \\ z = a\,\text{sen}\,\mu \\ y = v \end{cases}$$

a) La ecuación $y = \sqrt{a(x+a)}$

se convierte en $v = \sqrt{a(a\cos\mu + a)}$

$$v = a\sqrt{1+\cos\mu}$$

b) Luego, la ecuación vectorial que parametriza S_1 (cuarta parte del total, $z \geq 0$, $y \geq 0$) , es:

$$\vec{r} : D \subset IR^2 \longrightarrow IR^3$$
$$(\mu, v) \longrightarrow \vec{r}\,(\mu, v) = (a\cos\mu, v, a\,\text{sen}\,\mu)$$

$$D = \{ (\mu, v) \in IR^2 / 0 \leq \mu \leq \pi \,,\, 0 \leq v \leq + a\sqrt{1+\cos\mu} \}$$

- Cálculos auxiliares:

i) $r_\mu = (-a\,\text{sen}\mu \,,\, 0 \,,\, a\cos\mu)$

ii) $\vec{r}_v = (\quad 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 0 \quad)$

iii) $\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v = (-a\cos\mu \,,\, 0 \,,\, -a\,\text{sen}\mu)$

iv) $\| \vec{r}_\mu \times \vec{r}_v \| = a$

En tercer lugar, calcular el área de S_1 :

$$A(S_1) = \int_0^{\pi} \int_0^{a\sqrt{1+\cos\mu}} a \, dv \, d\mu$$

$$= a \int_0^{\pi} d\mu \int_0^{a\sqrt{1+\cos\mu}} dv$$

$$= 2\sqrt{2}\, a^2$$

Conclusión:

El área total es:

$$A(S) = 4\,(2\sqrt{2}\, a^2)$$

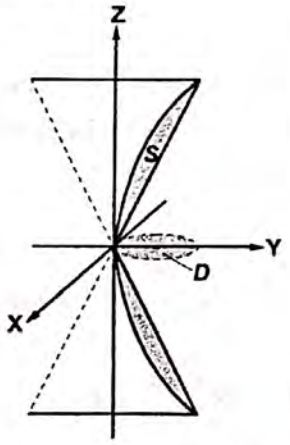
$$= 8\sqrt{2}\, a^2$$

PROBLEMA 2 Hallar el área de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $z^2 = 2py$

Solución:

Paso 1 Hacer un esbozo de la gráfica de la superficie:

Visto de perfil es:



Se pide el área TOTAL = 2A(S)

donde $A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$

donde:

a) La función f(x,y) es:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

b) La región D es la proyección de S sobre el plano XY

- La región D se halla intersectando las superficies:

$z^2 = x^2 + y^2$ ..... (1)
$z^2 = 2py$ ..... (2)

(2) en (1) : $2py = x^2 + y^2$

$0 = x^2 + y^2 - 2py + \ldots$

$0 + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$

$$\boxed{p^2 = x^2 + (y-p)^2}$$

circunferencia de centro en (p, 0), radio = p

Entonces la región D es:

$$D = \{ (x,y)/x^2 + (y-p)^2 \le p^2 \}$$

Paso 2 Ya estamos preparados para hallar el área de la superficie S:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

donde:

i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

ii) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

iii) $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Entonces:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \underbrace{\iint_D dx\, dy}_{\text{Area de la región D}}$$

$$= \sqrt{2}\,(\pi p^2) = p^2 \pi \sqrt{2}$$

Paso 3 ***Conclusión:***

$$\text{Área Total} = 2\,(p^2\pi\sqrt{2})$$
$$= 2\sqrt{2}\, p^2\pi$$

PROBLEMA 3 Hallar el área de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ recortada por el cilindro $x^2 = 2\sqrt{2}y$ y el plano $z = 4$

Solución:

Paso 1 Hacer un esbozo del gráfico de la superficie S cuya área deseamos calcular.

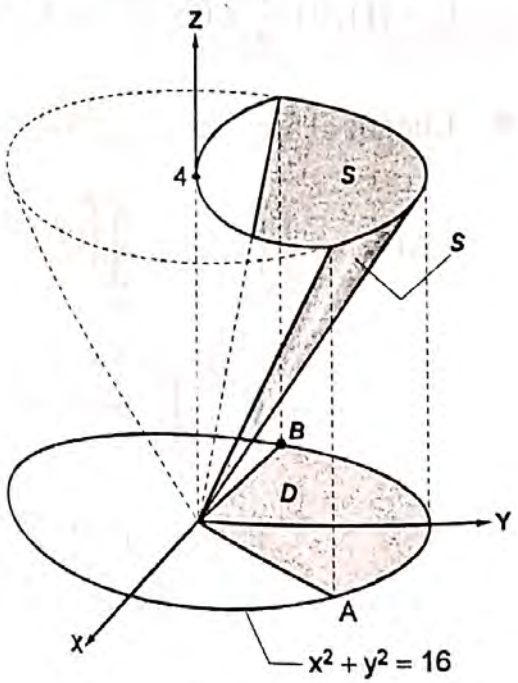


Fig. 01

Se pide el área de la superficie S, que es parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ z \geq 0$$

La proyección de S sobre el plano XY es la región D.

- El área de S es:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

donde:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

i) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

ii) $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- Luego:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{2} \underbrace{\iint_D dx\, dy}_{\text{área de la región D}}$$

$$= \sqrt{2}\,(4\pi)$$

$$= 4\sqrt{2}\pi$$

- Hallemos los límites de la región D

1° Hallar la intersección de las dos superficies

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ z = 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(2) en (1): $4^2 = x^2 + y^2$

El plano $z = 4$ corta al cono, formándose el plano circular: $x^2 + y^2 = 16$

2° Intersectar $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \ldots\ldots (3) \\ x^2 = 2\sqrt{2}y \quad \ldots\ldots (4) \end{cases}$

(4) en (3): $2\sqrt{2}y + y^2 = 16$

$$\Longleftrightarrow y^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 18$$

$$\Longleftrightarrow (y+\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow y + \sqrt{2} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{2}} \text{ pues } y \geq 0$$

$$\boxed{x = \pm 2\sqrt{2}}$$

donde: $A = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$B = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

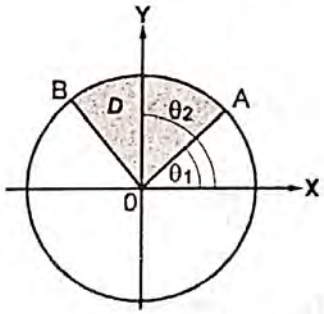


Fig. 02

- El rayo $\overrightarrow{OA}$ es $\theta_1 = \pi/4$
- El rayo $\overrightarrow{OB}$ es $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$
- Necesitamos coordenadas polares para hallar el área de la región D

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

JACOBIANO = r

La nueva región:

$$E = \left\{(r,\theta) / \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4},\ 0 \leq r \leq 4\right\}$$

- Luego, el área de la región D es:

$$A(D) = \iint_D dx\, dy = \iint_E r\, dr\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^4 r\, dr\, d\theta = 4\pi$$

↑ Es el doble por la simetría de D respecto al eje Y

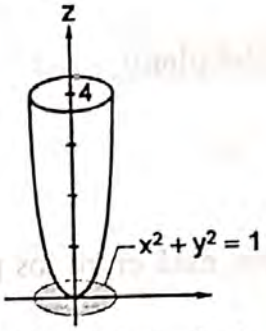
PROBLEMA 4 Hallar el área de la superficie S dada por: $x^2+y^2=\frac{z^4}{256}$ comprendida entre los planos $z=0$; $z=4$

Solución:

Despejar z: $z=4\sqrt[4]{x^2+y^2}$

si $z=0 \Rightarrow 0=4\sqrt[4]{x^2+y^2}$, *Lo cual se reduce al punto (0,0)*

si $z=4 \Rightarrow x^2+y^2=1$



- Se pide hallar el área de la superficie S, que viene a ser la gráfica de la función:

$$f(x,y)=4\sqrt[4]{x^2+y^2}$$

$$(x,y)\in D=\left\{(x,y)/x^2+y^2\le 1\right\}$$

- El área de S está dada por la fórmula:

$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

- Cálculos auxiliares:

i) $f_x=4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2x(x^2+y^2)^{-3/4}$

$$=\frac{2x}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}$$

ii) $f_y=4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2y(x^2+y^2)^{-3/4}$

$$=\frac{2y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$$

- Luego ,

$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+\frac{4x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}+\frac{4y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}}\,dx\,dy$$

$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}}\,dx\,dy$$

- Aplicar coordenadas polares:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$$x^2+y^2=r^2$$

JACOBIANO : $J=r$

- La nueva región de integración, es :

$$E=\{(r,\theta)/\ 0\le r\le 1\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

- Luego se tendrá:

$$A(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+\frac{4}{r}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{r^2+4r}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{(r+2)^2-4}\,dr$$

$$=\left[\frac{3}{2}\sqrt{5}-2\text{Ln}(3+\sqrt{5})+2\text{Ln}2\right](2\pi)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

AREAS DE SUPERFICIES

01. Determine el área de la parte de la superficie $z = x^2 - y^2$, $z \geq 0$, que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Rpta.: $\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$

02. Hallar el área del paraboloide $z = 2(x^2 + y^2)$ debajo del plano $z = 8$

Rpta.: $\frac{(65\sqrt{65} - 1)}{24}\pi$

03. Hallar el área de la superficie cónica $x^2 = y^2 + z^2$ que está entre los planos $x = 1$, $x = 4$.

Rpta.: $15\sqrt{2}\pi$

04. Hallar el área de la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ interceptado por la paraboloide $z = x^2 + y^2$

Rpta.: 6π

05. Determinar el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 3x$.

Rpta.: 18π

06. Determinar el área de la superficie plana $x + y + z = 8$ delimitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Rpta.: $4\sqrt{3}\pi$

07. Calcule el área de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ contenida en el interior del sólido limitado por la superficie en $\mathbb{R}^3$: $y = 0$; $x = 1$; $x^2 - 4y = 0$

Rpta.: $\sqrt{2}/12$

08. a) Escriba una representación paramétrica de la superficie formada por los segmentos de recta que une el punto fijo $\mathbf{0} = (0,0,0)$ con cada uno de los puntos P de la línea $\alpha(\theta) = (\cos\theta\ ,\ \text{sen}\theta\ ,\ \theta)$ cuando $\theta \in [0, 2\pi]$

b) Determine el área de esa superficie.

Rpta.:

a) $S: \vec{r}\,(\lambda,\theta) = (\lambda\cos\theta\ ,\ \lambda\,\text{sen}\,\theta\ ,\ \lambda\theta)\ \ ,\ \lambda \in [0,1]\ ,\ \theta \in [0,2\pi]$

b) $\frac{\sqrt{2+4\pi^2}}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1+2\pi^2}\,)$

Nota: S es una superficie reglada.

09. Calcule el área de la superficie frontera del sólido limitado por : $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$, $y + z = 6$

Rpta.: $A_1 = \frac{1290\sqrt{37} + 289\ \text{arcsen h}6}{288}$, $A_2 = \frac{85\sqrt{5} + 31\ \text{arcsen h}2}{32}$, $A_3 = \frac{16}{3}$,

$A_4 = \frac{16\sqrt{2}}{3}$, $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

10. Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, interior al cilindro $y^2 + z^2 = 4z$.

Rpta.: 32π unidades de área.

11. Calcular el área de la superficie que es parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$

Rpta.: $12\pi\,(3 - \sqrt{5}\,)$ μ.a.

12. Calcular el área de la parte de la paraboloide $x = y^2 + z^2$ delimitado por los planos $x = 4$ y $x = 9$.

Rpta.: $\frac{1}{6}\,(37\sqrt{37} - 17\sqrt{17}\,)\,\pi$ μ.a.

13. Determinar el área de la porción esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada por la parte superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Rpta.: $4\pi\,(2 - \sqrt{2}\,)$ μ.a.

14. Determinar el área de la porción del plano $z = 4x$ cortada por el cilindro : $x^2 + y^2 = 4$.

Rpta.: $4\pi\sqrt{17}$ μ.a.

15. Determinar el área de la superficie plana $x + y + z = 8$ delimitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Rpta.: $4\sqrt{3}\pi$ μ.a.

16. Calcular el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que está en el interior del paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2$.

Rpta.: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ μ.a.

17. Calcular el área total de la superficie cuyo lado lateral es parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, cuya parte superior es una porción de hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y cuya parte inferior es una porción del plano $z = 0$.

Rpta.: $\pi(36 - 8\sqrt{3})$ μ.a.

18. Calcular el área de la superficie plana $\frac{1}{2}x + z = 4$ recortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Rpta.: $\frac{64\sqrt{15}}{9}$ μ.a.

19. Calcular el área de la superficie de tetraedro cuyas caras son partes de los planos: $z = 0$, $y = 0$, $x + 4y + 2z = 8$, $-2x + 4y + 2z = 8$.

Rpta.: $36 + 4\sqrt{21} + 4\sqrt{6}$ μ.a.

20. Hallar el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

Rpta.: $2\pi a^2\sqrt{2}$

11.3 APLICACIONES: Masa, Momento, Centro de Masa, Centro de Gravedad (centroide), Momento de inercia de una superficie.

Si $\delta(x,y,z)$ es la densidad en cada punto (x,y) de la superficie S, definimos:

1. La masa de la superficie está dada por $m = \iint_S \delta(x,y,z)dS$, donde $dS = |\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v|\, d\mu dv$, si S está parametrizada por $\vec{r}(\mu,v)$, con $(\mu,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

2. Los momentos primeros de la superficie S respecto a los plano XY, XZ, YZ, respectivamente, son:

$M_{xy} = \iint_S z\,\delta(x,y,z)dS$	$M_{xz} = \iint_S y\,\delta(x,y,z)dS$	$M_{yz} = \iint_S x\,\delta(x,y,z)dS$

3. El centro de masa de una superficie, está dada por:

$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}$	$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}$	$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$

4. Los momentos de inercia (segundos momentos) respecto a los ejes coordenados, de una lámina superficial de densidad $\delta(x,y,z)$, están definidas por:

$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)dS$	$I_y = \iint_S (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)dS$	$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)dS$

5. Los momentos de inercia respecto a los planos XY, XZ, YZ son, respectivamente:

$I_{xy} = \iint_S z^2\,\delta(x,y,z)dS$	$I_{xz} = \iint_S y^2\,\delta(x,y,z)dS$	$I_{yz} = \iint_S x^2\,\delta(x,y,z)dS$

6. El momento de inercia respecto a una recta L, de una lámina superficial S de densidad $\delta(x,y,z)$, está definida por:

$$I_L = \iint_S \delta(x,y,z)\,d^2dS \quad , \quad d = \text{distancia de un punto } P \in S \text{ a la recta L.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Una lámina delgada tiene la forma de la porción de la superficie $4x^2 + z^2 - 4 = 0$ limitada por los planos $y = x$; $y = 2x$, en el primer octante. Calcule la coordenada $\overline{Z}$ de su centro de masa si la densidad en cada punto es $\delta(x,y,z) = z$.

Rpta.: $m = {}^{14}/_{9}$, $M_{xy} =$

02. Una lámina tiene la forma de la parte de la superficie $x^2 - y + z = 0$ que se encuentra en el primer octante y limitada por el plano $x + y + z - 2 = 0$. Halle la masa de la lámina sabiendo que su densidad es $\delta(x,y,z) = \sqrt{2y - 2z + 1}\,\sqrt{y - z}$.

Rpta.: $\sqrt{2}/6$

03. Sea S la porción de la superficie $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ que se encuentra dentro del paraboloide $x^2 + y^2 + z - 3 = 0$. Una lámina con densidad $\delta(x,y,z) = \sqrt{4z-3}$ tiene la forma de la superficie S, determine su masa.

Rpta.: $m = 3\pi$

04. Sea S la lámina de forma cilíndrica ubicada en el primer octante, descrita por $x^2 + z^2 = ¼$; y comprendida entre las superficies $y = x^2 + z^2$; $y = x + z$.

Encontrar la masa de S si la densidad en cada punto P (x,y,z) es δ (x,y,z) = y.

Rpta.:

05. Halle la masa de la lámina que tiene la forma de la porción de la superficie $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$ que se encuentra sobre el plano $z + 4 = 0$, sabiendo que la densidad en cada punto de la superficie es igual a la distancia de dicho punto al eje Z.

Rpta.:

06. Determine la coordenada $\overline{x}$ del centro de gravedad de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitada por los planos $z = 0$; $x + z = 2$ sabiendo que su densidad es $\delta(xy,z) = z$.

Rpta.: $\overline{x} = -\frac{4}{3}$

07. Determine la masa de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = 4a^2$ que se encuentra en el primer octante y dentro del prisma triangular recto de altura 3a y base en el plano XY limitada por las rectas $x = 0$; $y = 0$; $x + y = a$.
La densidad en cada punto $P(x,y,z)$ de la superficie es $\delta(x,y,z) = z^2$.

Rpta.: $\frac{a^4}{3}[2\pi + 9\sqrt{3} - 16]$

08. Una lámina delgada tiene la forma del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(\pi,\pi)$ y $C(2\pi,0)$. Halle la masa de la lámina sabiendo que su densidad en cada punto es $\delta(x,y) = (x + y)^2\,[\text{sen}\,(x^2 - y^2)]^2$.

Rpta.:

09. Hallar la masa de una esfera si la densidad de superficie en cada punto es igual a la distancia que media entre dicho punto y cierto diámetro fijo de la esfera.

Rpta.: $\pi^2 R^3$

10. Hallar la masa de una esfera si la densidad de superficie en cada punto es igual al cuadrado de la distancia que media entre dicho punto y cierto diámetro fijo de la esfera.

Rpta.: $\frac{8}{3}\pi R^4$

11. Hállese la masa de una lámina superficial S de densidad a $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$, sabiendo que $S : 2x + 3y + 6z = 12$, en el primer octante.

Rpta.: 308/3

12. Calcular la masa de la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$ si su densidad en cada punto es $\delta(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Rpta.: $2\pi\left[\frac{9}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{8}\text{Ln}\,(2 + \sqrt{5})\right]$

13. Determinar el momento de inercia con respecto al eje Z de la parte superior de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Rpta.: $\frac{5\pi}{16}$

14. Una lámina superficial S tiene la forma de un cono dada por $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y limitado por el plano XY. En cada punto de S, la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el EJE Z. Hallar la masa de la lámina.

Rpta.: $\frac{16k\pi}{3}\sqrt{5}$

15. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del octante de la superficie esférica con centro en el origen y radio R.

Rpta.: $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = \frac{R}{2}$ (porque el centro de gravedad es simétrico a la recta x = y = z)

16. Determine la masa del casquete esférico perteneciente a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situado por encima de $z = \frac{a}{2}$, sabiendo que la densidad δ es directamente proporcional a la distancia de un punto P de la superficie al origen de coordenadas.

Rpta.: $\delta = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $m = ka^3\pi$

17. Determine las coordenadas del centro de masa para la superficie S : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \le 3$. Suponga que la superficie es homogénea.

Rpta.: Cuando la superficie es homogénea, la densidad es constante $\delta = k$, $\overline{C} = (0,0,2)$

18. Determine I_0 , para $y^2 + z^2 = 4 \wedge 1 \le x \le 6$, suponer que $\delta(x,y,z) = |x|$.

Rpta.: I_0 = momento respecto al origen , $I_0 = \iint_S x(x^2 + y^2 + z^2)\,dS$,
$I_0 = \frac{1575}{4}\pi$

19. Calcular el momento de inercia en relación a su eje de revolución de la superficie del toro homogéneo definido por:

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R + r\,\text{sen}\,\phi)\,\text{sen}\,\theta \\ z = r\,\text{sen}\,\phi \end{cases} \quad \text{con } r < R \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Rpta.: $I = 2k\pi^2 rR(2R^2 + 3r^2)$

20. Considere la porción de superficie $S : x^2 + z^2 = a^2$ situado entre los planos XOY, XOZ, $y = x$. Suponga que $\delta(x,y,z) = a - z$, determine la masa M de la porción de superficie.

Rpta.: $M = a^3/2$

21. Sea C la línea en el plano YOZ cuya representación paramétrica es dada por

$$\begin{cases} y = u \\ z = 2 + \operatorname{sen} \mu \end{cases} \qquad \mu \in [0\ ,\ 2\pi]$$

a) Muestre que la superficie S obtenida por la rotación de C en torno al eje Z, puede ser dada por $\vec{r}(\mu, v) = (\mu \cos v\ ,\ \mu \operatorname{sen} v\ ,\ 2 + \operatorname{sen} \mu)$, $0 \le \mu \le 2\pi$ y exprese el área de S en integrales simples. $0 \le v \le 2\pi$

b) Calcule la masa de S, si la densidad es $\delta(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4z - z^2 - 2}}$

Rpta.: a) Área de $S = 2\pi \displaystyle\int_0^{2\pi} \mu \sqrt{1 + \cos^2 \mu}\ d\mu$

b) masa de $S = 4\pi^3$

22. Una lámina tiene la forma de la superficie lateral del cono $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 2$. Calcular la masa de la lámina si la densidad en cada punto (x,y,z) de la lámina es proporcional a la distancia de este punto al eje Z.

Rpta.: $\dfrac{2\sqrt{5}}{3} k\pi$ μ.m.

23. Una lámina tiene la forma de la parte del plano $z = y$ recortada por el cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Determinar la masa de esa lámina si su densidad en cada punto (x,y,z) es proporcional a la distancia de ese punto al plano XY.

Rpta.: $\delta(x,y,z) = kz$, $m = \sqrt{2}\ k\pi$ unidades de masa.

24. Determinar el centro de masa del hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ con densidad $\delta(x,y,z) = 0.3$ unidades de masa/unidades de área.

Rpta.: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0,0,3)$

25. Una lámina tiene la forma de un hemisferio unitario. Encontrar el momento de inercia de esa lámina en relación a un eje que pasa por el polo y es perpendicular al plano que delimita el hemisferio. Considerar la densidad en el punto P de la lámina proporcional a la distancia de ese punto al plano que delimita el hemisferio.

Rpta.: $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\, kz\, dS = \frac{k\pi}{2}$ unidades de momento de inercia

26. Una lámina tiene la forma de la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitado por $z = 0$, $z = 3$. Determinar el momento de inercia de la lámina en relación al eje Z si su densidad es $\delta(x,y,z) = 1$.

Rpta.: 9π

27. Una lámina tiene la forma de la parte del plano $z = 2y + 1$ recortada por el cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Determinar la masa de esa lámina si la densidad en el punto (x,y,z) es proporcional a la distancia de ese punto al plano XY.

Rpta.: $20\sqrt{5}\, k\pi$ μ.m.

28. Calcular el centro de masa de la parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, que está abajo del plano $z = 2$ y encima del plano XY, suponer que la densidad es constante.

Rpta.: (0,0,1)

29. Hallar el momento de inercia alrededor del eje X, de la parte de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Suponer que $\delta(x,y,z) = k$, k es una constante.

Rpta.: k

30. Sea : $\vec{r}\,; D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la función vectorial definida por :

$\vec{r}(\mu, v) = (\mu \cos v\,,\, \mu \operatorname{sen} v\,,\, v)$ para la región D tal que :

$D = \{(\mu,v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \mu \le 1\,,\, 0 \le v \le \pi\}$.

La superficie $S = \vec{r}(D)$ es una helicoide. Si S tiene una densidad de masa en cada punto $(x,y,z) \in S$ igual al triple de la distancia de (x,y,z) al eje central, hallar la masa total de la superficie.

Rpta.: $2\pi(2\sqrt{2} - 1)$

11.4 INTEGRALES DE CAMPOS VECTORIALES SOBRE SUPERFICIES

Definiciones Preliminares

- *Superficie Orientada*

Definición

Dado la superficie regular $S = \vec{r}(D)$ parametrizado por la aplicación

$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la ***ORIENTACIÓN*** de la superficie S está

$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}(\mu,v)$

definido por el campo continuo de vectores normales unitarios a la superficie S, esto es,

$$\vec{n} : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^3$$

$$P \longmapsto \vec{n}(P) = \frac{\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v}{\| \vec{r}_\mu \times \vec{r}_v \|}$$

Donde:

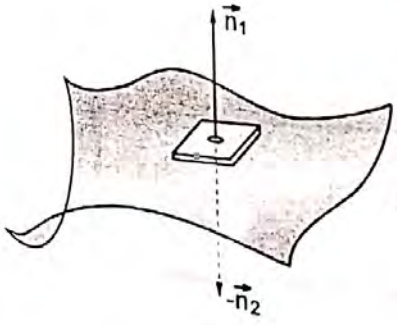
$S^1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

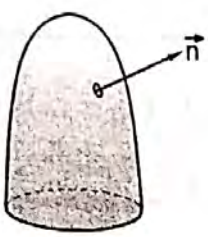
$P = (x,y,z) = \vec{r}(\mu,v) \in S$

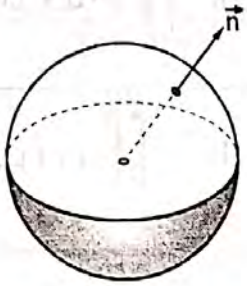
$(\mu,v) \in D$

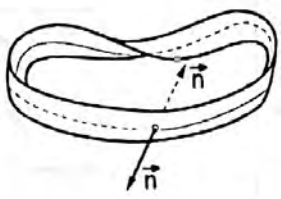
$\vec{n}(P) \in S^1$

- El vector normal unitario, exterior a la superficie S, define la orientación positiva de la superficie. El vector normal, interior a la superficie define la orientación negativa de la superficie.





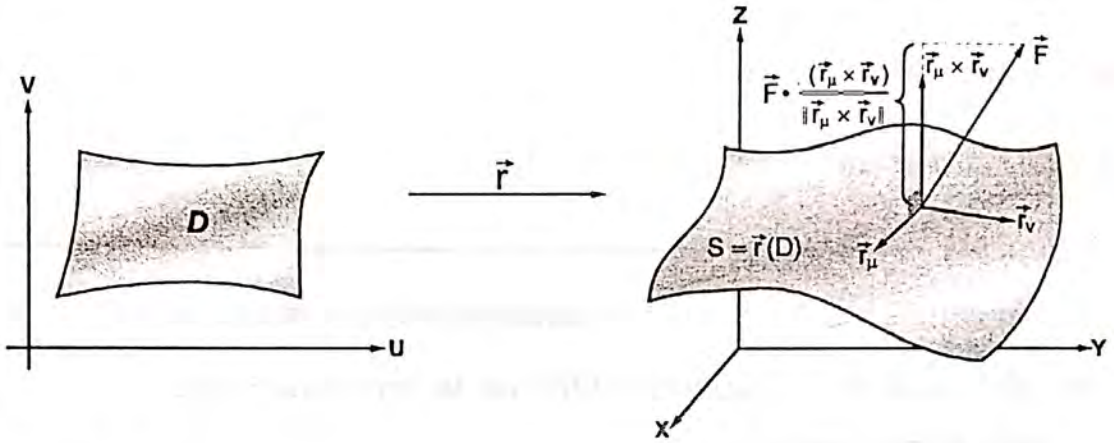




CINTA DE MOBIUS
(es una superficie que no tiene sentido)

- Significado geométrico de $\vec{F} \bullet (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)$.

PRODUCTO ESCALAR ↑



Definición

Sea $S = \vec{r}(D)$ una superficie regular parametrizada por

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{la cual proporciona una orientación de la}$$
$$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}(\mu,v) = (x(\mu,v), y(\mu v), z(\mu,v))$$

superficie S mediante el vector unitario $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v\|}$; $\forall\ (x,y,z) \in S$

Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

un campo vectorial continuo, definido en el abierto U de $\mathbb{R}^3$, tal que $S \subset U$.
Se define la integral del campo vectorial $\vec{F}$ sobre S (llamada flujo de $\vec{F}$ a través de S), denotado por $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ como:

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{s} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\mu,v)) \bullet (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\, d\mu\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

donde: $d\vec{s} = (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\, d\mu\, dv \longleftarrow$ multiplicar y dividir por $|\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|$

$$d\vec{s} = \frac{(\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|\, d\mu dv \ , \text{ donde } \frac{(\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|} = \vec{n}$$

$$d\vec{s} = \vec{n}\, dS \qquad |\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|\, d\mu dv = dS$$

11.4.1 OTRA FORMA DE EXPRESAR LA INTEGRAL $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Si en $d\vec{S} = \vec{n}dS$, el vector normal unitario $\vec{n}$, lo expresamos de la forma $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector $\vec{n}$ y el campo vectorial $\vec{F}$ es

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z)\,,\, F_2(x,y,z)\,,\, F_3(x,y,z))\ ;$$

entonces el producto escalar $\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot\vec{n}dS &= (F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} + F_3\,\vec{k})\cdot(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})\,dS \\ &= F_1\,\underbrace{(\cos\alpha\,dS)} + F_2\,\underbrace{(\cos\beta\,dS)} + F_3\,\underbrace{(\cos\gamma\,dS)} \\ &= F_1\ \ dy\,dz\ \ + F_2\ \ dx\,dz\ \ + F_3\ \ dx\,dy\end{aligned}$$

En consecuencia, la integral del campo vectorial sobre la superficie S definido en (1) se puede expresar como:

$$\iint_S (F_1\,dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy) = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\mu,v))\cdot(\vec{r}_\mu \times r_v)\,d\mu dv \ \ldots\ldots\ (2)$$

Ver el ejemplo 3.

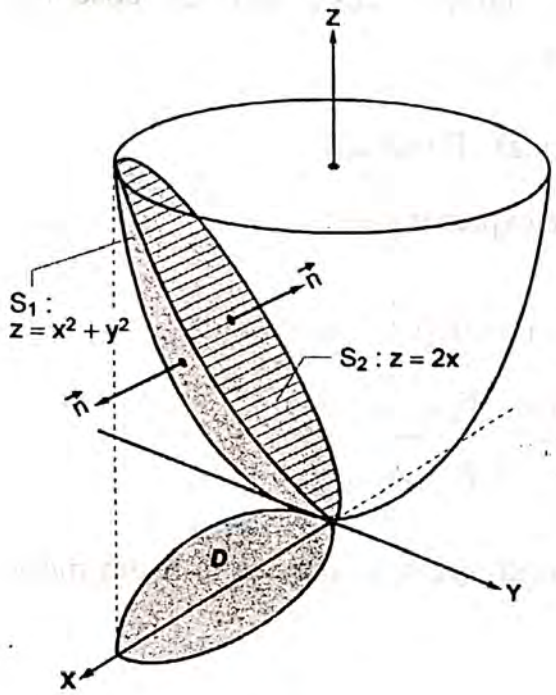
EJEMPLO 1 Calcular $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ donde $\vec{F}(x,y,z) = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la frontera del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y el plano $z = 2x$.

Solución:

Se pide hallar: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, donde $S_1:\ z = x^2 + y^2$ ... (1) y $S_2:\ z = 2x$ .....(2)

Debemos calcular las dos integrales y luego sumar.

a) Para calcular $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\mu, v)) \cdot (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\, d\mu\, dV$ necesitamos la parametrización de la superficie $S_1 : z = x^2 + y^2$



- Cuando la variable z está expresada en función de x, y ; bastará hacer la parametrización natural. Esto consiste en hacer:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}\,(x,y) = (x\,,\, y\,,\, x^2 + y^2)$$

- La región D es la proyección de S_1 sobre el plano XY. Dicha proyección se obtiene al reemplazar la ecuación (2) en (1):

$$2x = x^2 + y^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Luego:

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \le 1 \,\}$$

- Ahora, necesitamos el vector normal: $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y$

De $\vec{r}\,(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$

Obtenemos:

i) $\vec{r}_x = (1\,,\, 0\,,\, 2x)$

ii) $\vec{r}_y = (0\,,\, 1\,,\, 2y)$

iii) $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (-2x\,,\, -2y\,,\, 1)$

iv) Necesitamos el vector normal exterior a la superficie S_1, que es $\vec{n} = -(r_x \wedge \vec{r}_y) = (2x\,,\, 2y\,,\, -1)$

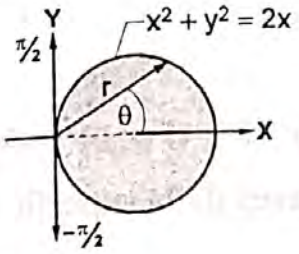
Necesitamos:

$$\vec{F} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (2x, y, z)$$

- Ya podemos integrar:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \vec{F}(\vec{r}\,(x,y)) \cdot (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\, dx\, dy$$
$$= \iint_D (2x, y, z) \cdot (2x, 2y, -1)\, dx dy$$
$$= \iint_D [4x^2 + 2y^2 - z]\, dx dy \,,\ \text{pero } z = x^2 + y^2$$
$$= \iint_D [4x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2]\, dx dy$$
$$= \iint_D [3x^2 + y^2]\, dx dy$$

$$I_1 = \iint_D [2x^2 + (x^2 + y^2)]\, dx\, dy$$



Aplicar la transformación polar:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad 0 \le r \le 2\cos\theta$$

JACOBIANO $= r$

La ecuación: $x^2 + y^2 = 2x$ se convierte en:

$$r^2 = 2r\cos\theta$$
$$r = 2\cos\theta$$

- La nueva región de integración es:

$$E = \left\{ (r,\theta) \Big/ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\theta \right\}$$

- Luego,

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} [2(r^2\cos^2\theta) + r^2]\, r\, dr\, d\theta$$

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} [-2r^3\cos^2\theta - r^3]\, dr\, d\theta$$

$$I_1 = 4\pi$$

b) Para calcular:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(x,y))\cdot(\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\, dx\, dy$$

necesitamos la parametrización de:

$$S_2 : z = 2x.$$

En este caso, bastará hacer la parametrización natural (canónica) siguiente:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}(x,y) = (x, y, 2x)$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2x \le 0 \}$$

↑ Proyección de S_2 sobre el plano XY

- Cálculos auxiliares:

i) $\vec{r}_x = (1, 0, 2)$

ii) $\vec{r}_y = (0, 1, 0)$

iii) $\vec{r}_x \wedge r_y = (-2,0,1)$ es normal exterior a S_2

- Ya podemos integrar:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D (2x, y, z)\cdot(-2,0,1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D [-4x + z]\, dx\, dy \text{ , pero } z = 2x$$

$$= \iint_D [-4x + 2x]\, dx\, dy$$

$$= -2\iint_D x\, dx\, dy. \quad \text{, Aplicar transformación polar}$$

$$= -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr$$

$$= -2\int \frac{8}{3}\cos^4\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta \quad \text{(ver Tabla)}$$

$$= -\frac{16}{3}\left[\frac{3\theta}{8} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4} + \frac{\text{sen}\,4\theta}{32}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\pi$$

Conclusión: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi - 2\pi = 2\pi$

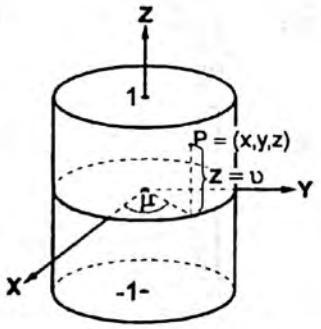
EJEMPLO 2 Calcule el flujo del campo $\vec{F} : U \subset IR^3 \longrightarrow IR^3$ definido por $\vec{F}(x,y,z) = (2xy\,,\,z\,,\,y)$ a través de la superficie:
$S : x^2 + y^2 = 1\ ,\ -1 \le z \le 1.$

Solución:

Se pide calcular: ***FLUJO DEL CAMPO*** $\vec{F} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\mu,v))\cdot(\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\,d\mu\,dv$

Necesitamos dos cosas: a) parametrizar la superficie S, y b) Hallar la región D

Veamos:



a) Aplicando coordenadas cilíndricas, el cilindro: $x^2 + y^2 = 1\ ,\ -1 \le z \le 1$

Se parametriza por:

$$\begin{cases} x = \cos\mu \\ y = \operatorname{sen}\mu \\ z = v \end{cases}$$

Así, obtenemos la aplicación $\vec{r}$

$\vec{r} : D \subset IR^2 \longrightarrow IR^3$

$(\mu,v) \longmapsto \vec{r}\,(\mu,v) = (\cos\mu, \operatorname{sen}\mu, v)$

b) $D = \{\,(\mu,v)/0 \le \mu \le 2\pi\ ,\ -1 \le v \le 1\}$

- Cálculos auxiliares:

i) $\vec{r}_\mu = (-\operatorname{sen}\mu\,,\,\cos\mu\,,\,0)$

ii) $\vec{r}_v = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1)$

iii) $\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_v = (\cos\mu\,,\,\operatorname{sen}\mu\,,\,0)$

- Luego:

$$\iint_D \vec{F}\cdot(r_\mu \times \vec{r}_v)\,d\mu\,dv = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}(2xy, z, y)\cdot(\cos\mu, \operatorname{sen}\mu, 0)\,dv\,d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}[2xy, \cos\mu + z\operatorname{sen}\mu)\,dv\,d\mu$$

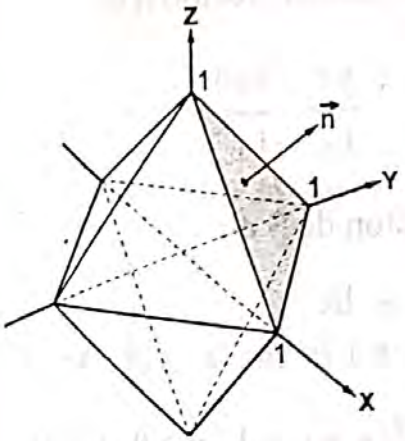
$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}[2(\cos\mu)(\operatorname{sen}\mu)\cos\mu + v\operatorname{sen}\mu]\,dv\,d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}[2\operatorname{sen}\mu\cos^2\mu + v\operatorname{sen}\mu]\,dv\,d\mu = 0$$

EJEMPLO 3 Calcule el flujo del campo $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie $|x| + |y| + |z| = 1$

Solución:

Se pide hallar: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\mu, v)) \cdot (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\, d\mu\, dv$



- Los datos que disponemos son:
  - *i)* $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$
  - *ii)* La superficie S : $|x|+|y|+|z| = 1$ es un prisma de 8 caras
- Tendremos que hallar 8 integrales, de cada cara; respectivamente.
- Porque el campo vectorial es la identidad y S es simétrico respecto al origen, bastará calcular la integral sobre la cara en el primer octante $S_1 : x + y + z = 1$

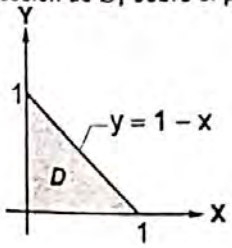
La parametrización natural de S_1, es:

$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto \vec{r}(x,y) = (x, y, 1 - x - y)$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 1 \}$

↑ Proyección de S_1 sobre el plano XY



- Cálculos auxiliares:
  - *i)* $\vec{r}_x = (1, 0, -1)$
  - *ii)* $\vec{r}_y = (0, 1, -1)$
  - *iii)* $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (1, 1, 1)$

- Ya podemos integrar:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D (x,y,z) \cdot (1,1,1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D [x + y + z]\, dx\, dy \quad \text{, pero } x + y + z = 1$$

$$= \underbrace{\iint_D dx\, dy}_{\text{Área de la región D}} = \frac{1}{2}$$

Conclusión:

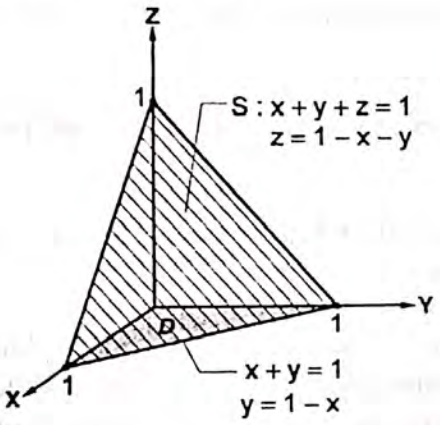
Porque hay 8 caras, el resultado es:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

EJEMPLO 4 Calcular $\iint_S xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la pirámide formado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

Solución:

1. Hacer un gráfico:



2. En la integral, el campo vectorial es:

$$\vec{F} = (\underbrace{xy}_{F_1}, \underbrace{yz}_{F_2}, \underbrace{xz}_{F_3})$$

3. La parametrización de S es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}\,(x,y) = (x, y, 1 - x - y)$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x + y \leq 1,\; x \geq 0,\; y \geq 0\}$$

4. La integral dada se puede expresar como:

$$\iint_S xy\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz = \iint_D F(\vec{r}\,(x,y)) \cdot (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\,dx\,dy$$

5. Para calcular la integral $\iint_D \vec{F}(\vec{r}\,(x,y)) \cdot (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\,dxdy$, necesitamos hacer los siguientes cálculos auxiliares:

i) $\vec{r}_x = (1, 0, -1)$

ii) $\vec{r}_y = (0, 1, -1)$

iii) $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (1, 1, 1)$

6. Haciendo las sustituciones del caso, obtenemos:

$$\iint_D (xy, yz, xz) \cdot (1, 1, 1)\,dx\,dy = \iint_D [xy + yz + xz]\,dx\,dy$$

Pero $z = 1 - x - y$, entonces:

$$= \iint_D [xy + y(1-x-y) + x(1-x-y)]\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} [-xy + y - y^2 + x - x^2]\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[-x\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy - x^2 y \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\tfrac{1}{2}x(1-x)^2 + \tfrac{1}{2}(1-x)^2 - \tfrac{1}{3}(1-x)^3 + x(1-x)^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{6}(1-x)^3 + x(1-x)^2 \right] dx = \tfrac{1}{8}$$

Observación:

La integral: $\iint_S xz\underbrace{dx\,dy}_{\text{Nos indica que S se proyecta sobre el plano XY}} + xy\underbrace{dy\,dz}_{\text{Indica que S se proyecta sobre el plano YZ}} + yz\underbrace{dx\,dz}_{\text{Indica que S se proyecta sobre el plano XZ}} =$

⇩ En este caso: $z = 1 - x - y$. La región de integración es: $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le x \le 1$

⇩ En este caso: $x = 1 - y - z$. La región de integración es: $0 \le z \le 1 - y$, $0 \le y \le 1$

⇩ En este caso: $y = 1 - x - z$. La región de integración es: $0 \le z \le 1 - x$, $0 \le x \le 1$

se transforma en:

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-y} y(1-y-z)\,dz\,dy + \int_0^1 \int_0^{1-x} z(1-x-z)\,dz\,dx$$

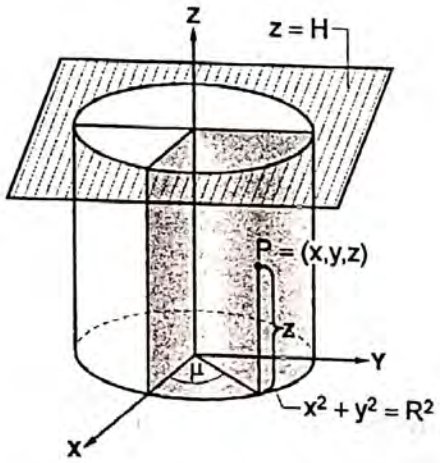
$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{8}$$

EJEMPLO 5 Calcular $\iint_S f \cdot n\,dS$, donde $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, S es la superficie **lateral** del sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$; siendo R, H constantes positivas y n es el vector unitario normal exterior a S.

Solución:

Paso 1 Esbozar un gráfico de la superficie S,



$x = 0$ (es el plano YZ)
$y = 0$ (es el plano XZ)
$z = 0$ (es el plano XY)
$z = H$ (plano paralelo a XY)

Paso 2 Parametrizar la superficie S

$$\begin{cases} x = R\cos\mu \\ y = R\,\text{sen}\mu \\ z = v \end{cases}$$

$0 \le \mu \le \frac{\pi}{2}$

$0 < v \le H$

$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{r}\,(\mu, v) = (R\cos\mu\,,\ R\,\text{sen}\mu\,,\ v)$

$D = \{(\mu, v)/0 \le \mu \le \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le v \le H\}$

Paso 3 Se pide hallar:

$$\iint_S f \cdot n\,dS = \iint_D (yz, xz, xy) \cdot (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\,d\mu\,dv$$

donde: $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v}{\| \vec{r}_\mu \times \vec{r}_v \|}$

$$dS = \| \vec{r}_\mu \times \vec{r}_v \|\,d\mu\,dv$$

CÁLCULOS AUXILIARES:

De: $\vec{r}\,(\mu, v) = (R\cos\mu, R\,\text{sen}\,\mu, v)$, obtenemos

a) $\vec{r}_\mu = (-R\,\text{sen}\,\mu\,,\ R\cos\mu\,,\ 0)$

b) $\vec{r}_v = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1)$

c) $\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v = (R\cos\mu\,,\ R\,\text{sen}\,\mu\,,\ 0)$

d) $(yz, xz, xy) \cdot (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v) =$
$= (yz, xz, xy) \cdot (R\cos\mu, R\,\text{sen}\,\mu, 0)$
$= yz\,R\cos\mu + xz\,R\,\text{sen}\mu$
$= (R\,\text{sen}\mu)(\upsilon)(R\cos\mu) + (R\cos\mu)(\upsilon)(R\,\text{sen}\mu)$
$= R^2\upsilon\,\text{sen}\mu\cos\mu + R^2\,\upsilon\cos\mu\,\text{sen}\,\mu$
$= 2R^2\,\upsilon\,\text{sen}\mu\cos\mu$
$= R^2\,\upsilon\,\text{sen}2\mu$

Paso 4 Ya podemos integrar, reemplazando los cálculos auxiliares en la integral:

$$\iint_S f \cdot n dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^H R^2 \upsilon \operatorname{sen} \mu \, d\upsilon \, d\mu$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \mu d\mu \int_0^H \upsilon d\upsilon$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \mu d\mu \left[\frac{\upsilon^2}{2} \right]_{\upsilon=0}^{\upsilon=H}$$

$$= R^2 \frac{H^2}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \mu d\mu$$

$$= R^2 \frac{H^2}{2} [-\cos \mu]_{\mu=0}^{\mu=\pi/2}$$

$$= R^2 \frac{H^2}{2} [-\cos \tfrac{\pi}{2} + \cos 0]$$

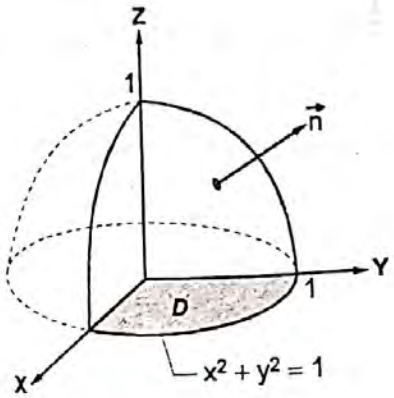
$$= \tfrac{1}{2} R^2 H^2$$

EJEMPLO 6 Calcular $\iint_S f \cdot n dS$, donde $f = (x,y,2z)$, S es la porción de la superficie $x^2 + y^2 = 1 - z$ que se encuentra en el primer octante y n es el vector normal unitario exterior a S.

Solución:

Se pide calcular $\iint_S f \cdot n \, dS = \iint_D f(x(\mu,v), y(\mu,v), z(\mu,v)) \cdot (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v) d\mu \, dv$

Paso 1 Graficar la superficie S.



Paso 2 Parametrizar la superficie

$S : x^2 + y^2 = 1 - z$

Despejar : $z = 1 - (x^2 + y^2)$

y la parametrización natural es:

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1 - (x^2 + y^2))$$

$$(x,y) \in D = \{(x,y) / x^2 + y^2 \le 1 \ , \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1\}$$

Paso 3 Cálculos auxiliares:

a) $\vec{r}_x = (1, 0, -2x)$

$\vec{r}_y = (0, 1, -2y)$

b) $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (2x, 2y, 1)$

Paso 4 Luego:

$$\iint_S f \cdot n \, ds = \iint_D (z, y, 2z) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy$$

$$= \iint_D (2xz + 2y^2 + 2z) \, dx \, dy$$

como $z = 1-(x^2+y^2)$ entonces se tendrá:

$$\iint_D [2x(1-(x^2+y^2))+2y^2+ 2(1-(x^2+y^2))]\,dx\,dy$$

Esta integral es más sencilla, si la región D la transformamos en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

JACOBIANO $J = r$

$$0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces la integral es:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [2r\cos\theta(1-r^2)+2r^2\,\text{sen}^2\theta+2(1-r^2)]\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [2\cos\theta(r^2-r^4)+2r^3\,\text{sen}^2\theta+2(r-r^3)]\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\theta\underbrace{\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}}+\frac{r^4}{2}\text{sen}^2\theta+2\underbrace{\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4}{15}\cos\theta+\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta+\frac{1}{2}\right]d\theta$$

$$= \frac{4}{15}\,\text{sen}\,\theta+\frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]+\frac{1}{2}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{15}+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-0\right]+\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4}{15}+\frac{3\pi}{8}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

INTEGRALES DE CAMPOS VECTORIALES SOBRE SUPERFICIES

01. Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$ donde $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, S es la superficie lateral del sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$, siendo R, H constantes positivas y $\vec{n}$ es el vector normal exterior a S.

Rpta.:

02. Calcule el valor de la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde $\vec{F}(x,y,z) = (x,0,0)$, S es la parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenida dentro del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y $\vec{n}$ es la normal unitaria exterior a S.

Rpta.: $\frac{(5\sqrt{2} - 8)}{12}\pi$

03. Calcule el valor de la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde: $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$; $\vec{n}$ es la normal unitaria exterior a S que es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre los planos $z = 0$, $z = x + 2$.

Rpta.: 3π

04. Calcule el valor de la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde: S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ con $z \geq 0$, $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$; $\vec{n}$ es el vector unitario normal exterior a S.

Rpta.: $-3\pi^2$ o $3\pi^2$, esto depende del sentido de la normal

- Teniendo en cuenta el ejemplo 3, hallar las integrales 5 – 10 :

05. $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, donde S es el lado positivo del cubo formado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Rpta.: 3

06. Calcular $\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy$, donde S es el lado positivo de la mitad inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Rpta.: $\frac{2\pi R^7}{105}$

07. Calcular $\iint_S z^2\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Rpta.: $\frac{4}{3}\pi abc$

08. $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$, donde S es la cara exterior de la superficie que es intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$, situado en el primer octante.

Rpta.: es la suma de dos integrales $= -\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$

09. $\iint_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $z = H$.

Rpta.: $R^2H\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right)$

10. $\iint_S y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados.

Rpta.: $\pi/8$

11. Considere las superficies: $S_1 : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} \wedge z \geq 0$, $S_2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge z \geq 0$, $S_3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge z \leq 0$; y sea Q el sólido que estas superficies delimitan.

a) Identifique las superficies y expresarlos en coordenadas cilíndricas.
b) Calcule el volumen de Q.
c) Calcule el área de la superficie frontera de Q que pertenece a S_3.
d) Calcule el flujo de campo $\vec{F}(x,y,z) = (2y,-3x,0)$ a través de la superficie S_1 contenido en la frontera Q.

Rpta.: S_1 : es un cono de eje z y vértice en (0,0,0)
S_2 : es un cilindro de eje, el eje Z y radio 2
S_3 : es una semiesfera de radio 2 y centro (0,0,0)

b) $V = 16\pi$, c) $\text{Area} = 8\pi$, d) $\text{Flujo} = 0$

12. Considere el sólido Q limitado por las superficies: $S_1 : z = 0$, $S_2 : y = x^2$, $S_3 : y + z = 4$ y considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$. Calcule:

a) El volumen de Q.
b) El área de $S_2 \subset$ front Q
c) El trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de la línea Γ que resulta de intersectar la frontera de Q con el plano XOY.
d) La longitud de la línea Γ referido en c)
e) El flujo de $\vec{F}$ a través de $S_3 \subset$ front Q.

Rpta.: a) $V = \frac{256}{15}$, b) $A = 15\sqrt{17} + \text{Ln}(4+\sqrt{17}) - \frac{1}{64}\text{Ln}(33+8\sqrt{17})$
c) $W = \frac{16}{3}$, d) $S = 2\sqrt{17} + \frac{1}{4}\text{Ln}\left(\frac{4+\sqrt{17}}{-4+\sqrt{17}}\right) + 4$, e) $\frac{128}{3}$

13. Considere el sólido Q limitado inferiormente por la superficie $S_1 : z = 4 - 2y$ y superiormente por la superficie $S_2 : z = 4 - x^2 - y^2$; considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = (xy,-x^2,2z)$. Calcule:

a) El volumen de Q
b) El área de $S_1 \subset$ front Q
c) El flujo de $\vec{F}$ a través de $S_2 \subset$ front Q

d) El trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de la línea que resulta de intersección de S_1 con S_2.

Rpta.: a) $\frac{-3\pi}{2}+\frac{64}{9}$ b) $\sqrt{5}\pi$ c) 5π d) 0

14. Sea S una parte del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, delimitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con una normal apuntando hacia afuera. Calcular $\iint_S (2\,dy\,dz + 5\,dz\,dx + 3\,dx\,dy)$.

Rpta.: -3π

15. Determinar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,0)$ a través de la superficie exterior del sólido $x^2 + y^2 \le 9$, $0 \le z \le 4$.

Rpta.: $0 + 0 + 72\pi = 72\pi$ unidades de flujo

16. Sea S una superficie exterior al tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 4$. Calcular $I = \iint_S (yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy)$ donde:

a) S es la cara del frente de S ;
b) S es la cara de S que está en el plano XZ ;
c) S es la cara de S que está en el plano YZ.
d) S es la cara de S que está en el plano XY ;

Rpta.: a) 32 , b) $-\frac{32}{3}$, c) $-\frac{32}{3}$, d) $-\frac{32}{3}$

17. Un fluido tiene vector densidad de flujo $\vec{F}(x,y,z) = (x,-2x-y,1)$. Sea S el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z \ge 0$ y $\vec{n}$ la normal que apunta para afuera. Calcular la masa de fluido que atraviesa S en la dirección de $\vec{n}$ en una unidad de tiempo.

Rpta.: 4π

18. Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, donde $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante con una normal apuntando para afuera.

Rpta.: 0

19. Calcular $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, siendo $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, S es la parte del plano $3x + 3y + 4z = 12$ cortada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ y $\vec{n}$ es la normal con componente z no negativa.

Rpta.: 6

20. Calcular $I = \iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$, donde S es una superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$

Rpta.: $\frac{\pi a^4}{2}$

21. Calcular $\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$, donde S es una superficie exterior al cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ limitada por los planos $y = -4$, $y = 4$

Rpta.: $16\pi a^2$

- En los ejercicios del 22 a 25 calcular la integral de superficie dada

22. $\iint_S x\, dy\, dz + 2y\, dz\, dx + 3z\, dx\, dy$, donde S es la superficie plana delimitada por el triángulo de vértices (3,0,0) , (0,2,0) y (0,0,3)

Rpta.: 18

23. $\iint_S dy\, dz + dz\, dx + dx\, dy$, donde S es la superficie exterior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimitado por los planos $z = 1$, $z = 4$.

Rpta.: -15π

24. $\iint_S x^2 dy\, dz + y^2 dz\, dx + z^2 dx\, dy$, donde S es la superficie plana delimitada por los planos coordenados y por el plano $z = 4$ y la *NORMAL* es afuera del origen

Rpta.: $\frac{16}{3}$

25. $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, donde S es la superficie plana $x = \mu + \upsilon$, $y = \mu - \upsilon$, $z = 1 - 2\mu$, tomada en el primer octante.

Rpta.: $\frac{1}{2}$

26. Calcular $I = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, siendo $\vec{f}(x,y,z) = x\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\vec{k}$ y S una superficie exterior a la esfera $\vec{r}(\mu, v) = (2\cos\mu\cos v, 2\operatorname{sen}\mu\cos v, 2\operatorname{sen} v)$, $0 \le \mu \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

Rpta.: $\frac{32}{3}\pi$

27. Determinar el flujo del campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (0,2x,2y)$ a través de la superficie exterior al sólido $x^2 + y^2 \le 16$, $0 \le z \le 4$.

Rpta.: 0

28. Calcular $I = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$, siendo $\vec{f}(x,y,z) = (x+1)\,\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$ y S una superficie exterior de $z = y^2 + 1$ delimitado por $x = 0$, $x = 1$ y $z = 17$.

Rpta.: 208/3

29. Determinar el flujo del campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con normal exterior.

Rpta.: $2\pi a^3(2 - \sqrt{2})$

30. Evalúe la integral de superficie $I = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$ para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = e^y\,\vec{i} + ye^x\,\vec{j} + x^2y\vec{k}$, S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está encima del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ y que tiene una orientación hacia arriba.

11.5 DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

A. DIVERGENCIA

Dado el campo vectorial $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

donde U es un conjunto abierto en U.

Asumimos que $\vec{F}$ es de clase C^1 (continuamente diferenciable) sobre U.

Dado el operador GRADIENTE $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, se llama la ***DIVERGENCIA*** de campo vectorial $\vec{F}$, a la función escalar, denotado por div $\vec{F}$, **tal que**

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \bullet \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

(• : Producto escalar)

B. ROTACIONAL

Se define la ***ROTACIONAL*** del campo vectorial $\vec{F}$ al ***campo vectorial*** denotado por rot $\vec{F}$, tal que:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

EJEMPLO 1 Calcular $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y^2, xyz, y\cos(xz))$, hallar la divergencia de $\vec{F}$ y el rotacional de $\vec{F}$.

Solución:

Se tiene como dato $\vec{F} = (\underbrace{x^2y^2}_{F_1}, \underbrace{xyz}_{F_2}, \underbrace{y\cos(xz)}_{F_3})$

a) $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$= 2xy^2 + xz - yx\operatorname{sen}(xz)$

b) $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2 & xyz & y\cos(xz) \end{vmatrix}$

$= (\cos(xz) - xy\,,\, -(-yz\operatorname{sen}(xz) - 0)\,,\, yz - 2x^2y)$

$= (\cos(xz) - xy\,,\, yz\operatorname{sen}(xz)\,,\, yz - 2x^2y)$

Algunas Aclaraciones Importantes:

1. ∇ es la letra griega NABLA y el cálculo vectorial lo usa para denotar al operador gradiente, esto es , $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

2. El operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ se aplica sobre el campo escalar f (x,y,z) y sobre un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

   a) Cuando el operador ∇ se aplica sobre el campo escalar f, se obtiene el ***gradiente de f***, esto es:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

   b) Cuando el operador ∇ se aplica sobre el campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como producto escalar, se obtiene la divergencia de $\vec{F}$, esto es:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3)$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

c) Cuando el operador ∇ se aplica sobre el campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como producto vectorial, se obtendrá el *ROTACIONAL* de $\vec{F}$, esto es :

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

11.6 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y TEOREMA DE STOKES

Son dos, los teoremas más importantes del cálculo vectorial: el Teorema de la divergencia (de Gauss) y el Teorema de Stokes.

- El Teorema de Gauss relaciona una región cerrada R de IR^3 (sólido cerrado) con la superficie S que la encierra (que es frontera de R). Esta relación se da mediante una triple integral de la div $\vec{F}$ sobre la región R y la doble integral sobre la superficie S.

- El teorema de Stokes relaciona una superficie S de IR^3 con su borde ∂s (que es una curva cerrada). Esta relación se da mediante una integral doble de rot $\vec{F}$ sobre la superficie S y una integral de línea sobre el borde cerrado de la superficie S.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (DE GAUSS) EN $\mathbb{R}^3$

Sea R una región cerrada en $\mathbb{R}^3$ y sea $S = \partial R$ la superficie cerrada que es frontera de R, con la orientación positiva de la normal exterior $\vec{n}$ (vector normal unitario exterior a S) y parametrizada por :

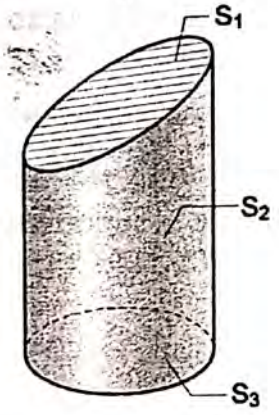
$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\mu, v) \longmapsto \vec{r}(\mu, v)$$

Si :

$$\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

es un campo vectorial de clase C^1 definido en el abierto U, tal que $U \supset R$, entonces :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F}\, dv \quad dv = dx\, dy\, dz$$



R es el sólido cerrado por las superficies S_1, S_2 y S_3.

Esto es $\partial R = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

↑ Borde (o frontera) de la región R

TEOREMA DE STOKES EN $\mathbb{R}^3$

Sea $S = \vec{r}(D)$ una superficie regular orientable, parametrizada por la aplicación: $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2, la cual proporciona la orientación de S y acotada por su borde ∂S.

Sea $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S; entonces

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

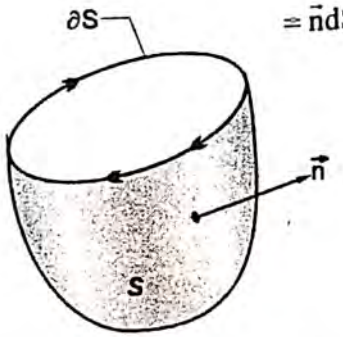
Parametrización de ∂S es

$$\vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \vec{T} = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$
$$t \longmapsto \vec{\alpha}(t) \qquad ds = |\alpha'(t)|\, dt$$

Parametrización de S, es:

$$\vec{r}(\mu, v) = (x(\mu, v), y(\mu, v), z(\mu, v))$$
$$(\mu, v) \in D$$

$$d\vec{S} = (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)\, d\mu\, dv$$
$$= \underbrace{\frac{(\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|}}_{\vec{n}} \underbrace{|\vec{r}_\mu \times \vec{r}_v|\, d\mu\, dv}_{dS}$$
$$= \vec{n}\, dS$$



El borde de la superficie S es

∂S = curva cerrada

COROLARIO

Si $\text{rot}\,\vec{F}=\vec{0}$ sobre un conjunto U abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$, entonces existe un campo escalar f sobre U tal que $\nabla f=\vec{F}$ sobre U, y por tanto:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=0 \text{ para toda curva cerrada C de U.}$$

TEOREMA

Si $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ es un campo vectorial definido en el conjunto abierto $U\subset\mathbb{R}^3$ y $R\subset U$ la región limitada por una superficie cerrada S, entonces el teorema de la divergencia expresado en coordenadas cartesianas es :

$$\iiint_R \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\text{div}\,\vec{F}}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv}=\oiint_S \underbrace{P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy}_{\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}$$

Demostración:

1. Como hipótesis se tiene el campo vectorial $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$
2. si α, β, γ son los ángulos directores del vector normal $\vec{n}$ y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de $\vec{n}$, entonces el vector normal $\vec{n}$ se puede expresar como :

   $\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$
3. El diferencial de superficie es $dS=|\vec{r}_x\wedge\vec{r}_y|\,dx\,dy$
4. El teorema de la divergencia de Gauss afirma que :

   $$\iiint_R \text{div}\,\vec{F}\,dv=\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
5. En el segundo miembro de (1) desarrollemos el producto escalar siguiente :

   $$\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})\cdot(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k})\,dS$$
   $$=(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$
   $$=P(\cos\alpha dS)+Q(\cos\beta dS)+R(\cos\gamma dS)$$

6. Se cumple que: $\cos\alpha\, dS = dydz$, $\cos\beta\, dS = dzdx$, $\cos\gamma\, dS = dxdy$.

Por lo tanto: $\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy$

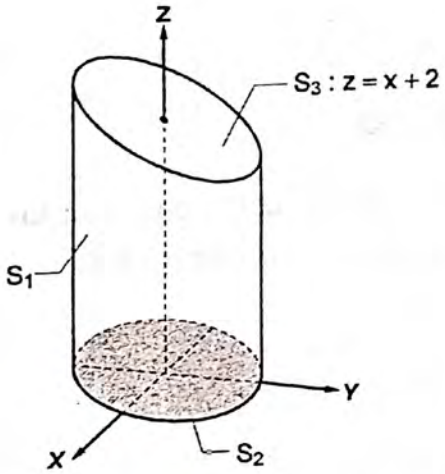
7. Como $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}$, queda probado que:

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \oiint_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy$$

PROBLEMA 1 Verificar el Teorema de la divergencia de Gauss para el campo $F = (x^3 , y^3 , z)$ y el sólido K limitado por las superficies: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x + 2$

Solución:

Paso 1 Graficar el sólido K limitado por los superficies:



$S_1 : x^2 + y^2 = 1$ ..... (cilindro)

$S_2 : z = 0$ ..... (plano XY)

$S_3 : z = x + 2$ ..... (plano $\perp$ XZ)

El Teorema de la divergencia de Gauss, aplicado a este problema es :

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_k \operatorname{div} \vec{F}\, dv$$

Para verificar, esta igualdad debemos calcular las cuatro integrales.

Paso 2 Cálculo de las integrales

a) Cálculo de: $\iiint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dv$

Para hallar esta integral, necesitamos la divergencia de $\vec{F}$ y los limites del sólido K:

i) $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$= 3x^2 + 3y^2 + 1$

ii) Los limites del sólido K, son:

$0 \le z \le x+2 \ , \ \underbrace{x^2 + y^2 \le 1}_{D}$

Entonces:

$$\iiint_K \operatorname{div} F \, dv = \iint_D \left[\int_0^{x+2} (3x^2 + 3y^2 + 1)\, dz \right] dx\,dy$$

$$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2 + 1)(x+2)\, dx\, dy$$

- Como la región :
  $D = \{(x,y) / x^2 + y^2 \le 1\}$ es circular, aplicar coordenadas polares :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \quad ; \ \text{JACOBIANO} = r$$

La nueva región sobre la cual se integra es:

$D = \{(r,\theta) / 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 + 1)(r\cos\theta + 2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^4\cos\theta + r^2\cos\theta + 6r^3 + 2r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{3}{5} r^5 \cos\theta + \tfrac{r^3}{3}\cos\theta + \tfrac{6}{4} r^4 + r^2 \right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{3}{5}\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos\theta + \tfrac{6}{4} + 1 \right] d\theta$$

$$= \left[\tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{5}{2}\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \tfrac{5}{2} \cdot 2\pi = 5\pi$$

Paso 3 Cálculo de $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

Necesitamos parametrizar S_1: $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = \cos\mu \\ y = \text{sen}\mu \\ z = \upsilon \end{cases}$$

Los límites para μ y υ , son :

$0 \le \mu \le 2\pi \ , \ 0 \le z \le x + 2$

$0 \le \upsilon \le \cos\mu + 2$

- La parametrización de S_1 es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\mu,\nu) \longmapsto \vec{r}\,(\mu,\nu) = (\cos\mu, \text{sen}\mu, \upsilon)$$

$D = \{(\mu,\nu) / 0 \le \mu \le 2\pi \ , \ 0 \le \upsilon \le \cos\mu + 2\}$

Entonces:

$$I_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (x^3, y^3, z) \cdot (\vec{r}_\mu \times \vec{r}_\upsilon)\, d\mu\, dv$$

Cálculos auxiliares:

De : $\vec{r}\,(\mu, \nu) = (\cos\mu, \text{sen}\,\mu, \upsilon)$

Obtenemos:

i) $\vec{r}_\mu = (-\text{sen}\,\mu, \cos\mu, 0)$

ii) $\vec{r}_\upsilon = (0 \ , \ 0 \ , \ 1)$

iii) $\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_\upsilon = (\cos\mu \ , \ \text{sen}\,\mu \ , \ 0)$

Luego:

$$I_1 = \iint_D (x^3, y^3, z) \cdot (\cos\mu, \text{sen}\,\mu, 0)\, d\mu\, dv$$

$$I_1 = \iint_D (x^3 \cos\mu + y^3 \operatorname{sen}\mu)\, dv\, d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos\mu + 2} (\cos^4\mu + \operatorname{sen}^4\mu)\, dv\, d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^4\mu + \operatorname{sen}^4\mu)(\cos\mu + 2)\, d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\operatorname{sen}^2\mu\cos^2\mu)(\cos\mu + 2)\, d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\mu + 2 - 2\operatorname{sen}^2\mu\cos^3\mu - 4\operatorname{sen}^2\mu\cos^2\mu)\, d\mu$$

$$= [-\operatorname{sen}\mu + 2\mu - 2\int \operatorname{sen}^2\mu(1 - \operatorname{sen}^2\mu)\cos\mu\, d\mu - \int \operatorname{sen}^2 2\mu d\mu]$$

$$= -\operatorname{sen}\mu + 2\mu - 2\int \operatorname{sen}^2\mu\cos\mu\, d\mu + 2\int \operatorname{sen}^4\mu\cos\mu d\mu - \int \operatorname{sen}^2 2\mu\, d\mu$$

$$= -\operatorname{sen}\mu + 2\mu - 2\frac{\operatorname{sen}^3\mu}{3} + \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5\mu - \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\operatorname{sen} 4\mu}{4}\right)\Big|_{\mu=0}^{\mu=2\pi}$$

$$= 4\pi - \mu = 3\pi$$

Paso 4 Cálculo de $\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$

Parametrización de S_2: $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 1$ cuya parametrización es:

$$\begin{cases} x = \upsilon\cos\mu \\ y = \upsilon \operatorname{sen}\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

$$0 \le \mu \le 2\pi\ ,\ 0 \le \upsilon \le 1$$

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}\,(\mu,v) = (\upsilon\cos\mu\ ,\ \upsilon\operatorname{sen}\mu\ ,\ 0)$$

$$D = \{\,(\mu,v)/0 \le \mu \le 2\pi\ ,\ 0 \le \upsilon \le 1\}$$

$$\vec{r}_\mu = (-\upsilon\operatorname{sen}\mu, \upsilon\cos\mu, 0)$$

$$\vec{r}_\upsilon = (\cos\mu, \operatorname{sen}\mu, 0)$$

$$\vec{r}_\mu \wedge \vec{r}_\upsilon = (0,0,-\upsilon\operatorname{sen}^2\mu - \upsilon\cos^2\mu)$$

$$= (0,0,-\upsilon)$$

Luego: $I_2 = \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$

$$= \iint_D (x^3, y^3, z)\cdot(0,0,\upsilon)\, d\mu\, d\upsilon$$

$$= \iint_D -z\upsilon\, d\upsilon\, d\mu$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -0\upsilon\, d\upsilon\, d\mu = 0$$

Paso 5 Cálculo de $I_3 = \iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$

Parametrizar $S_3 : z = x + 2$

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \longmapsto \vec{r}\,(x,y) = (x,y,x+2)$$

$$D = \{\,(x,y)/x^2 + y^2 \le 1\,\}$$

donde: $\vec{r}_x = (1\ ,\ 0\ ,\ 1)$

$$\vec{r}_y = (0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (-1\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

Luego,

$$I_3 = \iint_D (x^3, y^3, z)\cdot(-1,0,1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D (-x^3 + z)\, dx\, dy = \iint_D (-x^3 + x + 2)\, dx\, dy$$

Como D es circular aplicar coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta & 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

JACOBIANO $= r$

Luego ;

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r^3\cos^3\theta + r\cos\theta + 2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi$$

Conclusión : $I_1 + I_2 + I_3 = 3\pi + 0 + 2\pi = 5\pi$

PROBLEMA 2 Sean $\vec{r} = (x,y,z)$, $r = \|\vec{r}\|$, $\vec{F}(\vec{r}) = r^2\vec{r}$ y

$K = \{ (x,y,z) \in R^3 / x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \}$.

Verifique el Teorema de la Divergencia de Gauss para el campo $\vec{F}$ sobre el sólido K.

Solución:

El teorema de la divergencia afirma la igualdad: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_K \text{div}\,\vec{F}\,dv$

a) Cálculo de $\iiint_K \text{div}\,\vec{F}\,dv$

Cálculos auxiliares:

De : $\vec{F}(\vec{r}) = r^2\vec{r}$, obtenemos:

$\text{div}\,\vec{F} = r^2\,\text{div}\,\vec{r}$, $\vec{r} = (x,y,z)$

$= r^2(1+1+1)$

$= 3r^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Luego : $I = \iiint_K 3r^2 dv = 3\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dv$

Pero: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Entonces : $I = 3a^2 \underbrace{\iiint_K dv}_{\text{volumen de la esfera de radio "a"}}$

$= 3a^2\,\frac{4}{3}\pi a^3$

$= 4a^5\pi$

b) Cálculo de: $I = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$

$$= \iint_D \vec{F}(\phi(\mu,\upsilon))\cdot(\phi_\mu \times \phi_\upsilon)\,d\mu\,d\upsilon$$

Como datos se tiene:

i) El campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = r^2\vec{r}$

ii) La superficie sobre la cual se integra es la superficie esférica:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

cuya parametrización es :

$$\phi : D \subset IR^2 \longrightarrow IR^3$$

$$(\mu,\upsilon) \longmapsto \phi(\mu,\upsilon) = (a\,\text{sen}\upsilon\cos\mu\,,\ a\,\text{sen}\upsilon\,\text{sen}\mu,\ a\cos\upsilon)$$

$$D = \{ (\mu,\upsilon)/0 \le \mu \le 2\pi\,,\ 0 \le \upsilon \le \pi \}$$

Cálculos Auxiliares:

i) $\phi_\mu = (-\text{asen}\upsilon\,\text{sen}\mu\,,\ \text{asen}\upsilon\,\cos\mu\,,\ 0)$

ii) $\phi_\upsilon = (\text{acos}\upsilon\,\cos\mu,\ \text{acos}\upsilon\,\text{sen}\mu,\ -\text{asen}\upsilon)$

iii) $-(\phi_\mu \times \phi_\upsilon) = \text{asen}\upsilon\,\phi\,(\mu,v)$

Luego:

$$I = \iint_D (r^2\,\vec{r}) \cdot (a\,\text{sen}\,\upsilon\,\phi(\mu,v))\,d\mu\,d\upsilon$$

donde: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$\phi(\mu,v) = (x,y,z)$

$\vec{r} = (x,y,z)$

Luego:

$$I = \iint_D a^2 a\,\text{sen}\,\upsilon\,(\vec{r} \cdot \phi(\mu,v))\,d\mu\,d\upsilon$$

$$= \iint_D a^3\,\text{sen}\,\upsilon \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{a^2}\,d\mu\,d\upsilon$$

$$= \underbrace{a^5 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\,\upsilon\,d\upsilon\,d\mu}_{4\pi}$$

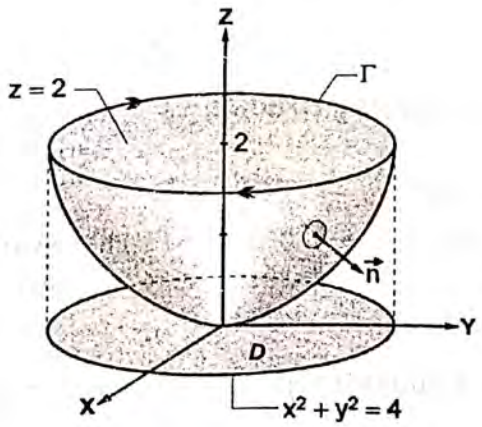
$$= 4a^5\pi$$

PROBLEMA 3 Usando el Teorema de Stokes calcular $\oint_\Gamma 3y\,dx - xz\,dy - yz^2dz$ donde Γ es la intersección de la superficie definida por $2z = x^2 + y^2$, con el plano $z = 2$, recorrida en sentido antihorario vista desde el eje Z positivo hacia el origen.

Solución:

Se pide calcular $\oint_\Gamma 3ydx - xzdy - yz^2dz$

donde : $\Gamma : \begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases}$



El teorema de Stokes, relaciona la integral de línea sobre el borde de la superficie S con la integral de superficie sobre la superficie S.

Esto es:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

(Calcular esta integral)

En este problema Γ es el borde del plano: $x^2 + y^2 \le 4$, $z = 2$, pero también es borde del paraboloide $2z = x^2 + y^2$. La proyección de ambas superficies es la región $D = \{(x,y)/x^2 + y^2 \le 4\}$.

- La doble integral $\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$ se puede calcular sobre el plano S: $z=2$ o sobre el paraboloide S: $2z=x^2+y^2$, pues el resultado será el mismo.

- Por la sencillez del cálculo, vamos hallar la doble integral

  $\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$ sobre el plano $z=2$.

Veamos:

a) De la función vectorial

$\vec{F}=(3y,-xz,-yz^2)$, obtenemos el rotor de $\vec{F}$:

$$\text{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & -yz^2 \end{vmatrix}$$

$$=(-z^2+x\,,-(0-0)\,,-z-3)$$

$$=(-z^2+x\,,0\,,-z-3)$$

b) De la parametrización de $S: z=2$

$$\vec{r}: D\subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\longmapsto \vec{r}\,(x,y)=(x,y,2)$$

obtenemos:

i) $\vec{r}_x=(1,0,0)$

ii) $\vec{r}_y=(0,1,0)$

iii) $\vec{r}_x\wedge\vec{r}_y=(0,0,1)$

iv) $d\vec{S}=(\vec{r}_x\wedge\vec{r}_y)\,dx\,dy$

Luego :

$$\iint_D \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D(-z^2+x,0,-z-3)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D(-z-3)\,dx\,dy\,,\ z=-2$$

$$=\iint_D(-5)\,dx\,dy$$

$$=-5\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{Area de la región D}}$$

D es un círculo de radio 2.

$$=-5[\pi(2)^2]$$

$$=-20\pi$$

- ***Nota:***
  Si queremos hacer el cálculo directo de la integral de línea:

  $$\oint_\Gamma 3y\,dx-xz\,dy-yz^2dz\,;$$

  debemos, en primer lugar, parametrizar Γ.

  La parametrización de Γ es:

  $\vec{\alpha}(t)=(2\cos t,2\text{sen}\,t,2)\,,t\in[0,2\pi]$

- El resultado es $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=-20\pi$

  Si respetamos el sentido de Γ, según el Teorema de Stokes, el resultado es: 20π

PROBLEMA 4 Usar el Teorema de Gauss para determinar $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$

donde $\vec{f} = (x^2+z^2, y^2-2xy, 4z-2yz)$, n es el vector unitario normal exterior a S, la cual es la superficie que limita al sólido

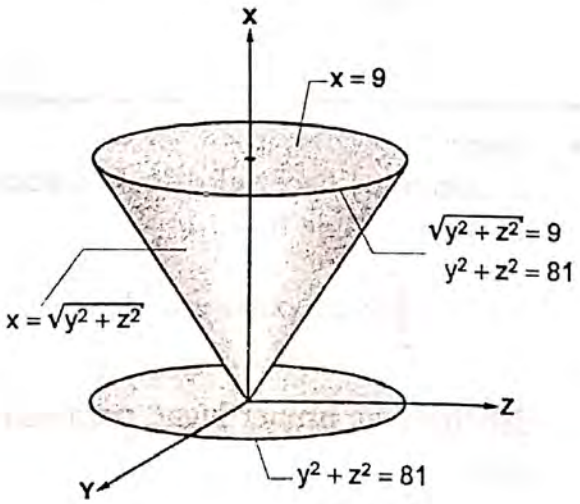
$$K = \left\{ (x,y,z) \,|\, \sqrt{y^2+z^2} \le x \le 9 \right\}$$

Solución:

Graficar el sólido K, limitado por las superficies:

$x = \sqrt{y^2+z^2}$ *(cono)*

$x = 9$ *(plano)*



El teorema de la divergencia de Gauss:

$$\iint_{Sup} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{vol} \operatorname{div} \vec{f}\, dv$$

(Debemos hallar)

Cálculos auxiliares:

a) de $\vec{f} = (\underbrace{x^2+z^2}_{M}, \underbrace{y^2-2xy}_{N}, \underbrace{4z-2yz}_{P})$

obtenemos:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= 2x + 2y - 2x + 4 - 2y$$

$$= 4$$

b) Luego:

$$\iiint_{vol} \operatorname{div} \vec{f}\, dv = \iiint_{K} 4\, dv$$

$$= 4 \underbrace{\iiint_{K} dv}_{\text{Volumen del cono}}$$

$$= 4\left[\tfrac{1}{3}(9^2\pi)(9)\right]$$

$$= 972\pi$$

PROBLEMA 5 Usando el Teorema de Stokes calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F = (y^2, xy, xz)$ para mover una partícula alrededor de la curva $\mathcal{C}$ determinada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 2y$, $y - z = 0$.

Solución:

El teorema de Stokes es: $W = \oint_{\partial s} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$

Trabajo

1. En primer lugar graficar:

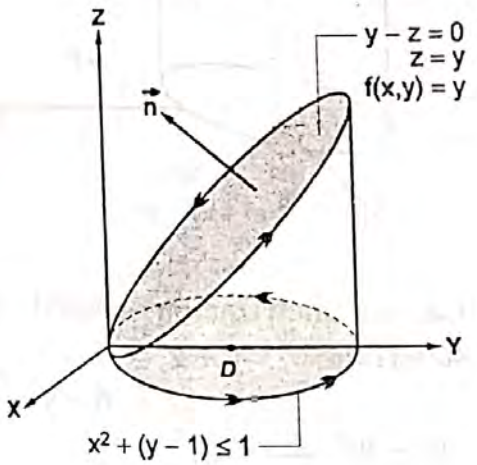
a) $x^2 + y^2 = 2y$

$x^2 + y^2 - 2y + \ldots = 0$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ *(cilindro)*

b) $y - z = 0$ *(plano perpendicular al plano YZ y pasa por el origen)*



2. Debemos calcular $\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$

Cálculos auxiliares:

a) De $\vec{F} = (y^2, xy, xz)$ obtenemos:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & xz \end{vmatrix}$$

$= (0-0, -(z-0), y-2y$

$= (0, -z, -y)$

b) Parametrizar la superficie $S: y - z = 0$

$z = y$

es:

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}\,(x,y) = (x,y,y)$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$

$\vec{r}_x = (1,0,0)$

$\vec{r}_y = (0,1,1)$

$\vec{r}_x \wedge r_y = (0,-1,1)$

c) $d\vec{S} = (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\,dx\,dy$

$= (0,-1,1)\,dx\,dy$

3. Entonces:

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (0,-z,-y) \cdot (0,-1,1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (z-y)\,dx\,dy \quad \text{pero } y - z = 0$$

$$= \iint_D (y-y)\,dx\,dy$$

$= 0$

PROBLEMA 6 Usando el Teorema de Stokes calcular el trabajo realizado por $F = (y^2 + z^2 , x^2 + z^2 , x^2 + y^2)$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva que es intersección de las superficies: $x^2 + xy + y^2 = 4$, $y + z = 6$ siendo el recorrido en sentido antihorario vista desde la parte positiva del eje Z.

Solución:

El teorema de Stokes es:

$$W = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_{S} \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Calcular esta integral

Debemos integrar $\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$

Para ello, necesitamos:

a) Calcular el $\text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$

b) Parametrizar la superficie S, para hallar $d\vec{S} = (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\,dxdy$

Veamos:

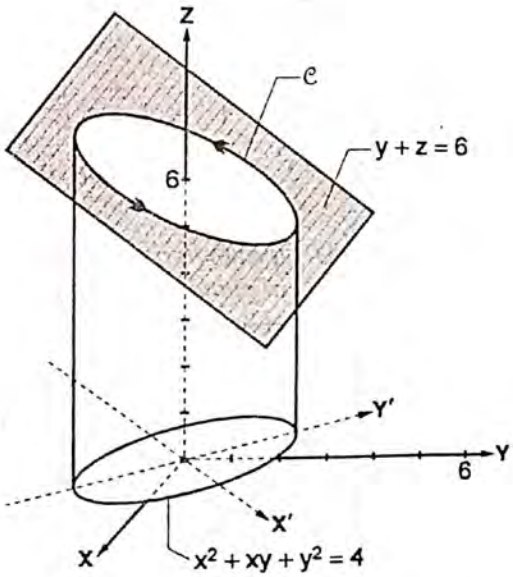
a) $$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

$$= i(2y-2z) - j(2x-2z) + k(2x-2y)$$

$$= 2(y-z, z-x, x-y)$$

b) La curva $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ es el borde de la superficie $S_2 : y + z = 6$ que es cortada por el cilindro elíptico rotado S_1 .

$$\begin{cases} S_1 : x^2 + xy + y^2 = 4 \\ S_2 : y + z = 6 \end{cases}$$



- La parametrización natural de la superficie $y + z = 6$

$z = 6 - y$, es :

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{r}\,(x,y) = (x, y, 6-y)$$

$$D = \{ (x,y) / x^2 + xy + y^2 \leq 4 \}$$

- $d\vec{S} = (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y)\,dxdy$
- Cálculos auxiliares:

i) $\vec{r}_x = (1,0,0)$

ii) $\vec{r}_y = (0, 1, -1)$

iii) $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (0,1,1)$

iv) $d\vec{S} = (0,1,1)\,dx\,dy$

- Luego:

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D 2(y-z, z-x, x-y)\cdot(0,1,1)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_D [z-x+x-y]\,dx\,dy$$

Pero : $y+z=6$

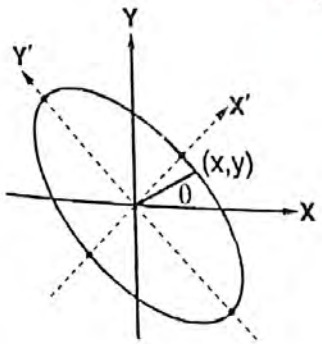
$$= 2\iint_D [6-2y]\,dx\,dy$$

$$= 4\iint_D [3-y]\,dx\,dy$$

El borde de la región D es la elipse rotada:

$$x^2+xy+y^2=4 \iff \frac{x'^2}{8/3}+\frac{y'^2}{8}=1$$

$$a=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ ,\ b=2\sqrt{2}$$



$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = 12\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{Área de D}} - 4\iint_D y\,dx\,dy$$

$$= 12\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{2}\pi\right] - 4\iint_D y\,dx\,dy$$

$$= 32\sqrt{3}\pi - 4\iint_D y\,dx\,dy$$

Cálculo de: $\iint_D y\,dx\,dy$

Aplicando coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

JACOBIANO = r

La ecuación : $x^2+y^2+xy=4$

se convierte en : $r^2+r^2\,\text{sen}\theta\cos\theta=4$

$$r^2(1+\text{sen}\theta\cos\theta)=4$$

$$r=\frac{2}{\sqrt{1+\text{sen}\theta\cos\theta}}$$

La nueva región de integración es:

$$E=\left\{(r,\theta/0\le r\le\frac{2}{\sqrt{1+\text{sen}\theta\cos\theta}}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

Luego:

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}} r\operatorname{sen}\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^{\frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}} r^2 dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 2^3(1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{-3/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y TEOREMA DE STOKES

01. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (2, xz, z^3)$ un campo vectorial y Γ la intersección de las superficies $z = x^2y^2$; $x^2 + y^2 = a^2$. Usando el teorema de Stokes, calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}$ para trasladar una partícula alrededor de Γ una sola vez. El recorrido es en sentido horario visto desde el origen.

Rpta.: $\frac{a^2}{8}(a^4+8)\pi$

02. Un cono de altura h, eje sobre el eje z, vértice en el origen y el ángulo entre su eje y cualquier generatriz es $\frac{\pi}{4}$ es cortado por el plano $z = \frac{h}{2}$. Verifique el Teorema de la divergencia para el campo $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z)$ y la superficie que limita al tronco de cono comprendido entre $z = h$ y $z = \frac{h}{2}$.

Rpta.:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F} = \frac{7}{24}\pi h^3 \ , \ \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S} = -\frac{14}{24}h^3\pi \ , \ \iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S} = h^3\pi \ , \ \iint_{S_3}\vec{F}\cdot d\vec{S} = -\frac{h^3}{8}\pi$$

03. Usando el teorema de la divergencia de Gauss determine el valor de la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(3y^2-z^2)\vec{i}-y^2\vec{j}+(x+2yz)\vec{k}$ sobre la superficie S descrita por la ecuación $x^2+z^2=y^2$ con $0\le y\le 1$.

Rpta.: π

04. Usando el Teorema de Stokes determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z)=(y-2)\vec{i}+(z+1)\vec{j}+(z+2)\vec{k}$ para trasladar una partícula, una sola vez, alrededor de la curva C, intersección de las superficies :
$x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z$; $x+y+z=2$, siendo el recorrido, visto desde el origen, en sentido antihorario.

Rpta.: $3\sqrt{3}\pi$

05. Verificar el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}(x,y,z)=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$ sobre la superficie S que es la parte del paraboloide $z=1-x^2-y^2$ con $z\ge 0$.

Rpta.: π

06. Usando el teorema de la divergencia de Gauss calcular la integral $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

donde $\vec{F}(x,y,z)=2x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ y S es la frontera del sólido limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$; y el plano $z=2x$.

Rpta.: 2π

07. Calcular $\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, sabiendo que $\vec{F}(x,y,z)=5z\vec{i}+4x\vec{j}+2y\vec{k}$, S es la superficie con ecuación $(x^2+y^2+z^2)^2=4x$, $1\le x\le 4^{1/3}$ y es el vector unitario normal exterior a S.

Rpta.: $[3(2^{5/3})-2]\pi$

08. Usando el teorema de la divergencia de Gauss calcule el valor de la integral $\iiint_V \text{div}\,\vec{F}\,dv$ donde $\vec{F}(x,y,z)=(0,xyz^3,3z)$ y V es el sólido limitado por las superficies $z=(x^2+y^2)^{1/2}$; $z=4$

09. Usando el Teorema de Stokes calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F} = (y^2, xy, xz)$ para mover una partícula alrededor de la curva C determinada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 2y$, $y - z = 0$.

10. Usando el Teorema de Stokes calcular $\oint_\Gamma 3y\,dx - xz\,dy - yz^2\,dz$ donde Γ es la intersección de la superficie definida por $2z = x^2 + y^2$, con el plano $z = 2$, recorrida en sentido antihorario vista desde el eje Z positivo hacia el origen.

11. Usar el Teorema de Gauss para determinar $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$ donde:

$\vec{f} = (x^2 + z^2, y^2 - 2xy, 4z - 2yz)$, $\vec{n}$ es el vector unitario normal exterior a S, la cual es la superficie que limita al sólido $K = \{ (x,y,z) / \sqrt{x^2 + z^2} \le x \le 9 \}$.

12. Usando el Teorema de Stokes, calcular el trabajo realizado por :
$\vec{F} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva que es intersección de las superficies : $x^2 + xy + y^2 = 4$, $y + z = 6$ siendo el recorrido en sentido antihorario vista desde la parte positiva del eje Z.

13. Verificar el Teorema de la divergencia de Gauss para el campo $\vec{F} = (x^3, y^3, z)$ y el sólido K limitado por las superficies : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x + 2$.

14. Si $\vec{F}(x,y,z) = (5e^{\operatorname{sen} x} - 6y + \operatorname{Ln}(1-z), 4x + e^{\cos y} + e^z, 3x^3y^4z)$, un campo de fuerzas. Hallar el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover una carga eléctrica alrededor de la curva Γ , en sentido antihorario, Γ : $9x^2 + 16y^2 = 144$

Rpta.: 120π

15. Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas:
$\vec{F}(x,y,z) = (2y^2 - \frac{z^2}{2}, z^2 - 2x^2, 2x^2 - 2y^2)$ al trasladar una partícula a lo largo de la curva Γ intersección de la superficie que limita al sólido:
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le 2 , 0 \le z \le 3\}$ y el plano $2x + 2y + z = 4$ recorrida en sentido antihorario vista desde la parte superior del eje Z.

Rpta.: $-8\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}(1-2x)}^{-x+2} (x + y + 1)\,dy\,dx + \int_{1/2}^{1} \int_0^{-x+2} (x + y + 1)\,dy\,dx \right]$

El desarrollo de estas dos integrales es la solución.

16. Usando el teorema de la divergencia de Gauss calcule el valor de la integral $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, donde: S es la parte lateral del tronco del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitado por los planos $z=1$; $z=4$, $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+2z, y^2+z^2, 1)$; $\vec{n}$ es el vector unitario normal exterior a S.

Rpta.: $-15\,\pi$

17. Verifique el Teorema de la divergencia de Gauss usando el campo $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ y el sólido limitado por los paraboloides $z=x^2+2y^2$, $z=12-2x^2-y^2$.

Rpta.: 72π

18. Usando el Teorema de la Divergencia, hallar el flujo producido por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z)=(x^3,y^3,3z)$, hacia la parte exterior de la región encerrada por las superficies : $z=x^2$, $x^2+y^2=1$, $z=0$

Rpta.: $\frac{5\pi}{4}$

19. Aplicando la fórmula de Stokes, transformar la integral:

$\int_L (y^2+z^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$ tomada a lo largo de cierto contorno cerrado, en la integral de superficie "tendida" sobre este contorno.

Rpta.: $2\iint_S (x-y)\,dxdy+(y-x)\,dydz+(z-x)\,dxdz$

20. Calcular la integral $\int_L x^2y^3\,dx+dy+zdz$, donde el contorno L es la circunferencia $x^2+y^2=R^2$, $z=0$:

a) directamente,

b) aplicando la fórmula de Stokes y considerando la semiesfera $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ como superficie. La integración, a lo largo de la circunferencia en el plano XOY, debe efectuarse en el sentido positivo.

Rpta.: $-\frac{\pi R^6}{8}$

21. Verifique el Teorema de Stokes para $\vec{F}(x,y,z) = 2y\vec{i} - 3x\vec{j}$ siendo

$S: x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} \ \wedge \ 0 \le z \le 4$

Rpta.: 20π

22. Utilice el Teorema de Stokes para calcular $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en los siguientes casos:

a) Γ es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ z = 1$;
$\vec{F}(x,y,z) = (3z - \operatorname{sen} x)\vec{i} + (x^2 + e^y)\vec{j} + (y^3 - \cos z)\vec{k}$

b) Γ es el cuadrado de vértices $(1,0,2)$, $(1,1,2)$, $(0,1,2)$, $(0,0,2)$;
$\vec{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$.

Rpta.: a) 0 , b) $-{}^3/_2$

23. Use el Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ en los siguientes casos:

a) $S: z = 4 - x^2 - y^2 \ \wedge \ z \ge 0$; $\vec{F}(x,y,z) = 2y\vec{i} + \vec{j} + x\vec{k}$

b) $S:$ es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$;
$\vec{F}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$

Rpta.: a) -8π b) $-\frac{58}{15}$

24. Probar que siendo S una superficie cerrada que limita al sólido Q de volumen V : a) $\iiint_Q \operatorname{div} \vec{n}\, dxdydz = \text{área}(S)$ siendo $\vec{n}$ el vector unitario normal a S.

b) El flujo de campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ a través de S es numéricamente igual al triplo de V.

25. Probar que siendo S una superficie cerrada y que limita al sólido Q de volumen V, entonces $\iiint_Q \operatorname{div} \vec{n}\, dxdydz$ es numéricamente igual al área de S ($\vec{n}$ = vector unitario normal a S).

26. Considera la superficie cónica S de vértice $V=(1,1,2)$ y cuya base es la elipse definida por $9x^2+4y^2=1 \wedge z=1$.

a) Determine una representación paramétrica de S (note que es una superficie reglada)

b) Calcule, usando un teorema estudiado, $\iint_S \text{rot } f \cdot n \, dS$, siendo:

$f(x,y,z) = (x^3, x+y^2, z^3)$ y n es el vector normal unitario a S, con tercera componente positiva.

Rpta.:

a) $\vec{r}(\lambda,\theta) = \left(1+\lambda\left(\frac{\cos\theta}{3}-1\right),\ 1+\lambda\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{2}-1\right),\ 2-\lambda\right), \lambda\in[0,1], \theta\in[0,2\pi]$

b) Por el Teorema de Stokes $\iint_S \text{rot } f \cdot n \, dS = \pi/6$

27. a) Determine una representación paramétrica de la superficie S formada por los segmentos de recta que unen el punto $V=(0,0,1)$ con los puntos de la elipse $x^2+4y^2=1$.

b) Determine el campo vectorial $\bar{G}$ tal que $\bar{F} = \text{rot}\,\bar{G} = (x, -y+z, y)$

c) Calcule, teniendo las líneas anteriores $\iint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS$

Rpta.: a) $\vec{r}(t,\theta) = (t\cos\theta, \frac{t}{2}\text{sen}\,\theta, 1-t), 0\le t\le 1, 0\le\theta\le 2$

b) $\bar{G} = (0, xy, xy-xz)$ c) 0

28. Evaluar $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$ y C es la curva de la intersección del plano $y+z=2$ con el cilindro $y^2+z^2=1$ (el sentido de C es antihorario visto desde arriba)

Rpta.: π

29. Utilice el Teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$, donde

$\vec{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ y S es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está adentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y arriba del plano XY.

Rpta.: 0

30. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza:
$\vec{F}(x,y,z) = (x^x + z^z)\,\vec{i} + (y^y + x^2)\,\vec{j} + (z^z + y^2)\,\vec{k}$ cuando una partícula se mueve bajo su influencia alrededor de la orilla de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está en el primer octante, y que está orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, vista desde arriba.

Rpta.: 16

- Para los ejercicios 31 calcula la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

31. $\vec{F}(x,y,z) = (-xz, -yz, z^2)$, S es la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Rpta.: 0

32. $\vec{F}(x,y,z) = (z\cos y, x\,\text{sen}\, z, xz)$, S es la superficie del tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 2$.

Rpta.: $\frac{1}{6}$

33. $\vec{F}(x,y,z) = (ye^{z^2}, y^2, e^{xy})$, S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y el plano $z = 0$ y $z = y - 3$.

Rpta.: $-81\pi/2$

34. $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, yz, zx^2)$, S es la superficie del sólido que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ y entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.

Rpta.: 27π.

35. $\vec{F}(x,y,z) = (e^y \,\text{tg}\, z, y\sqrt{3 - x^2}, x\,\text{sen}\, y)$, S es la superficie del sólido que está entre el plano XY y debajo de la superficie $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Rpta.: $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20}\,\text{arcsen}\,(\sqrt{3}/3)$.

36. Use el Teorema de la divergencia para hallar $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = z^2 x\,\vec{i} + \left(\frac{1}{3}y^3 + \tan z\right)\vec{j} + (x^2 + z + y^2)\,\vec{k}$, y S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Rpta.: $\frac{13\pi}{20}$

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T.: Calculus, vols. I y II, 2da. edición, Reverté, 1982.
- Apostol, T.: Análisis Matemático, 2da. edición, Reverté, 1979.
- Berman G.N.: A Problem Book in Mathematical Analysis, Mir Publishers, Moscow, 1977.
- Claudio Pita Ruíz: Cálculo Vectorial. Prentice Hall - Hispanoamericana S.A.
- Demidovich B.P.: 5000 Problemas de Análisis Matemático, Paraninfo, Madrid, 1989.
- Elon Lages Lima: Analise no Espacion $\mathbb{R}^n$, Editora Universidad de Brasilia, 1970.
- Elon Lages Lima: Curso de Análise. Vol. 2. Instituto de Matemática Pura y Aplicada. Proyecto Euclides, Rio de Janeiro 1981.
- Manfredo do Carmo: Differential Geometry of curves and superface. Prentice-Hall, 1976.
- Michael Spivak: Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin Inc. 1965.
- Gerald B. Bradley - Karl J. Smith: Cálculo de varias variables, vol. 2. Prentice Hall. 1998.

UNIVERSITARIOS

COLECCIÓN MOSHERA

PEDIDOS AL POR MAYOR

Telefax: 567-9299

e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

ISBN: 978-9972-813-60-3